

弹性地基上四边自由矩形薄板振动分析有限积分变换法

钟 阳^{*}, 王国新, 孙爱民

(大连理工大学 土木水利学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 将弹性地基以 Winkler 模型模拟, 利用双重有限余弦积分变换的方法推导出了弹性地基上四边自由矩形薄板的固有频率和振型的解析解表达式. 由于在求解过程中不需要事先人为地选取挠度函数, 而是从弹性地基上薄板的基本振动方程出发, 直接利用数学的方法求解, 使得问题的求解更加合理化. 计算实例验证了所采用的方法以及所推导出的公式的正确性.

关键词: 弹性地基; 四边自由矩形薄板; 固有频率和振型; 有限余弦积分变换
中图分类号: U416.222 **文献标识码:** A

0 引言

弹性矩形薄板是土木工程中常用的一种结构形式, 例如, 桥梁工程中的桥面板、高速公路中的水泥混凝土路面、机场中跑道以及各种房屋建筑中的楼板等. 用以求解此类问题的通用方法主要有两大类, 即解析法和数值法. 解析法主要为叠加法^[1]、傅里叶级数法^[2]. 数值法主要有有限元法^[3-4]. 各种解析法中都要事先人为地选定挠度函数, 而这些函数的选取具有一定的任意性, 无确定的规律可循^[5]. 虽然数值法可以完全解决这类问题, 但要求输入数据多, 比较繁杂.

对于弹性矩形薄板振动问题的研究文献远远少于静力问题. 文献[6]利用叠加法分析了固支弹性矩形薄板的固有频率. 文献[7]利用梁函数法分析了弹性矩形薄板的振动问题. 文献[8-9]利用 Rayleigh-Ritz 法分析了弹性地基上四边自由矩形薄板的振动问题.

积分变换法是求解弹性力学问题解析解的较好方法之一^[10], 但是, 对于有限域的问题利用积分变换的方法求出其解析解还未见报道. 本文将弹性地基以 Winkler 模型进行模拟, 利用双重有限余弦积分变换的方法推导出弹性地基上四边自由

由矩形薄板的固有频率和振型解析解表达式.

1 矩形薄板的振动和有限余弦积分变换

矩形薄板的自由振动方程为

$$\nabla^4 w(x, y, t) + Kw(x, y, t) + \bar{m} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

式中: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\bar{m} = \rho h / D$; $K = k / D$; 板的抗弯刚度 $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$; E 与 h 分别为材料的弹性模量、泊松比、厚度和板的质量密度, k 为地基反力系数; $w(x, y, t)$ 为板的动挠度. 假设板在发生某一阶自由振动时的动挠度方程可表达为

$$w(x, y, t) = (A \cos kt + B \sin kt) W(x, y, k) \tag{2}$$

式中 A 、 B 为待定系数, k 为板自振频率, $W(x, y, k)$ 为振型函数. 将式(2)代入式(1)可得到弹性地基上矩形薄板振型函数的微分方程, 式中将 $W(x, y, k)$ 简写为 $W(x, y)$:

$$\nabla^4 W(x, y) + (K - \bar{m} k^2) W(x, y) = 0 \tag{3}$$

由式(3)可解得矩形薄板的自振频率和振型, 以及板的内力, 例如, 板的弯矩振型为

收稿日期: 2005-07-19; 修回日期: 2006-12-15.
作者简介: 钟 阳^{*} (1955-), 男, 教授.

$$M_x = -D \left[\frac{\partial W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial W}{\partial y^2} \right] \quad (4)$$

$$M_y = -D \left[\frac{\partial W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial W}{\partial x^2} \right] \quad (5)$$

二维有限余弦的积分正变换为^[10]

$$W(m, n) = \iint_{00}^{ab} W(x, y) \cos T_m x \cos U_n y dx dy \quad (6)$$

其逆变换为

$$W(x, y) = \frac{1}{ab} W(0, 0) + \frac{2}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} W(m, 0) \cos T_m x + \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} W(0, n) \cos U_n y + \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W(m, n) \cos T_m x \cos U_n y \quad (7)$$

其中 $T_m = m\pi/a$; $U_n = n\pi/b$, 而 a 和 b 分别为薄板的长度和宽度. 通过分部积分可以分别得到各高阶偏导数的有限余弦积分正变换为

$$\iint_{00}^{ab} \frac{\partial W}{\partial x^4} \cos T_m x \cos U_n y dx dy = T_m^4 W(m, n) + \int_0^b \left\{ (-1)^m \frac{\partial W}{\partial x^3} \Big|_{x=a} - \frac{\partial W}{\partial x^3} \Big|_{x=0} - T_m^3 \left[(-1)^m \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=a} - \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] \right\} \cos U_n y dy \quad (8)$$

同理可得

$$\iint_{00}^{ab} \frac{\partial W}{\partial y^4} \cos T_m x \cos U_n y dx dy = U_n^4 W(m, n) + \int_0^a \left\{ (-1)^n \frac{\partial W}{\partial y^3} \Big|_{y=b} - \frac{\partial W}{\partial y^3} \Big|_{y=0} - U_n^3 \left[(-1)^n \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=b} - \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=0} \right] \right\} \cos T_m x dx \quad (9)$$

式(1)中的复合偏导数可分成两种情况, 首先对坐标 x 进行变换后对坐标 y 进行变换有

$$\iint_{00}^{ab} \frac{\partial W}{\partial x^2 \partial y^2} \cos T_m x \cos U_n y dx dy = \int_0^a \left[(-1)^n \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=b} - \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=0} \right] \cos T_m x dx + \int_0^b \left[(-1)^m \frac{\partial W}{\partial x \partial y^2} \Big|_{x=a} - \frac{\partial W}{\partial x \partial y^2} \Big|_{x=0} \right] \cos U_n y dy + T_m U_n^3 W(m, n) \quad (10)$$

同理, 先对 y 坐标变换后对 x 坐标变换可得到

$$\iint_{00}^{ab} \frac{\partial W}{\partial x^2 \partial y^2} \cos T_m x \cos U_n y dx dy = \int_0^b \left[(-1)^m \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=a} - \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] \cos U_n y dy + \int_0^a \left[(-1)^n \frac{\partial W}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=b} - \frac{\partial W}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=0} \right] \cos T_m x dx + T_m U_n^3 W(m, n) \quad (11)$$

将式(8)、(9)、(10)和(11)代入式(3)的有限余弦积分正变换可以得到

$$\begin{aligned} & [(T_m^2 + U_n^2)^2 + K - m^2 k_m^2] W(m, n) = \\ & - \int_0^a \left\{ (-1)^n \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial y^2} \right) \Big|_{y=b} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial y^2} \right) \Big|_{y=0} \right\} \cos T_m x dx - \\ & \int_0^b \left\{ (-1)^m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=a} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0} \right\} \cos U_n y dy + (T_m^2 + U_n^2) \times \\ & \left\{ \int_0^a \left[(-1)^n \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=b} - \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=0} \right] \cos T_m x dx + \int_0^b \left[(-1)^m \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=a} - \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] \cos U_n y dy \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

四边自由板的边界条件可以表示为

$$\begin{aligned} & \text{当 } x = \begin{cases} 0 \\ a; \end{cases} \\ & M_x = -D \left[\frac{\partial W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial W}{\partial y^2} \right] = 0, \\ & M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial W}{\partial x \partial y} = 0, \\ & Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial W}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (13) \\ & \text{当 } y = \begin{cases} 0 \\ b; \end{cases} \\ & M_y = -D \left[\frac{\partial W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial W}{\partial x^2} \right] = 0, \\ & M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial W}{\partial x \partial y} = 0, \\ & Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial W}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

将式(13)和式(14)中的最后一式代入式(12)可得

$$\begin{aligned} & [(T_m^2 + U_n^2)^2 + K - m^2 k_m^2] W(m, n) = (T_m^2 + U_n^2) \times \\ & \left\{ \int_0^a \left[(-1)^n \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=b} - \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=0} \right] \cos T_m x dx + \right. \end{aligned}$$

$$\int_0^b \left[(-1)^m \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=a} - \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=b} \right] \cos U_h y dy \} \quad (15)$$

式 (15) 的右端为定积分, 所以应该为常量. 令

$$I_{mn} = \int_0^a \left[(-1)^n \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=b} - \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=0} \right] \cos T_m x dx;$$

$$J_{mn} = \int_0^b \left[(-1)^m \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=a} - \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=b} \right] \cos U_h y dy$$

这样式 (15) 就可以表示为

$$W(m, n) = \frac{(I_{mn} + J_{mn})(T_m^2 + U_h^2)}{(T_m^2 + U_h^2)^2 + K - \bar{m} k_m^2} \quad (16)$$

由式 (7) 所定义的二维有限余弦积分的逆变换, 可以得到

$$\begin{aligned} W(x, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} C_{m0}(I_{m0} + J_{n0}) \cos T_m x + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} C_{0n}(I_{0n} + J_{0n}) \cos U_h y + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}(I_{mn} + J_{mn}) \cos T_m x \cos U_h y \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{其中 } C_{mn} = \frac{2(T_m^2 + U_h^2)}{ab[(T_m^2 + U_h^2)^2 + K - \bar{m} k_m^2]}.$$

可以验证式 (17) 已满足由式 (13) 和 (14) 的第 2 式所表示的扭矩为零的边界条件. 另外, 在前面式 (15) 的推导过程中已经利用了由式 (13) 和 (14) 的第 3 式所表示的剪力为零的边界条件. 但是, 还要满足弯矩为零的边界条件. 将式 (17) 代入式 (13) 和 (14) 的第 1 式可以得到以下方程:

$$\text{由 } x = 0; M_x = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] = 0 \text{ 可以得到}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} T_m C_{m0}(I_{m0} + J_{m0}) + \sum_{n=1}^{\infty} U_h^2 C_{0n}(I_{0n} + \\ & J_{0n}) \cos U_h y + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}(T_m^2 + \nu U_h^2)(I_{mn} + \\ & J_{mn}) \cos U_h y = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{由 } x = a; M_x = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] = 0 \text{ 可以得到}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m T_m^2 C_{m0}(I_{m0} + J_{n0}) + \sum_{n=1}^{\infty} U_h^2 C_{0n}(I_{0n} + \\ & J_{0n}) \cos U_h y + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^m C_{mn}(T_m^2 + \nu U_h^2) \times \end{aligned}$$

$$(I_{mn} + J_{mn}) \cos U_h y = 0 \quad (19)$$

$$\text{由 } y = 0; M_y = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] = 0 \text{ 可以得到}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} U_h^2 C_{0n}(I_{0n} + J_{0n}) + \sum_{m=1}^{\infty} T_m^2 C_{m0}(I_{m0} + \\ & J_{m0}) \cos T_m x + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}(U_h^2 + \nu T_m^2)(I_{mn} + \\ & J_{mn}) \cos T_m x = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{由 } y = b; M_y = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] = 0 \text{ 可以得到}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n U_h^2 C_{0n}(I_{0n} + J_{0n}) + \sum_{m=1}^{\infty} T_m^2 C_{m0}(I_{m0} + \\ & J_{m0}) \cos T_m x + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_{mn}(U_h^2 + \nu T_m^2) \times \\ & (I_{mn} + J_{mn}) \cos T_m x = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

为了解方便, 将式 (18) 与 (19) 两式以及 (20) 与 (21) 两式分别相加可得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m0} I_{mn} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} I_{mn} \cos U_h y + \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} A_{0n} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \right] J_{mn} \cos U_h y = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} B_{0n} J_{mn} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} J_{mn} \cos T_m x + \\ & \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} B_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \right] I_{mn} \cos T_m x = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\text{其中 } A_{mn} = 2C_{mn} [1 + (-1)^m] (T_m^2 + \nu U_h^2); B_{mn} = 2C_{mn} [1 + (-1)^n] (\nu T_m^2 + U_h^2).$$

式 (22) 与 (23) 成立的条件应该为展开后各类同类项的系数为零, 由此可得到下列代数方程组. 实际上, 式 (24) 是一个齐次代数方程组, 存在解的条件为其系数矩阵为零. 因为系数矩阵中都包含有板的自振频率 k , 并且式 (22) 和 (23) 保证了式 (17) 可以满足由式 (13) 和 (14) 所表示的全部边界条件. 所以由此可以求出弹性地基上四边自由矩形薄板的固有频率 k 和待定系数 I_{mn} 和 J_{mn} ($m = 1, 2, \dots, \infty; n = 1, 2, \dots, \infty$). 再将它们代入式 (17) 就可以求出弹性地基上四边自由矩形薄板的振型.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}A_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{m0} & 0 & \cdots & \frac{1}{2}A_{00} & \frac{1}{2}A_{10} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2}A_{01} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{m1} & \cdots & A_{01} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \frac{1}{2}B_{00} & \frac{1}{2}B_{01} & \cdots & \frac{1}{2}B_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{0n} & 0 & \cdots \\ B_{10} & \cdots & 0 & \frac{1}{2}B_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{0n} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_0 \\ J_1 \\ \vdots \\ I_0 \\ I_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (24)$$

2 算 例

为了证明本文所推导出的公式的正确性,取文献 [7] 中的算例,其中计算参数分别取 $\nu = 0.15$; $a = b = 4.5\text{ m}$; $E = 3.0 \times 10^4\text{ MPa}$; $h = 0.2\text{ m}$; $k = 5.5 \times 10^7\text{ N/m}^3$. 表 1 同时分别列出了本文计算出的固有频率结果和文献 [7] 的计算结果,以便加以对比. 在计算中 m 和 n 分别取为 10 项,图 1 给出了与固有频率所对应的振型.

表 1 板的固有频率 $\left[k_p = \frac{1}{a^2} \overline{D/p} \right]$
Tab. 1 The eigenfrequencies of plate $\left[k_p = \frac{1}{a^2} \overline{D/p} \right]$

	p				
	1	2	3	4	5
文献 [7]	34.29	40.27	42.88	43.54	43.75
本文	34.32	40.25	42.90	43.62	43.85

由上表可知,本文的计算结果同文献 [7] 的计算结果是很接近的. 从而表明本文所推导出的弹性地基上四边自由矩形薄板的固有频率和振型是正确的.

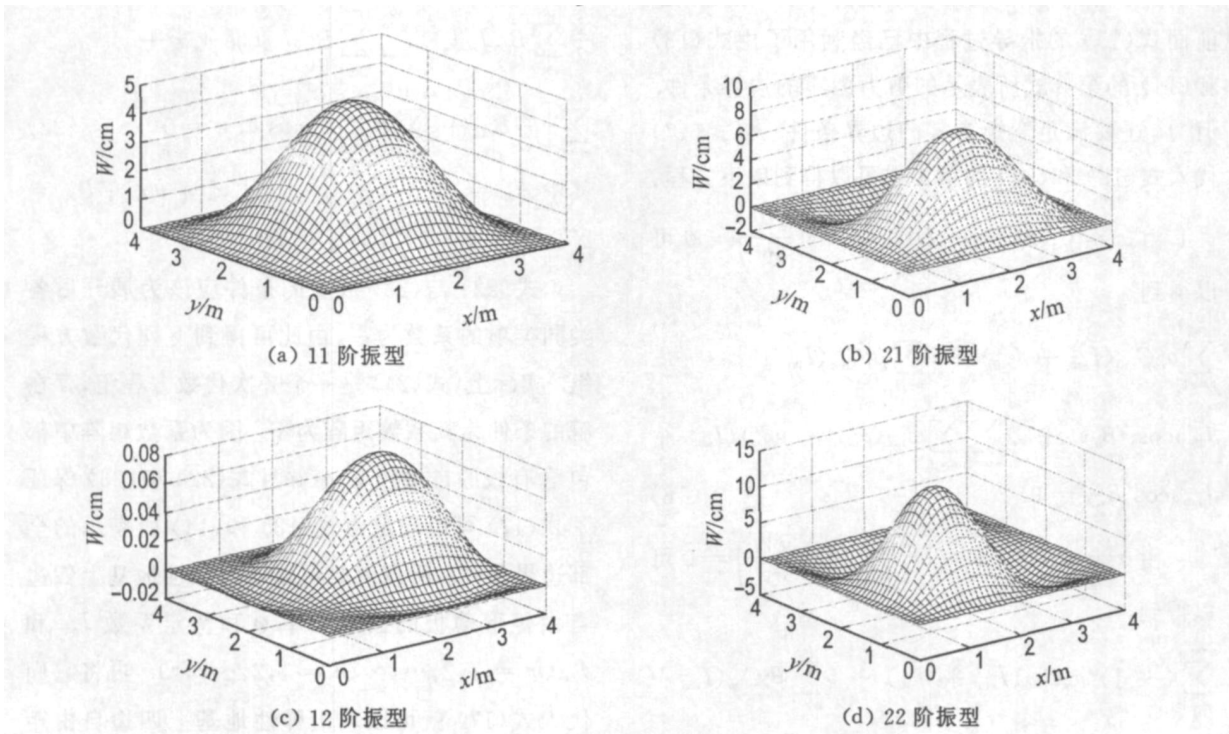


图 1 固有频率对应的振型
Fig. 1 Vibration types of eigenfrequencies

3 结 论

利用双重有限余弦积分变换推导出了完全满足四边自由边界条件下, 矩形薄板的固有频率和振型的解析表达式. 由于并不需要人为选取位移函数, 而是直接从弹性地基上矩形薄板的动力学方程出发来推导出问题的解析解表达式, 使得本文的方法更加合理化和理论化. 数值算例也验证了本文方法的正确性.

参考文献:

- [1] GORMAN D J. **Free Vibration Analysis of Rectangular Plates** [M]. Amsterdam: Elsevier North Holland, Inc., 1982
- [2] HU RLEBAUS S, GAUL L. An exact series solution for calculating the eigenfrequencies of orthotropic plates with completely free boundary [J]. **J Sound**

and Vib, 2001, **244**(5): 747-759

- [3] 张福范. 弹性平板: 第 2 版 [M]. 北京: 科学出版社, 1984
- [4] 曲庆璋, 章 权, 梁兴复. 弹性薄板理论 [M]. 北京: 人民交通出版社, 2000
- [5] 成祥生. 悬臂矩形板的弯曲、稳定和振动 [J]. 应用数学和力学, 1978, **8**(7): 198-203
- [6] 曹国雄. 弹性矩形薄板振动 [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1983
- [7] 曹志远. 板壳振动理论 [M]. 北京: 中国铁道出版社, 1989
- [8] LEISSA A W. The free vibration of rectangular plates [J]. **J Sound and Vib**, 1973, **31**(5): 257-293
- [9] 何福保, 沈亚鹏. 板壳理论 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1992
- [10] SNEDDON I H. **The Use of Integral Transforms** [M]. North Holland McGraw-Hill, Inc., 1972

Vibration of a thin plate on Winkler foundation with completely free boundary by finite cosine integral transform method

ZHONG Yang^{*}, WANG Guo-xin, SUN Ai-min

(School of Civil and Hydraul. Eng., Dalian Univ. of Techhol., Dalian 116024, China)

Abstract The theoretical solution of eigenfrequencies and vibration models of rectangular thin plate on foundation with completely free boundary was derived by the double finite cosine integral transform method. In the analytical process, the elastic foundation was regarded as Winkler foundation model. Due to the basic dynamic elasticity equations of the thin plate on elastic foundation were only used and it does not need to select in advance the deflection function arbitrarily, therefore, the solution obtained directly by mathematic method is reasonable and theoretical. The correctness of formulations and method is proved by a numerical example.

Key words elastic foundation; rectangular thin plate with completely free boundary; eigenfrequencies and vibration models; finite cosine integral transform