

船舶、土木工程

文章编号: 1000-8608(2007)01-0057-04

一种改进的结构可靠度分析中响应面法

张哲*, 李生勇, 滕启杰

(大连理工大学 土木水利学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 在实际工程结构的可靠度分析中, 极限功能函数通常很难用明确的表达式表达, 响应面法因其自身的优点得到了广泛的应用. 为进一步提高求解效率, 提出了一种改进措施, 在迭代求解过程中, 不同于通常的每次都在插值点处展开 $2n+1$ 个样本点, 而是用插值点逐步替代距离极限状态曲面最远的点, 直至收敛到给定的精度要求. 通过算例进行的对比分析证明, 改进的响应面法在没有降低计算精度的前提下, 使有限元分析次数显著减少. 该方法尤其适用于大型复杂结构的可靠度分析.

关键词: 结构可靠度; 响应面法; 极限功能函数; 插值点; 极限状态曲面

中图分类号: TU311.2 **文献标识码:** A

0 引言

在结构可靠性分析中, 一次二阶矩法及其改进方法都是针对功能函数能够明确表达的结构. 对于复杂结构而言, 常难以写出功能函数的显式形式. 以 Monte Carlo 方法为基础的各种数值模拟方法在处理复杂结构的极限功能函数方面有其相当的优点, 但对于实际工程的结构失效概率通常小于 10^{-3} 以下量级的范畴时^[1], 虽然随着高速计算机的发展和数值模拟方法的改进, 数值模拟工作量仍然很大. 随机有限元方法是另一种手段, 但是需要对确定性结构分析程序加以改造, 要形成一个通用的随机有限元程序来描述工程实际中各种随机性, 目前尚有一定困难. 值得指出的是文献 [2] 提出了一种结构可靠指标通用计算方法, 该方法也无需知道功能函数的明确表达. 响应面法由于其可以直接利用已经广泛应用的确定性有限元分析程序, 通过对二次多项式系数的迭代调整来近似模拟真实极限状态曲面, 一般都能满足实际工程精度要求, 具有较高的效率, 是一个很有发展前景的计算方法^[3].

但是, 以往响应面法在进行每步迭代过程中, 样本点 (输入) 都是依据插值点展开得到的, 通过 $2n+1$ 次确定性的有限元分析, 计算出结构的响

应 (输出), 形成 $2n+1$ 个方程. 在应用 ANSYS SAR ADINA 等大型有限元结构分析程序进行计算分析时非常耗时, 而且比较麻烦. 本文在已有的响应面方法基础上进行一些改进, 在迭代模拟极限状态曲面过程中, 将距离真实极限状态曲面验算点处较近的好的样本点保留, 逐渐剔除距离极限状态曲面验算点处较远的不好的样本点, 直至收敛到真实极限状态曲面 (小于给定精度). 通过改进使有限元分析次数减少, 并很快收敛到能够反映真实极限状态曲面的响应面, 同时确定验算点及可靠指标.

1 响应面法

响应面法 (response surface method, RSM) 最早是由 Box 和 Wilson 于 1951 年提出来的. 就是通过一系列的确定性的“试验”拟合一个响应面来模拟真实极限状态曲面. 将响应面法应用到结构可靠性分析中, 基本思想是假设一个包括一些未知参量的极限状态函数与基本变量之间的解析表达式 (通常用不含交叉项的二次多项式) 代替实际的不能明确表达的结构极限状态函数, 从而很容易利用一次二阶矩法或者几何法求解可靠指标. 结构响应 Z 与变量 X_1, X_2, \dots, X_n 具有未知

收稿日期: 2005-06-10; 修回日期: 2006-12-10.

作者简介: 张哲* (1944-), 男, 教授, 博士生导师.

的、不能明确表达的函数关系 $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$. 要得到这个“真实”的函数关系通常需要大量的模拟, 而响应面则是用有限的试验来回归拟合一个关系 $Z = \bar{g}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 以代替真实极限状态曲面 $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 应用于可靠度分析中. 选择响应面表达式的形式时, 对 n 个随机变量 x_1, x_2, \dots, x_n 情况, 文献 [4] 建议取不含交叉项的二次多项式:

$$Z = \bar{g}(X) = a + \sum_{i=1}^n b x_i + \sum_{i=1}^n a x_i^2$$

其中 $a, b, a(i = 1, 2, \dots, n)$ 为待定因子.

响应面方法是一项统计学的综合试验技术, 用于处理多个变量对一体系或结构的作用问题, 也就是体系或结构的输入 (变量值) 与输出 (响应) 的转换关系问题. 国外许多学者对响应面法进行了研究: Bucher 和 Bourgund 建议的迭代内插技术具有很好的效率^[4]; 文献 [5] 探讨了其精度.

1 改进的结构可靠度分析响应面法

在工程实际中许多极限状态方程不能用明确的表达式表示, 因此直接采用结构可靠度分析中的几何法就会遇到困难. 应用响应面法的近似极限状态方程, 就可以很容易地使用几何法求解验算点和可靠指标. 极限状态曲面是近似的, 因此需要迭代求解. 具体步骤如下:

(1) 假定初始点 $X^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_i^1, \dots, x_n^1)$, 一般取均值点.

(2) 计算功能函数 $G(x_1^1, x_2^1, \dots, x_i^1, \dots, x_n^1)$ 以及 $G(x_1^1, x_2^1, \dots, x_i^1 \pm f \xi_{x_i}, \dots, x_n^1)$ 得到 $2n+1$ 个点的估计值. 其中 f 为任意值, ξ 为随机变量 x_i 的标准差.

(3) 由于响应面表达式中只有 $2n+1$ 个待定因子, 利用这 $2n+1$ 个点估计值便可确定待定因子 $a, b, a(i = 1, 2, \dots, n)$, 得到以二次多项式表达的近似功能函数, 从而确定极限状态方程.

(4) 用结构可靠度分析中几何法求解验算点 x_d^k 和可靠指标 U^k , 其中上标 k 表示第 k 步迭代.

(5) 计算 $|U^k - U^{k-1}| < X$ (给定精度). 如果条件满足则计算失效概率 $P_f = Q(-U^k)$, 输出 P_f 及 U^k , 计算结束; 如果条件不满足, 则用插值得到新的展开点 $X_m^k = X^k + (X_d^k - X^k) \times$

$\frac{G(X^k)}{G(X_d^k) - G(X^k)}$, 此插值点可使 X_m^k 较快地接近

真实极限状态曲面^[4].

(6) 重复 (2) ~ (5) 过程, 在返回 (2) 进行下一步迭代时, 为充分利用每个有限元的计算结果, 加入判断条件: 当迭代步 $k \geq 3$ 时, 将 X_m^k 插值点与 $(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \dots, x_i^{k-1}, \dots, x_n^{k-1})$ 以及 $(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \dots, x_i^{k-1} \pm f \xi_{x_i}, \dots, x_n^{k-1})$ $2n+1$ 个点作比较, 并用 X_m^k 点替换与其距离最远的点, 共同组成 $2n+1$ 个点计算待定因子, 而不是以通常在 X_m^k 插值点处展开的点, 进行下一轮迭代. 这样, 可以充分利用有限元程序所分析的结果.

需要说明的是, 随机变量 X 如果不服从正态分布或相关, 应该将其当量正态化且映射到独立随机变量空间中^[6]. 在步骤 (2) 中关于 f 取值, 根据工程中的 3 σ 原则, 第一次展开时 f 取 3, 而在以后的迭代过程中 f 取 1^[7]. 另外, 在计算过程中, 由于输入 (样本) 到输出 (响应) 之间存在二次非线性的映射关系, 可能会使输出比较离散, 本文将输出作了归一化变换, 将其映射到 0.2 ~ 0.8 内^[8], 这对于可靠指标的计算精度也起到了一定的改善作用.

2 算 例

为了便于说明和比较改进的响应面法的计算效率和精度, 在例 1 例 2 和例 3 中极限状态方程是非线性程度较高的明确表达式, 例 4 是对于极限状态方程不能明确表达的算例.

例 1 极限状态方程 $Z = x_1^3 + x_2^3 - 4.0$, 其中随机变量 $x_1 \sim N(3.0, 1.0), x_2 \sim N(2.9, 1.0)$.

例 2 极限状态方程 $Z = \exp(1 + x_1 - x_2) + \exp(5 - 5x_1 - x_2) - 1$, 其中随机变量 x_1, x_2 均服从标准正态分布.

例 3 极限状态方程 $Z = 18.46154 - 74.769.23x_1 kx_2^3$, 随机变量 $x_1 \sim N(1000.0, 200.0) \text{ kN}, x_2 \sim N(250.0, 37.5) \text{ mm}$.

例 4 图 1 为某三跨十二层建筑的平面框架结构计算简图. 各单元的弹性模量均为 $E = 2.0 \times 10^7 \text{ kPa}$, 单元截面惯性矩与截面面积的关系为 $I_i = \tau A_i^2 (i = 1, 2, \dots, 5)$. 各单元的截面特征 截面面积 A_i 以及外荷载 P 的统计特征见表 1. 极限状态方程 $Z = 0.096 - u_A = 0$. 计算结果见表 2.

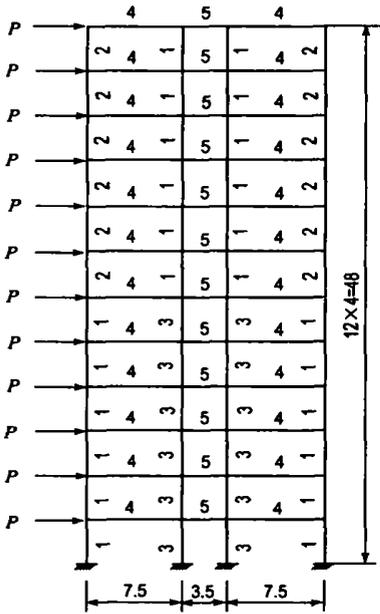


图 1 算例 4 计算简图

Fig. 1 Calculation model of Example 4

表 1 例 4 随机变量统计参数表

Tab. 1 Parameters of random variables (Example 4)

单元 类型号	T_i	\bar{A}_i / m^2	W_{A_i}	概率分布 类型
1	0.083 33	0.25	0.1	对数正态
2	0.083 33	0.16	0.1	对数正态
3	0.083 33	0.36	0.1	对数正态
4	0.266 70	0.20	0.1	对数正态
5	0.200 00	0.15	0.1	对数正态
P / kN		30.0	0.25	极值 I 型

表 2 计算结果比较

Tab. 2 Comparison of calculation results

方法	算例 1					算例 2				
	可靠 指标	失效 概率 %	验算点	迭代 次数	有限元 计算次数	可靠 指标	失效 概率 %	验算点	迭代 次数	有限元 计算次数
文献 [2]	2.390 9	0.840 35	—	5	20	2.299 5	1.073 80	—	13	52
文献 [7]	2.395 2	0.830 56	(1.272 1, 1.241 3)	6	35	2.332 3	0.984 24	(0.863 5, 2.166 6)	10	59
本文	2.390 9	0.840 35	(1.273 3, 1.246 2)	9	17	2.299 5	1.073 80	(0.862 8, 2.131 6)	28	36
方法	算例 3					算例 4				
	可靠 指标	失效 概率 %	验算点	迭代 次数	有限元 计算次数	可靠 指标	失效 概率 %	验算点	迭代 次数	有限元 计算次数
文献 [2]	2.331 2	0.987 13	—	12	48	1.454 3	7.293 5	—	6	72
文献 [7]	2.334 4	0.978 73	(1.101. 138, 164. 533)	8	47	1.453 7	7.301 8	(0.243 3, 0.158 0) (0.352 9, 0.191 5) (0.147 4, 40.726 6) (0.243 4, 0.158 0)	3	69
本文	2.335 6	0.975 60	(1.082. 254, 163. 783)	21	29	1.450 5	7.346 3	(0.352 9, 0.191 7) (0.147 4, 40.737 1)	5	41

3 结 论

对于工程中常见的功能函数不能明确表达的情况,采用二次多项式的响应面法进行结构可靠

度分析,较其他方法更为简便.本文在响应面法与几何法相结合的基础上加以改进.通过在迭代求解极限状态方程时引入判断条件,使距离极限状态曲面验算点处较近的好的样本点得以保留,

逐渐取代离极限状态曲面验算点处较远的不好的样本点,而不是每次在插值点处重新展开生成样本点. 由计算结果可见,在达到相同精度的情况下,本文方法迭代次数较多,但确定性的有限元计算次数显著减少. 这样在大型复杂结构的可靠度计算中提高了计算效率,具有一定的实际应用意义.

参考文献:

- [1] 赵国藩,金伟良,贡金鑫. 结构可靠度理论 [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000
- [2] 贡金鑫,仲伟秋,赵国藩. 结构可靠指标计算的通用方法 [J]. 计算力学学报, 1993, 20(1): 12-18
- [3] 赵国藩. 工程结构可靠性理论与应用 [M]. 大连: 大

连理工大学出版社, 1996

- [4] BU CHER C G, BOURGUND U. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems [J]. *Struct Safety*, 1990, 7(1): 57-66
- [5] RAJASHEKHAR M R, ELLINGWOOD B R. A new look at the response surface approach for reliability [J]. *Struct Safety*, 1993, 12(3): 205-220
- [6] 李国强,李继华. 二阶矩矩阵法—关于相关随机向量的结构可靠度计算 [J]. 重庆建筑工程学院学报, 1987, 27(1): 56-67
- [7] 佟晓利,赵国藩. 一种与结构可靠度几何法相结合的响应面法 [J]. 土木工程学报, 1997, 30(4): 51-57
- [8] 梁化楼,戴贵亮. 人工神经网络与遗传算法的结合: 进展与展望 [J]. 电子学报, 1995, 10(23): 194-200

An improved response surface method for structural reliability analysis

ZHANG Zhe^{*}, LI Sheng-yong, TENG Qi jie

(School of Civil and Hydraul. Eng., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China)

Abstract For reliability analysis of large and complex structural systems problems, response surface method (RSM) is widely used to simulate the limit performance function which is unknown. To increase the calculation efficiency, a new improved method is proposed, in which the group of sample points ($2n+1$ points) are replaced one by one by interpolation points in the iterative process until the convergence condition is met. In every iteration step, only one point, that is of the largest distance between it and interpolation point, is replaced. Consequently, the response surfaces make full use of every sample point that is calculated by finite element method program. Examples are given to demonstrate that the proposed method enhances the calculation efficiency greatly, especially for reliability analysis of large and complex structure.

Key words structural reliability; response surface method; limited performance function; interpolation point; limit state surface