

# 曲面接触问题及其等距面接触特性研究

曹利新\*, 宫虎, 刘健

(大连理工大学机械工程学院, 辽宁大连 116024)

**摘要:** 从微分几何学角度探讨了两曲面的接触问题,以及两曲面的接触状况与其等距面的接触状况之间的关系,这些内容对于讨论五坐标曲面数控加工中的刀位确定和几何残留误差的计算等将发挥重要的作用. 研究发现: 诱导曲率是描述两曲面间接触状况的重要几何不变量,对于点接触的两曲面,给出了二阶离差的计算公式;对于线接触的两曲面,证明了两曲面呈二阶接触的条件为两曲面在对应点处具有相同的主方向和主曲率;同时证明了两曲面若二阶密切,则其等距面也能保证二阶密切,而且原曲面的三阶离差与其等距面上的三阶离差大小也相同.

**关键词:** 点接触; 线接触; 相对曲率(诱导曲率); 离差; 等距面

**中图分类号:** TP391 **文献标识码:** A

## 0 引言

微分几何学中研究了一个曲面点邻域的特征,而在工程上通常两曲面相互接触才能工作,它们之间相对的几何关系即为接触. 长期以来曲面间的接触问题受到工程界的广泛关注,这部分内容主要起源于对齿轮、凸轮等高副机构的研究,如为了分析齿轮的承载能力以及相邻齿之间的载荷分配,则必须借助于对接触域的大小与方位的研究;为了提高齿轮的适应性而将线啮合点啮合化,即失配共轭. 这些内容都属于曲面间的接触问题. 1973年 Baxter<sup>[1]</sup>应用运动学的基本方程提出了一种确定两共轭曲面间法曲率关系的直接方法,之后这种方法被广泛应用到曲面间接触问题的分析中. 1995年 Litvin等<sup>[2]</sup>运用运动学的基本方程给出了直接确定曲面间主曲率、主方向、法曲率和挠率关系的方法及详细步骤,计算了两曲面间局部接触域的大小和方位,并应用到准双曲面齿轮的研究中. 1999年 Yan等<sup>[3]</sup>运用矩阵变换、接触面间的基本运动方程、微分几何等方法,针对给定输入输出关系和发生曲面的3杆凸轮从动机构,导出了凸轮曲面的主曲率、相对法曲率和用一类、二类界限函数表示的干涉条件.

在曲面的数控加工中又遇到类似的问题,与共轭曲面原理不同之处是,在共轭曲面原理的讨论中,通常是给定一个曲面  $E^{(1)}$  和该曲面的运动,求另一个与它共轭的曲面  $E^{(2)}$ ,即曲面  $E^{(1)}$  在某一运动下的包络面. 而数控加工中的情况则是给定了要加工的工件曲面和刀具曲面,在满足加工精度的前提下尽可能地提高加工效率. 无论采用何种刀具加工曲面,刀具的包络面与被加工曲面通常并不完全一致,因此就出现了如何规划刀位,才能使刀具包络面尽可能地逼近被加工曲面. 这个问题类似于两曲面接触域的大小,为了追求较高的加工精度和加工效率,要求刀具包络面不仅与被加工曲面在加工路径上相切地接触,更希望是一个接触带,即加工带尽可能宽,这就需要研究曲面带与被加工曲面之间的高阶接触问题,即密切接触以及两曲面密切接触下的残留高度,因此需要对两曲面的接触问题有一个系统的研究. 考虑到数控刀具的特点,球头刀的球面为点的等距面、圆柱刀的柱面为直线的等距面、圆环刀的环面为环心圆的等距面,自然会想到能否利用等距性质使复杂的问题简化,因为等距线、等距面曾在凸轮设计、数控加工中球头刀刀心位置的确定等问题的研究中发挥过重要作用. 研究发现: 当采用

收稿日期: 2005-06-10; 修回日期: 2006-11-15.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50105001).

作者简介: 曹利新\*(1966-),男,博士,副教授.

非球头刀具加工曲面时,等距问题更加复杂,首先要求从理论上回答一系列问题,如等距面上两曲面若密切,原曲面是否也能保证密切?等距面上的几何残留误差与原曲面上的几何残留误差之间的关系如何?等等.

本文从数控加工工程应用的角度出发,把曲面的接触问题和等距面的性质与数控加工的刀位规划和几何残留误差结合起来研究.

## 1 曲面的点接触

微分几何学<sup>[4-5]</sup>中研究了曲线的接触,两曲线相交为零阶接触,两曲线相切为一阶接触,即根据离差为几阶小量来决定接触的阶数.若将接触的概念推广到曲面在工程上具有重要的价值,如齿轮啮合中的两共轭齿廓面间的接触、数控加工中刀具与被加工曲面之间的接触.两曲面可以是点接触,也可以是线接触.所谓点接触,即两曲面在点邻域内接触.考虑到两曲面在接触点处沿不同方向的接触阶数不同,文献[6]将包含接触点的所有法截面中,两曲面与同一法截面相交所得的两法截线间接触的最低阶数作为两曲面的接触阶.

如图 1 所示,设曲面  $E^{(1)}$ 、 $E^{(2)}$  在点  $P$  处相切,在该点设立一公共正交标架  $\{P-T, B, e_3\}$ ,  $T, B$  在公共切面内,  $e_3$  为公共单位法矢,对  $E^{(1)}$  来说离体为正.  $r^{(1)}(u_1, v_1)$  为曲面  $E^{(1)}$  的矢径,  $u_1, v_1$  为曲面  $E^{(1)}$  的参数.  $r^{(2)}(u_2, v_2)$  为曲面  $E^{(2)}$  的矢径,  $u_2, v_2$  为曲面  $E^{(2)}$  的参数.  $dr$  为切平面内的任一矢量,它与  $T$  的夹角为  $h$ . 在公共标架内有

$$r^{(1)}(P(u_1, v_1)) = r^{(2)}(P(u_2, v_2)) \quad (1)$$

对式(1)微分,则有

$$dr^{(1)} = dr^{(2)} = T e_T + B e_B \quad (2)$$

式中:  $e_T, e_B$  分别为切平面内沿  $T, B$  方向的弧微分.

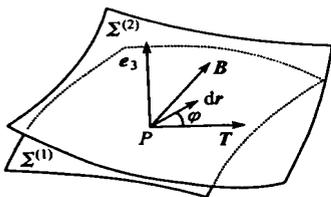


图 1 曲面的点接触

Fig. 1 Point contact of two surfaces

它与曲面  $E^{(1)}$ 、 $E^{(2)}$  的截线分别为  $C^{(1)}$ 、 $C^{(2)}$ , 则两曲面的离差可表示为

$$h^{(21)} = (\Delta r^{(2)} - \Delta r^{(1)}) \cdot e_3 \quad (3)$$

式中:  $\Delta r^{(1)}$ 、 $\Delta r^{(2)}$  分别为  $P$  点到截线  $C^{(1)}$ 、 $C^{(2)}$  上  $P$  点邻域内两点的矢径, 如图 2 所示.

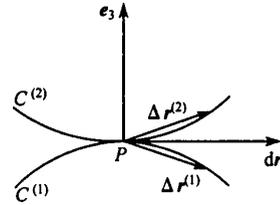


图 2 曲面的法截面

Fig. 2 The normal section of the two surfaces

下面借助于两曲面间的离差  $h^{(21)}$  研究两曲面在  $P$  点的接触状态, 对式(3)进行 Taylor 展开:

$$h^{(21)} = (dr^{(2)} - dr^{(1)}) \cdot e_3 + \frac{1}{2} (d^2 r^{(2)} - d^2 r^{(1)}) \cdot e_3 + \frac{1}{6} (d^3 r^{(2)} - d^3 r^{(1)}) \cdot e_3 + X \quad (4)$$

由于前面已规定  $E^{(1)}$ 、 $E^{(2)}$  在点  $P$  处相切, 在过  $P$  点的任一法截面内讨论两曲面的二阶接触问题, 则有

$$d^2 r^{(1)} \cdot e_3 = k_{nT}^{(1)} e_T^2 + 2 f_{gT}^{(1)} e_T e_B + k_{nB}^{(1)} e_B^2 \quad (5)$$

$$d^2 r^{(2)} \cdot e_3 = k_{nT}^{(2)} e_T^2 + 2 f_{gT}^{(2)} e_T e_B + k_{nB}^{(2)} e_B^2 \quad (6)$$

式中:  $k_{nT}^{(1)}$ 、 $k_{nB}^{(1)}$ 、 $k_{nT}^{(2)}$ 、 $k_{nB}^{(2)}$  分别为曲面  $E^{(1)}$ 、 $E^{(2)}$  上  $P$  点处沿  $T, B$  方向的法曲率;  $f_{gT}^{(1)}$ 、 $f_{gT}^{(2)}$  分别为曲面  $E^{(1)}$ 、 $E^{(2)}$  上  $P$  点处沿  $T$  方向的测地挠率.

将式(5)、(6)相减, 得

$$(d^2 r^{(2)} - d^2 r^{(1)}) \cdot e_3 = k_{nT}^{(21)} e_T^2 + 2 f_{gT}^{(21)} e_T e_B + k_{nB}^{(21)} e_B^2 \quad (7)$$

式中:  $k_{nT}^{(21)} = k_{nT}^{(2)} - k_{nT}^{(1)}$ , 为两曲面沿  $T$  方向的诱导法曲率;  $k_{nB}^{(21)} = k_{nB}^{(2)} - k_{nB}^{(1)}$ , 为两曲面沿  $B$  方向的诱导法曲率;  $f_{gT}^{(21)} = f_{gT}^{(2)} - f_{gT}^{(1)}$ , 为两曲面沿  $T$  方向的诱导测地挠率.

$k_{nT}^{(21)}$ 、 $k_{nB}^{(21)}$  描述了切平面内  $T, B$  方向上两曲面的相对弯曲程度,  $f_{gT}^{(21)}$  反映两曲面的相对扭曲程度, 这 3 个不变量在曲面接触问题的讨论中占据重要地位. 如果将式(7)除以  $e^2$ , 则有

$$\frac{(d^2 r^{(2)} - d^2 r^{(1)}) \cdot e_3}{e^2} = k_{nT}^{(21)} \cos^2 h + 2 f_{gT}^{(21)} \cos h \sin h + k_{nB}^{(21)} \sin^2 h \quad (8)$$

式中:  $e$  为过  $P$  点切平面内某一方向  $dr$  的弧微分.

从式(8)的结构来看, 它与一般的法曲率公式相同, 即诱导法曲率具有一般曲面的共同特征.

适当地选取  $T$   $B$  方向, 可以使  $f_g^{(21)} = 0$ . 则式 (8) 可表示为

$$k_n^{(21)} = k_T^{(21)} \cos^2 h + k_B^{(21)} \sin^2 h \quad (9)$$

式中:  $k_T^{(21)}$ 、 $k_B^{(21)}$  分别为两曲面的诱导主曲率, 它们描述了两曲面相对弯曲的最大值和最小值.

式 (9) 即为诱导法曲率的 Euler 公式. 由微分几何学<sup>[4]</sup> 可知, 诱导主方向的位置由下式确定:

$$\tan 2h = \frac{2 f_g^{(21)}}{k_{nT}^{(21)} - k_{nB}^{(21)}} \quad (10)$$

诱导主曲率可由下面一元二次方程的根确定:

$$k_n^{(21)2} - 2H^{(21)} k_n^{(21)} + K^{(21)} = 0 \quad (11)$$

式中:  $K^{(21)} = k_T^{(21)} \cdot k_B^{(21)} = k_{nT}^{(21)} \cdot k_{nB}^{(21)} - f_g^{(21)2}$ , 称为诱导总曲率;  $H^{(21)} = (k_T^{(21)} + k_B^{(21)}) / 2 = (k_{nT}^{(21)} + k_{nB}^{(21)}) / 2$ , 称为诱导平均曲率.

在这一框架下, 两曲面的二阶离差可以表示为

$$h_2^{(21)} = \frac{1}{2} k_n^{(21)2} e^2 \quad (12)$$

从式 (12) 可以看出, 诱导法曲率可以完全表达二阶离差. 诱导法曲率是说明点邻域二阶接触的重要不变量. 据此, 可以给出两曲面在一阶点接触范围内更细致的分类.

(1) 椭圆型接触: 诱导总曲率  $K^{(21)} > 0$

两个诱导主曲率同号, 表明两曲面在接触点邻域内离差“恒正”, 即两曲面点性接触.

(2) 抛物型接触: 诱导总曲率  $K^{(21)} = 0$

两个诱导主曲率之一为零, 在为零的主方向上两曲面有二阶接触, 与它正交的非零的主方向上“欠切”最大, 即两曲面线性接触.

(3) 双曲型接触: 诱导总曲率  $K^{(21)} < 0$

两个诱导主曲率异号, 离差在正负之间变化, 可以称为干涉性接触, 在工程上不存在这种情况.

上面讨论了在点邻域一阶接触的三种类型, 当  $h^{(21)} \equiv$  三阶小量时, 称为两曲面在点邻域内二阶接触. 其条件为  $k_n^{(21)} \equiv 0$ , 由式 (9) 可知, 该条件等价于  $k_T^{(21)} = k_B^{(21)} = 0$  或诱导总曲率、诱导平均曲率都为零, 这种情形表示点邻域内的“面性接触”, 对于“面性接触”的两曲面, 其几何残留高度可用三阶离差来表示, 它与诱导法曲率的导数有关, 详见下文.

## 2 曲面的线接触

曲面的线接触属于高副机构中的术语, 从几何上讲, 它是两曲面相互连接的一种方式. 线接

触指两曲面在一条曲线上相互连接, 如果该曲线为两曲面所共有, 并在该曲线上存在公共法线, 则称两曲面在该曲线上一阶接触, 即相切. 前面讨论的“线性接触”是指在点邻域内某一方向的诱导主曲率等于零; 而“线接触”则是指在接触线的各点均为线性接触, 这种连接方式的特点是两曲面在接触线上不但相切, 而且在接触线方向上两曲面为无穷阶接触, 即在接触线方向上两曲面具有公共的法曲率、测地曲率、测地挠率. 如图 3 所示, 若将标架建立在接触线  $C$  上,  $T$  为接触线的切线,  $e_3$  为公共法矢,  $B = e_3 \times T$ . 由于接触线的切线方向为诱导主曲率方向之一, 在  $T$  方向上诱导法曲率  $k_T^{(21)} \equiv 0$  诱导测地曲率  $k_g^{(21)} \equiv 0$  诱导测地挠率  $f_g^{(21)} \equiv 0$ , 其各阶导数均等于零, 由此可以看出两曲面在接触线的各点处都是抛物型接触, 即  $K^{(21)} = 0$ . 线接触的曲面在接触线带状邻域内其诱导法曲率为

$$k_n^{(21)} = k_B^{(21)} \sin^2 h \quad (13)$$

两曲面的二阶离差为

$$h_2^{(21)} = \frac{k_B^{(21)} \sin^2 h e^2}{2} = \frac{k_B^{(21)} e_B^2}{2} \quad (14)$$

式中:  $e_B = e_{\sin h}$  为切平面内  $B$  方向上的弧微分.

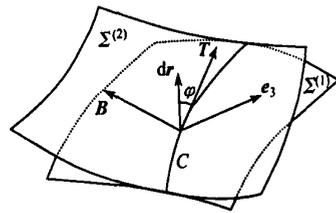


图 3 两曲面的线接触

Fig. 3 The line contact of two surfaces

当离差给定时, 由式 (14) 可以估算出加工的带宽

$$W = 2e_B = 2 \sqrt{\frac{2h_2^{(21)}}{k_B^{(21)}}} \quad (15)$$

式 (14) 表明: 线接触的两曲面最大离差方向为  $B$  方向, 离差  $h_2^{(21)}$  为二阶小量, 说明两曲面为一阶接触. 两曲面的二阶线接触条件为  $k_n^{(21)} = 0$ , 该条件等价于  $K^{(21)} = 0$   $H^{(21)} = 0$ , 实际上这一条件相当于两曲面在接触线上具有相同的主曲率和主方向.

证明 如图 4 所示,  $\{P-e^{(1)} e_2^{(1)} e_3^{(1)}\}$  为曲面  $E^{(1)}$  的 Frenet 标架,  $\{P-e^{(2)} e_2^{(2)} e_3^{(2)}\}$  为曲面  $E^{(2)}$  的 Frenet 标架,  $e_3^{(1)}$  与  $e_3^{(2)}$  重合. 由于  $k_T^{(21)} = 0$ , 根据

Euler公式可知

$$k_1^{(1)} \cos^2 W_1 + k_2^{(1)} \sin^2 W_1 = k_1^{(2)} \cos^2 W_2 + k_2^{(2)} \sin^2 W_2 \quad (16)$$

同理,由  $k_B^{(21)} = 0$  可知

$$k_1^{(1)} \sin^2 W_1 + k_2^{(1)} \cos^2 W_1 = k_1^{(2)} \sin^2 W_2 + k_2^{(2)} \cos^2 W_2 \quad (17)$$

由于  $k_{BT}^{(21)} = 0$ ,由文献 [4]可知在曲面的 Frenet 标架内有下式成立:

$$(k_1^{(1)} - k_2^{(1)}) \cos W_1 \sin W_1 = (k_1^{(2)} - k_2^{(2)}) \cos W_2 \times \sin W_2 \quad (18)$$

将式 (16) 与式 (17) 相减,可得

$$(k_1^{(1)} - k_2^{(1)}) \cos 2W_1 = (k_1^{(2)} - k_2^{(2)}) \cos 2W_2 \quad (19)$$

将式 (18) 与式 (19) 联立,可得

$$\tan 2W_1 = \tan 2W_2 \quad (20)$$

由此可得

$$W_1 = W_2 \text{ 或 } W_1 = W_2 + \pi/2 \quad (21)$$

由式 (21) 可知两曲面的主方向必定重合,将式

(21) 代入式 (16) 则得

$$k_1^{(1)} = k_1^{(2)}, k_2^{(1)} = k_2^{(2)} \quad (22)$$

证毕.

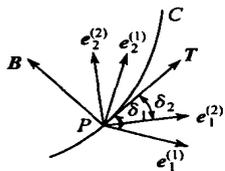


图 4 接触线上曲面的标架

Fig. 4 Frenet frames of surfaces at contact line

由此可见,两曲面呈二阶接触的条件为:在接触线上两曲面具有相同的主方向和主曲率.这样才能保证两曲面的面性接触,即  $E^{(1)}$ 、 $E^{(2)}$  以  $C$  为中心形成一带状区域,并且完全贴合.进一步,要讨论二阶接触条件下的离差,需要讨论三阶离差的大小,其表达式为

$$h_3^{(21)} = \frac{(d^3 r^{(2)} - d^3 r^{(1)}) \cdot e_3}{6} \quad (23)$$

对式 (13) 微分,可得

$$(d^3 r^{(2)} - d^3 r^{(1)}) \cdot e_3 + (d^2 r^{(2)} - d^2 r^{(1)}) \cdot de_3 = dk_B^{(21)} \sin^2 h + 2k_B^{(21)} \cos h \sin h dh \quad (24)$$

在过  $P$  点的法截面内讨论两曲面的三阶离差,由文献 [7]可知

$$(d^2 r^{(2)} - d^2 r^{(1)}) \cdot de_3 = 0 \quad (25)$$

因此式 (24) 可以表示为

$$(d^3 r^{(2)} - d^3 r^{(1)}) \cdot e_3 = [k_{BT}^{(21)} \sin^2 h e_T + k_{BB}^{(21)} \sin^2 h \times$$

$$e_B] + 2k_B^{(21)} \sin h \cos h dh \quad (26)$$

由于两曲面二阶密切,  $k_B^{(21)} = 0$ ,同时由于在接触线方向上两曲面无穷阶接触,  $k_{BT}^{(21)} = 0$ ,因此式 (23) 可进一步化简为

$$h_3^{(21)} = \frac{k_{BB}^{(21)} \sin^3 h e^3}{6} = \frac{k_{BB}^{(21)} e_B^3}{6} \quad (27)$$

式中:  $k_{BB}^{(21)}$  为  $k_B^{(21)}$  在  $B$  方向的协变导数.

式 (27) 给出了两曲面在二阶密切条件下三阶离差的表达形式,它是关于  $e_B$  的立方抛物线,如图 5 所示,  $k_{BB}^{(21)}$  决定了立方抛物线的弯曲程度,上面分析表明在二阶密切条件下,两曲面仍存在三阶干涉,最大干涉量发生在垂直于进给方向的法截面内.

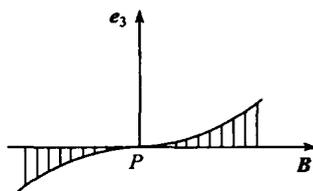


图 5 三阶离差

Fig. 5 The third order remained error

### 3 等距面的特性与其接触问题

如图 6 所示,已知一曲面  $E^{(1)}$ :  $r^{(1)} = r^{(1)}(u_1, v_1)$ ,  $u_1, v_1$  为曲面参数,在  $E^{(1)}$  上的任一点  $P$  设定 Frenet 标架  $\{P-e_1, e_2, e_3\}$ ,  $e_1, e_2$  为曲面  $E^{(1)}$  上  $P$  点处的两个主方向,  $e_3$  为曲面上该点处的单位法矢.在曲面  $E^{(1)}$  的各点法线上截取相同的长度  $a$ ,则得一新的曲面  $E^{(1*)}$ ,其方程为

$$r^{(1*)} = r^{(1)}(u_1, v_1) + ae_3 \quad (28)$$

$E^{(1)}$ 、 $E^{(1*)}$  形成了一等距面偶,式 (28) 给出了等距面之间的映射关系,下面讨论等距面之间的尺度特性,对式 (28) 求微

$$dr^{(1*)} = dr^{(1)} + ade_3 = e_1(e_1 + ak_2) + e_2(e_2 - ak_1) \quad (29)$$

$$k_1 = k_2^{(1)} e_2, k_2 = -k_1^{(1)} e_1 \quad (30)$$

式中:  $e_1, e_2$  分别为曲面  $E^{(1)}$  上  $P$  点处沿  $e_1, e_2$  的弧微分;  $k_1, k_2$  分别为绕  $e_1, e_2$  的无穷小回转量;  $k_1^{(1)}, k_2^{(1)}$  分别为曲面  $E^{(1)}$  上  $P$  点处的两个主曲率.

式 (29) 表明,  $dr^{(1*)}$  为  $e_1, e_2$  的线性组合表达式,即  $dr^{(1*)}$  一定在  $E^{(1)}$  的切平面内,  $E^{(1)}$  与  $E^{(1*)}$  在  $P$  点具有相同的切平面和公共的法矢,这是等距面的一个重要性质.

将式 (30) 代入式 (29), 可得

$$dr^{(1^*)} = e_1(1 - ak_1^{(1)})e_1 + e_2(1 - ak_2^{(1)})e_2 \quad (31)$$

由于  $E^{(1)}$  与  $E^{(1^*)}$  形成等距面偶, 在对应点处具有公共法矢, 若选  $E^{(1^*)}$  的标架与  $E^{(1)}$  的标架相同, 则有

$$dr^{(1^*)} = e_1\tilde{e}_1 + e_2\tilde{e}_2 \quad (32)$$

比较式 (31) 与式 (32), 可得

$$\tilde{e}_1 = (1 - ak_1^{(1)})e_1, \quad \tilde{e}_2 = (1 - ak_2^{(1)})e_2 \quad (33)$$

式 (33) 表明等距面  $E^{(1^*)}$  的尺度不变量可以用已知曲面  $E^{(1)}$  的尺度不变量来表达. 设已知曲面  $E^{(1)}$  上给定一曲线  $C$ , 在其等距面  $E^{(1^*)}$  将得到一映射曲线  $C^*$ , 在同一个标架系统内两曲线在对应点处的切矢具有如下关系:

$$\tan \tilde{h} = \frac{\tilde{e}_2}{\tilde{e}_1} = \frac{(1 - ak_2^{(1)})e_2}{(1 - ak_1^{(1)})e_1} = \frac{(1 - ak_2^{(1)})}{(1 - ak_1^{(1)})} \tan h \quad (34)$$

式中:  $h$  为曲线  $C$  的切线方向与  $e_1$  之间的夹角;  $\tilde{h}$  为曲线  $C^*$  的切线方向与  $e_1$  之间的夹角.

上式表明等距面上映射曲线  $C^*$  的切线方向与原曲面上曲线  $C$  的切线方向有所变化, 变化的大小取决于原曲面上  $P$  点处的两个主曲率的大小.

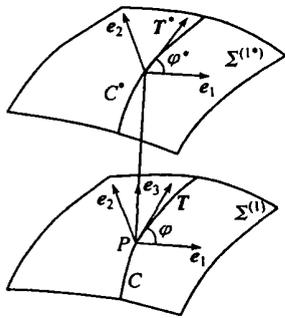


图 6 等距面的特性

Fig. 6 Characteristics of offset surfaces

下面讨论两曲面二阶密切时其等距面的接触状况. 若两曲面  $E^{(1)}$  与  $E^{(2)}$  在  $P$  点二阶密切, 由前面的分析可知: 曲面  $E^{(1)}$  与  $E^{(2)}$  在  $P$  点具有相同的主曲率和主方向. 由于等距面与原曲面的主曲率具有如下关系:

$$k_1^{(1^*)} = \frac{k_1^{(1)}}{1 - ak_1^{(1)}}, \quad k_1^{(2^*)} = \frac{k_1^{(2)}}{1 - ak_1^{(2)}} \quad (35)$$

将式 (22) 与式 (35) 联立则有

$$k_1^{(1^*)} = k_1^{(2^*)}$$

同理, 可得  $k_2^{(1^*)} = k_2^{(2^*)}$ .

又由于等距面在对应点处主方向相同的性质, 则其等距面  $E^{(1^*)}$  与  $E^{(2^*)}$  在  $P$  点也具有相同的主曲率和主方向, 即  $E^{(1^*)}$  与  $E^{(2^*)}$  也二阶密切.

现在来看原曲面上的三阶离差和等距面上三阶离差之间的关系, 由两曲面二阶密切的条件可知, 两曲面在对应点处具有相同的主曲率和主方向, 若选曲面的 Frenet 标架, 则等距面的主方向与原曲面的主方向相同. 由文献 [7] 可知两密切曲面  $E^{(1^*)}$  与  $E^{(2^*)}$  的诱导法曲率的微分可表示为

$$dk_n^{(2^* 1^*)} = k_{11}^{(2^* 1^*)}\tilde{e}_1^3 + 3k_{12}^{(2^* 1^*)}\tilde{e}_1^2\tilde{e}_2 + 3k_{21}^{(2^* 1^*)}\tilde{e}_1\tilde{e}_2^2 + k_{22}^{(2^* 1^*)}\tilde{e}_2^3 \quad (36)$$

式中:  $k_{11}^{(2^* 1^*)}$ 、 $k_{12}^{(2^* 1^*)}$  分别为诱导法曲率  $k_1^{(2^* 1^*)}$  在  $e_1$ 、 $e_2$  方向上的协变导数;  $k_{21}^{(2^* 1^*)}$ 、 $k_{22}^{(2^* 1^*)}$  分别为诱导法曲率  $k_2^{(2^* 1^*)}$  在  $e_1$ 、 $e_2$  方向上的协变导数.

由式 (22)、(35) 知, 曲面  $E^{(1^*)}$  与  $E^{(2^*)}$  沿  $e_1$  方向的诱导法曲率为

$$k_1^{(2^* 1^*)} = k_1^{(21)} / (1 - ak_1^{(1)})^2 \quad (37)$$

将式 (37) 对  $\tilde{e}_1$  求导并结合式 (33), 可得

$$k_{11}^{(2^* 1^*)} = k_{11}^{(21)} / (1 - ak_1^{(1)})^3 \quad (38)$$

同理可求得

$$k_{12}^{(2^* 1^*)} = \frac{k_{12}^{(21)}}{(1 - ak_1^{(1)})^2(1 - ak_2^{(1)})},$$

$$k_{21}^{(2^* 1^*)} = \frac{k_{21}^{(21)}}{(1 - ak_1^{(1)})(1 - ak_2^{(1)})^2},$$

$$k_{22}^{(2^* 1^*)} = \frac{k_{22}^{(21)}}{(1 - ak_2^{(1)})^3} \quad (39)$$

将式 (38)、(39) 代入式 (36), 可得

$$dk_n^{(2^* 1^*)} = dk_n^{(21)} \quad (40)$$

由式 (40) 可知, 原曲面和等距面上的三阶离差大小相等, 也就是说, 两曲面若二阶密切后, 不但能保证其等距面二阶密切, 而且两个原曲面与其等距面之间的三阶离差大小也相同. 因此完全可以在等距面上规划刀位和计算几何残留误差.

## 4 结 论

(1) 诱导法曲率是描述两曲面间接触状况的重要几何不变量, 对于点接触给出了二阶离差的计算公式, 同时给出了两曲面在一阶点接触的范围内更细致的 3 种分类: 点性接触、线性接触和面性接触.

(2) 对于线接触情况, 证明了两曲面呈二阶接触的条件为两曲面在接触线上具有相同的主方向和主曲率, 研究表明在二阶密切条件下, 两曲面

仍存在三阶干涉,最大干涉量发生在垂直于进给方向的法截面内,同时给出了三阶离差的计算公式.

(3) 对于原表面上的一条曲线,其等距面上映射曲线的切线方向与原表面上曲线的切线方向有所变化,变化的大小取决于原表面上讨论点的两个主曲率的大小.证明了两曲面若二阶密切,则其等距面也能保证二阶密切,而且原曲面的三阶离差与等距面上的三阶离差大小也相同.

### 参考文献:

- [1] BAXTER M L. Second-order surface generation [J]. *J Ind Math*, 1973, **23**(2): 85-106
- [2] LITVIN F L, CHEN N X, CHEN J S. Computerized determination of curvature relations

- and contact ellipse for conjugate surfaces [J]. *Comput Methods Appl Mech and Eng*, 1995, **125**: 151-170
- [3] YAN Hong-sen, CHENG Wen-teng. Curvature analysis of spatial cam-follower mechanisms [J]. *Mech and Mach Theory*, 1999, **34**: 319-339
- [4] 佐佐木重夫. 微分几何学 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1963
- [5] 吴大任. 微分几何讲义 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1981
- [6] 王小椿, 吴序堂, 李艳斌. 密切曲率法——一种自由曲面加工的新概念 [J]. *西安交通大学学报*, 1992, **26**(5): 51-58
- [7] 曹利新, 吴宏基, 刘健. 基于五坐标数控圆柱形刀具线接触加工自由曲面的几何学原理 [J]. *机械工程学报*, 2003, **39**(7): 134-137

## Research on contact problem of surfaces and contact characteristics of offset surfaces

CAO Li-xin\*, GONG Hu, LIU Jian

( School of Mech. Eng. , Dalian Univ. of Technol. , Dalian 116024, China )

**Abstract** Based on differential geometry, the contact problems of two surfaces are discussed. The relationships between the contacting status of the two surfaces and that of the offset surfaces are also analyzed. These content will play an important role in the research of 5-axis NC machining, such as the optimization of cutter location, the calculation of the geometrical cusp height, etc. . The results of the research indicate that the relative normal curvature is an important geometrical invariant, which can be used for describing the contacting status of the two surfaces. As for the point contact two surfaces, the calculating equation of the second order remained error is given. And for the line contact two surfaces, the condition of the second order line contact is that the principal directions and curvatures of the two surfaces are the same along the contact curve. It is also proved that if the two surfaces keep the second order line contact, the offset surfaces of the two surfaces will also keep the second order line contact. And the third order remained errors of the two surfaces are also uniform with that of the two offset surfaces.

**Key words** point contact; line contact; relative curvature (induced curvature); cusp height; offset surface