

关于非线性非局部应变梯度模型的探讨

王忠昶^{1,2}, 栾茂田*^{1,2}, 杨庆^{1,2}

(1. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;

2. 大连理工大学 土木水利学院 岩土工程研究所, 辽宁 大连 116024)

摘要: 考虑线性软化模型不能反映材料软化变形复杂性的不足, 选取高斯正态分布函数作为非局部理论的权函数, 同时采用指数型应力衰减模式考虑软化的非线性特征, 进一步地将这种非线性非局部理论与采用 Laplace 算子考虑塑性应变梯度效应的塑性梯度理论相结合, 建议了一种非线性非局部应变梯度模型, 并据此针对各向同性单向拉伸杆的力学响应进行了分析, 将计算结果与线性软化模型进行了对比. 结果表明: 在非线性软化模型中, 尽管塑性应变分布形式与线性软化模型的相同, 但塑性应变同时依赖于应力降与破坏极限应变, 两者最大应变是不同的.

关键词: 非线性; 非局部化; 应变梯度; 软化
中图分类号: TU417.1 **文献标识码:** A

0 引言

经典的塑性理论认为, 硬化是材料的自然属性, 对于软化并没有给予足够的重视. 然而许多工程材料在外部荷载作用下经一定的塑性变形后, 会出现随着荷载的降低而应变继续增加的软化现象. 例如, 岩土材料在剪应力作用下会出现剪切软化, 混凝土在拉应力作用下会出现拉裂软化. 在工程材料应变软化过程中, 通常一种限定在一定宽度内的急剧不连续位移梯度可能代替原先连续分布的变形模式, 并随之萌生裂纹, 这种现象称为应变局部化. 此时局部化带内表现为塑性加载, 而局部化带外为弹性卸载. 塑性应变理论和非局部理论自 1984 年首次应用于分析这种应变软化问题, 经过不断的完善与发展, 已经形成了多种非局部模型. 但是, 目前一般主要考虑的线性软化情况^[1-8]并不能准确地反映软化材料的实质. 为此, 本文采用指数曲线对线性软化本构方程进行改进, 提出一个非线性的软化本构方程, 并以一维杆的简单拉伸问题, 运用所建议的本构方程进行实例分析, 以此探讨非线性塑性软化的基本特征, 并与线性软化模型进行对比分析.

1 非局部权函数

由 Eringen^[1]、Kroner^[2]等所建立的非局部理

论认为, 一点的应力状态不仅与该点的应变状态本身有关, 而且取决于其邻域的应变场. 即当在物体某一点处发生了破坏或应变软化, 则应变软化将自该点向其周围延伸, 延伸域的范围取决于材料的非均匀程度, 通常用非均质材料的特征长度表示. 为了在材料本构模型中考虑非局部破坏或应变软化, 采用非局部方式对于场量加以处理, 即将所考虑的空间点的邻域空间内场量的加权平均值代替原先空间点上的局部场量值. 设 $f(x)$ 是域 V 内的一个局部场量, 则相应地非局部场量定义为

$$\bar{f}(x) = \int_V T(x, a) f(a) da \quad (1)$$

式中: $T(x, a)$ 为给定的非局部权函数, 在一个无限小的区域里, 权函数仅仅取决于点 a 和 x 之间的距离, 在边界附近, 为使非局部算子在整个物质场中保持统一性而没有改变, 此时加权函数修正为

$$T(x, a) = \int_V \frac{T(|x - a|)}{T(|x - a|)} da \quad (2)$$

其中 $T(r)$ 为随距离 $r = |x - a|$ 单调递减的非负函数.

通常非局部权函数的选取应满足以下要求:

(a) 在破坏点或应变软化点 x 处, 权值取得

收稿日期: 2005-07-14; 修回日期: 2006-11-30.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10172022); 教育部跨世纪优秀人才培养计划研究基金资助项目 (教技函 [1998]2号).

作者简介: 王忠昶 (1976-), 男, 博士生, E-mail: wazoch@sina.com; 栾茂田* (1962-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, E-mail:

mltuan@dlut.edu.cn; 杨庆 (1964-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, E-mail: qyang@dlut.edu.cn.

其最大值,而在邻域上随着点 a 与点 x 之间相对距离的增大,权值逐渐减小而趋近于 0.

(b) 权函数所描述的分布情况与材料的非均匀性程度有关,从而与材料的特征长度有关.若材料的特征长度越大,软化点的延伸域范围则越大;反之,特征长度越小,延伸域范围则越小,对于完全均匀材料,特征长度为 0,则软化点的延伸域为 0,与局部破坏模型完全一致.

目前, Gauss 分布函数与钟形函数是两种常用的非局部权函数形式. 对于一维、二维和三维问题, Gauss 分布权函数为正态分布^[3],可统一地表达为

$$T_0(r) = \exp\left[-\frac{n_{dim}r^2}{2l^2}\right] \quad (3)$$

式中: l 为材料的内部长度因子; $n_{dim} = 1, 2, 3$, 为空间维数. 而钟形函数可以表达为

$$T(r) = \begin{cases} (1 - r^2/R^2)^2; & 0 \leq r \leq R \\ 0; & R \leq r \end{cases} \quad (4)$$

式中: R 称为影响半径,与内部特征长度有关.

图 1 给出了上述两种权函数的分布形状. 由图可见: 对于 Gauss 分布函数,影响半径为 $R \rightarrow \infty$, 是无边界的,而钟形函数是有限界的. 钟形函数的峰值高于高斯分布函数的峰值,且随着相对距离的增大,衰减加快,在影响半径 R 之外,权函数的影响为 0,而 Gauss 函数在局部化带外仍有微弱影响. 本文选取 Gauss 分布函数作为非局部权函数,在实际计算过程中,通常忽略 Gauss 分布函数的高阶微量.

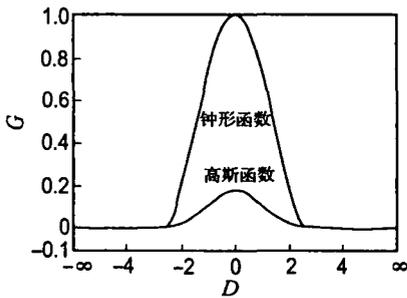


图 1 两种权函数的对比

Fig. 1 Comparison of two types of weighted functions

2 非线性非局部软化方程与梯度塑性理论

在线性各向同性条件下,非局部塑性本构方程的基本形式可以表述为

$$\sigma = E(X - \bar{X}) \quad (5)$$

$$\sigma_y = \sigma_0 + H\bar{K} \quad (6a)$$

$$\bar{X} = \bar{k} \operatorname{sgn} \sigma \quad (7)$$

$$\lambda > 0, f(\sigma - \sigma_y) \leq 0, \lambda f(\sigma, \sigma_y) = 0 \quad (8)$$

式中: σ 与 X 分别为应力与总应变; \bar{X} 为非局部塑性应变; E 为弹性模量; H 为塑性模量 (硬化时为正,软化时为负); σ_y 为加载屈服应力; σ_0 为初始屈服应力; 软化变量 k 选为累积塑性应变 ($k = |X|$),在单向拉伸荷载下, $k = \bar{X}$; λ 为塑性乘子率; $f(\sigma - \sigma_y)$ 为屈服函数. 在非局部软化塑性条件下,上述本构关系中的其他方程没有变化;而式 (6a) 中屈服应力应修改为

$$\sigma_y = \sigma_0 + h(\bar{k}) \quad (6b)$$

式中 $h(\bar{k})$ 为描述屈服应力变化的演化方程,对于线性软化,选取 $h(\bar{k})$ 为一个双直线函数,相应地应力-应变曲线如图 2(a) 所示,当应变为 $\bar{X}_0 = \sigma_0/E$ 时材料开始屈服,屈服应力为 σ_0 ;而当应变超过破坏应变 \bar{X} 时,屈服应力降低为 0,意味着材料完全丧失了强度,不能再承受任何外荷载. 软化规律为 $h(k) = \langle \sigma_0 + Hk \rangle - \sigma_0$,其中正的算子定义为 $\langle x \rangle = \max(0, x)$. $H = -\sigma_0/\bar{X}$ 为负的塑性模量. Vermeer 等^[4]、Stromberg 等^[5]、Planas 等^[6] 联合运用局部变量和非局部软化变量描述软化的总体发展,提出了下列改进的线性软化规律:

$$\bar{k}(x) = (1 - m)k(x) + m \int_V T(x, a)k(a) d^a \quad (9)$$

当 $0 \leq m \leq 1$,该改进模型与基本非局部模型具有相似性质;而当 $m > 1$,塑性区有一个有限的宽度. 对线性和非线性软化规律,在变形过程中塑性区范围 I_p 没有变化,而塑性应变成比例地增长. 因此这里将线性软化模型进行改进,采用下列指数形式描述软化规律的非线性特征:

$$h(\bar{k}) = \sigma_0 [1 - \exp(-\bar{k}/\bar{X})] \quad (10)$$

Aifantis^[7]、De Borst 等^[8]、Pamin^[9]、Rolshoven 等^[10]、Askes 等^[11] 所发展的梯度塑性理论认为,屈服应力不仅依赖于软化变量 k (累积塑性应变),而且也依赖于以 Laplace 算子所表达的软化变量的高阶导数组合或梯度;与经典塑性理论的主要差别在于,梯度塑性理论在材料的屈服模式中考虑了软化参数的梯度,从而使某点的屈服极限不再仅仅取决于该点的软化变量,而且还受到相邻区域内软化变量的影响,任一点的影响域尺度将由所给定的材料内部特征长度决定.

De Borst 等^[8]在应力-应变关系中引入了塑性应变梯度,从而将屈服函数改写为 $F(\epsilon, H, \nabla^2 H) = 0$,其中 H 为硬化/软化参数, $\nabla^2 H$ 为其二阶梯度. 将梯度塑性理论与非局部理论相结合,得到关于非局部软化变量的微分表达式为

$$\bar{k} = k + c \nabla^2 k \quad (11)$$

式中: c 为与内部长度因子成比例的材料常数, n 维空间内的 Laplace 算子定义为

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{n_{dim}} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (12)$$

如果塑性应变在空间上是常量,则其二阶导数消失,非局部屈服函数即为初始的局部屈服函数. 当局部化开始后,二阶梯度项被激活,从而塑性应变局部带将逐渐发展而并不会出现 0 尺度(三维为一个面,二维为一条线,一维为一点)的宽度.

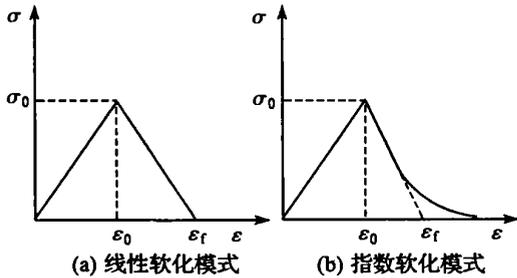


图 2 考虑材料软化特性时杆的单向应力-应变关系

Fig. 2 One-dimensional stress-strain relation of bar with consideration of material softening behavior

3 单轴拉伸实例分析

下面针对一维杆件的简单拉伸问题采用上述模型进行分析,以此考察二阶梯度项对非线性软化的影响. 如图 3 所示,一维均质杆长度与截面积分别为 L 与 A ,在拉伸荷载作用下呈现出各向同性弹塑性软化特性.

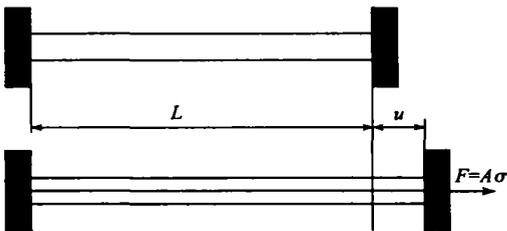


图 3 杆的单轴拉伸示意图

Fig. 3 Bar under uniaxial tension

如图 2(b) 所示,杆件材料的应力-应变关系

为线弹性-塑性指数软化模式,即在施加的正应力达到初始屈服强度之前,整个杆的力学响应是线弹性的,当外荷载达到初始强度时,一些横截面开始发生屈服而其他区域处于弹性卸载状态,假定屈服发生在长度 L_s 的邻近区域. 考虑平衡条件,杆中的应力和应力率必须沿轴向保持一致. 在塑性区域内,应力率必须与当前屈服应力降的比率相等. 将式 (11) 的率形式代入塑性一致性条件

$$f = \dot{\epsilon} - h(\bar{k}) = 0 \quad (13)$$

于是得到关于杆中软化变量的二阶微分方程

$$\dot{\epsilon} - \frac{c_0}{q} \exp\left[-\frac{\bar{k}}{a_1}\right] \left(k + c \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}\right) = 0 \quad (14)$$

式中应力率 $\dot{\epsilon}$ 与空间位置 x 无关,在塑性应变发生的初始时刻, $k = \bar{k} = 0$, 当 $c > 0$ 时,式 (14) 的通解为

$$k(x) = \frac{\dot{\epsilon} q}{c_0} + C \cos \frac{x - x_s}{l} \quad (15)$$

式中 $l = \frac{c}{c_0}$, 为与内部长度有关的常数, C 和 x_s 为积分常数,可以通过边界条件来确定. 累积塑性应变 $k(x)$ 关于空间坐标 x 必须是连续可微的,否则,在屈服函数中其二阶导数将是无界的,从而使解答超出允许的塑性区范围. 通常 $k(x)$ 也必须连续可微. 一致性条件 (13) 仅仅适用于塑性区,在塑性区内 $k(x) > 0$,在弹性区内 $k(x) = 0$,为了保证连续可微性,在弹性与塑性的分界面上, $k(x) = 0$,塑性梯度理论的特征条件不是在物理边界上,而是在未知的弹性-塑性分界面上,以此可以确定积分常数. 在一般的多维情况下,在弹性-塑性分界面上的强制边界条件为

$$\frac{\partial k}{\partial n} = n \cdot \nabla k = 0 \quad (16)$$

式中 n 为分界面的单位法向矢量. 上式确保了软化变量的 C^1 阶连续性,简化了问题的求解.

通过上述分界面条件来推求弹性卸载区域所包围的塑性区内的局部化解,积分常数 C 和 x_s 从界面条件 $k'(x_1) = 0, k'(x_r) = 0$ 解得. x_1 和 x_r 为塑性区内满足界面条件 $k(x_1) = 0, k(x_r) = 0$ 的待定左右边界位置. 将界面条件 $k'(x_1) = 0, k'(x_r) = 0$ 代入 $k(x)$ 的通解,得到 4 个关于 2 个积分常数 C 与 x_s 和弹性-塑性界面坐标 x_1 与 x_r 等 4 个未知量的联立方程.

将按照非局部塑性理论所确定的塑性应变与弹性应变 ϵ_e/E 相叠加得到总应变,图 4 以总应变

的变化对于弹性-塑性分界面条件给予了几何解释. 几何界面条件表明, 函数 $C \cos((x - x_s) / l)$ 与函数 $-e_p / \epsilon_0$ 在几何上必须存在一个共同的水平切线. 在塑性区内, $C \cos((x - x_s) / l)$ 必须在此水平切线上, 这意味着常数 $-e_p / \epsilon_0$ 必须为正, 相当于应力率 $\dot{\epsilon}$ 为负, 且 $C = -e_p / \epsilon_0$, 而 x_s 是任意的. 在点 x_s , 塑性应变率最大, 位于塑性区的中心. 弹性-塑性界面一定位于 $x_l = x_s - \pi l$ 与 $x_r = x_s + \pi l$ 之间, 参数 l 控制了局部化区域的尺寸, 此时塑性区宽度为 $L_s = x_r - x_l = 2\pi l$, 与软化模量 H 无关. 塑性应变率的空间分布与 $C \cos\left(\frac{(x - x_s)}{l}\right)$ 成比例. 图中 $A = -C = -e_p / \epsilon_0$. 从几何上看, 由于积分常数 x_s 的任意性, 这种局部化解并不惟一. 对于远离物理边界的任意塑性区中心位置, 非局部解仅相对于此中心沿着杆的轴向发生变化. 造成解答非惟一性来源于对于材料的高度理想化假设, 即假设材料和几何性质沿着杆的轴向是完全相同的. 此时实际的局部化塑性区位置将由微缺陷决定, 若在求解过程中能够考虑这些缺陷, 在弹性-塑性分界面上必然出现扰动, 则实际的非局部解答将是惟一的. 因此考虑梯度项对局部化解的影响具有现实意义. 在遭受最大的塑性应变的点周围, 软化变量的二阶导数是负的, 软化变量的 Laplace 梯度项使得非局部软化变量 k 显著小于局部软化变量 k . 若软化区域很窄, 应变峰值周围的应变降低曲率很大, 屈服应力比其他点的高. 而实际施加的应力沿杆的轴向相同, 局部化中心周围的截面不能达到屈服, 塑性区域将从侧面产生. 为了减小负曲率的大小, 假设屈服应力为一个常数值.

根据上述解答, 塑性应变为

$$\bar{\epsilon}_p(x) = k(x) = \begin{cases} \frac{e_p}{\epsilon_0} \left[1 + \cos \frac{x - x_s}{l} \right]; & |x - x_s| \leq \pi l \\ 0; & |x - x_s| \geq \pi l \end{cases} \quad (17)$$

塑性应变的分布如图 5 所示. 在 x_s 处塑性应变最大, 并在两侧向外逐渐衰减, 当超出塑性区宽度时, 塑性应变值为 0, 塑性应变的大小依赖于应力降和破坏极限应变, 具体地, 应力降和破坏极限应变越大, 塑性区内塑性应变越大.

与线性软化模型相对比, 指数型的非线性软化模型塑性区宽度和塑性应变分布没有变化, 但塑性应变的大小有所不同, 在线性软化模型与非

线性软化模型中, 最大塑性应变分别为 $(\epsilon - \epsilon_0) / H$ 与 $(\epsilon - \epsilon_0) \alpha / \epsilon_0$, 实际上, 在整个区域内指数型软化模型的衰减程度逐渐趋缓, 即 $|\epsilon - \epsilon_0|$ 逐渐趋向 0, 因此塑性应变也逐渐衰减并趋向稳定, 此后材料将保持一定的残余强度, 直至材料完全丧失承载能力.

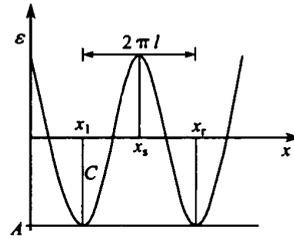


图 4 弹性-塑性界面条件

Fig. 4 Illustration of elasto-plastic interface conditions

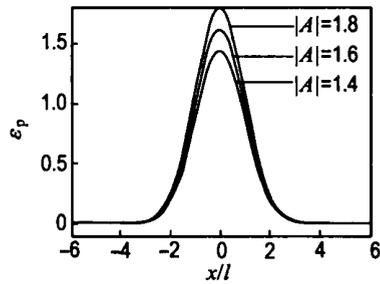


图 5 基于塑性梯度模型的塑性应变分布
Fig. 5 Distribution of plastic strains based on the plastic strain gradient model

4 结 语

本文同时采用以 Gauss 正态分布函数为权函数的非局部化理论与塑性应变梯度理论, 运用指数型软化模式考虑塑性软化的非线性特征, 并以 Laplace 算子引进塑性应变的二阶梯度项, 提出一种非线性非局部应变梯度模型. 通过对一维各向同性均质杆简单拉伸过程的分析, 确定了指数型非线性软化模型的塑性应变分布, 并与线性软化模型的解答进行了对比. 对比分析表明: 指数型非线性软化模式能够更好地反映材料的应变软化特性, 软化后承载力逐渐衰减并趋向稳定, 而线性软化的应力最终降低为 0, 与线性软化模型相对比, 非线性软化模型的局部化带宽度没有变化, 两者均为 $2\pi l$. 在非线性软化模型中, 塑性区内的塑性应变分布中心较大, 并逐渐向两边衰减, 在塑性区外, 塑性应变为 0, 随着软化段的应力降和极限

破坏应变的增大,塑性应变增大. 本文建议的非线性非局部应变梯度模型考虑了岩石类材料受力软化特性,将软化段的本构关系设为指数形式,更符合岩石试件的破坏本质,对于分析岩石类材料的失稳破坏、局部化带的形成和发展具有积极的意义.

参考文献:

- [1] ERINGEN A C. A unified theory of thermomechanical materials [J]. *Int J of Eng Sci*, 1966(4): 179-202
- [2] KRONER E. Elasticity theory of materials with long-ranges cohesive forces [J]. *Int J of Solids and Struct*, 1967(3): 731-742
- [3] PEERLINGS R H J, GEERS M G D, DE BORST R, *et al.* A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua [J]. *Int J of Solids and Struct*, 2001, **38**(44/45): 7723-7746
- [4] VERMEER P A, BRINKGREVE R B J. A new effective non-local strain measure for softening plasticity [C]// CHAMBON R, DESTRIES J, VARDOULAKIS I. *Localisation and Bifurcation Theory for Soils and Rocks*. Rotterdam: Balkema, 1994: 89-100
- [5] STROMBERG L, RISTINMAA M. FE-formulation of a nonlocal plasticity theory [J]. *Comput Methods in Appl Mech and Eng*, 1996, **136**(2): 127-144
- [6] PLANAS J, ELICES M, GUINEA G V. Cohesive cracks versus nonlocal models: Closing the gap [J]. *Int J of Fract*, 1993, **63**: 173-187
- [7] AIFANTIS E C. On the microstructure origin of certain inelastic models [J]. *J of Eng Mater and Technol*, ASME, 1984, **106**: 326-330
- [8] DE BORST R, MUHLHAUS H B. Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects [J]. *Int J for Numer Methods in Eng*, 1992, **35**: 521-539
- [9] PAMIN J. Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena [D]. Netherlands: TU Delft, 1994
- [10] ROLSHOVEN S, JIRASEK M. Nonlocal formulation of softening plasticity [C]// MANG H A, RAMMERSTORFER F G, EBERHARDSTEINER J. *Fifth World Congress on Computational Mechanics*. Vienna [s n], 2002: 7-12
- [11] ASKES H, PAMIN J, DE BORST R. Dispersion analysis and element-free Galerkin-solutions of second- and fourth-order gradient-enhanced damage models [J]. *Int J for Numer Methods in Eng*, 2000, **49**(6): 811-832

Exploration of non-linear and non-local strain gradient model

WANG Zhong-chang^{1, 2}, LUAN Mao-tian^{* 1, 2}, YANG Qing^{1, 2}

(1.State Key Lab. of Coastal and Offshore Eng., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China;

2.Inst. of Geotech. Eng., School of Civil and Hydraul. Eng., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China)

Abstract Considering deficiency of linear softening model which can not reproduce distortion complexity of geo-material, a non-linear and non-local model of plastic-strain gradient is presented by incorporating the non-linear and non-local theory with the theory of plastic strain gradient. The model uses an exponential pattern of strain softening and weighted by Gaussian distribution function while the effect of plastic strain gradient is taken into account. The mechanical characteristics of isotropic bar under uniaxial tension are examined by the proposed model and analysis results of the proposed model are compared with those of the linear-softening model. It is indicated that the plastic strain is dependent on both the rate of stress drop and the failure strain. Although the variation patterns of plastic strain in both linear and non-linear softening models are almost identical, the maximum plastic strains of both models are different. Furthermore, in the non-linear softening model, the plastic strain decays with the relative distance of the point under consideration with the center of the plastic zone.

Key words non-linearity; non-localization; strain gradient; softening