第47卷第1期 大连理工大学学报 Vol. 47, No. 1
2007年1月 Journal of Dalian University of Technology Jan. 2007

文章编号: 1000-8608(2007)01-0106-07

# 处理准奇异积分的自适应高斯积分法

孙 亮, 滕 斌*, 宁德志

(大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 边界元法通常需要采用数值方法解决单元内的各种积分问题,而准奇异积分是各种积分中数值处理最为困难的部分. 自适应高斯积分法通过指定条件下的局部单元细分,改变了整个计算区域上的积分点分布,提高了数值积分精度. 对于三维水波对直立圆柱的绕射问题,采用此方法对求解过程中出现的准奇异积分进行了处理,计算结果表明本方法是一种高效实用的方法.

**关键词:** 准奇异积分;边界元法;积分精度;计算时间

**中图分类号:** O241.4; O353.2 **文献标识码:** A

## 0 引 言

边界元法相对于差分法、有限元法等域内方法,具有未知量少、网格剖分简单等优点,近年来广泛应用于固体力学、流体力学、热传导等领域的数值计算中. 边界元法中存在着大量的积分运算,这些积分运算直接影响到整个运算的时间和结果的精度,因此许多学者作了相关的研究. 根据格林函数源点与积分单元的位置关系,一般把边界元法中的积分分为非奇异积分、准奇异积分(或近奇异积分)和奇异积分[1]. 对于非奇异积分可以采用标准的高斯积分方法处理;对奇异积分和准奇异积分的处理大体上可以分为解析法和数值法[1]. 解析法通过数学推导变换获得积分的精确值,因此有很高的精度,但是推导的过程一般很繁琐;数值法由于其简便性应用较多. 对准奇异积分的处理时,需要注意两个问题[2]: (1) 准奇异积分和非奇异积分界限的划分,因为其中并没有一个严格的界限; (2) 处理方法的实用性,有些处理方法虽然可以获得很高的精度,但是缺乏对各种问题的普适性或者实现过程比较繁琐,影响了其在实际问题中的应用.

本文提出一种自适应高斯积分法,同时考虑准奇异积分处理中的两个重要问题.

## 1 自适应高斯积分法对准奇异积分的处理过程

三角极坐标变换[3]有效地处理了边界元方法中出现的奇异积分. 三角极坐标变换使得高斯积分点自动地密集在奇点附近,使得积分精度得到了有效的提高. 因此可以尝试通过改变高斯点的分布对一阶和二阶准奇异积分进行处理.

积分的准奇异性是由于源点离积分单元太近[1]. 因此,可以选定一个与被积分单元尺寸相关的特征长度($L_e$),当源点到单元的距离($D$)与特征长度($L_e$)的比值小于某一给定值$\lambda$但不等于0时,就视该积分为准奇异积分;源点到单元的距离为0时,源点位于单元上,为奇异积分. 只对源点附近的单元即存在准奇异积分的单元进行细分,从而改变计算区域上高斯积分点的分布. 这样既提高了积分的精度,又可以保证方法的高效性.

如图1所示的八节点单元,单元外有一源点,计算源点势在单元中的积分. 当源点距离单元太近时,即$D/L_e<\lambda$时,对单元进行一次细分,得到

收稿日期: 2005-06-10; 修回日期: 2006-12-19.
基金项目: 长江学者和创新团队发展计划资助项目(IRT0420); 国家自然科学基金资助项目(10372020).
作者简介: 孙 亮(1978-), 男, 博士生; 滕 斌*(1958-), 男, 博士, 教育部长江学者奖励计划特聘教授, 博士生导师.

新的单元分布 (如图 2所示 );然后再分别计算源点到每个一次细分所得的子单元的距离和子单元的特征长度 ,对 $D/L_e \geqslant \lambda$的子单元进行正常的高斯积分 ,对 $D/L_e < \lambda$的子单元进行二次细分 ,得到新的单元分布 (如图 3所示 );然后再分别计算源点到细分单元的距离和细分单元的特征长度 ,再进行判断和细分 ,直到源点到所有的子单元都满足 $D/L_e \geqslant \lambda$ (如图 4所示 ),在每个满足条件的细分单元里进行正常的高斯积分 ,最后把所有的子单元的积分结果加起来 ,根据积分的加和性 ,就可以得到源点对初始单元的积分结果 .


图 1　初始单元

Fig. 1　Initial element

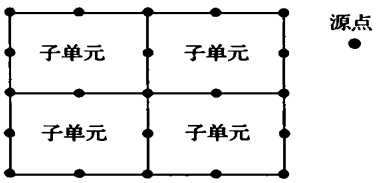



图 2　一次细分所得的子单元分布示意图

Fig. 2　Subelements after first subdivision

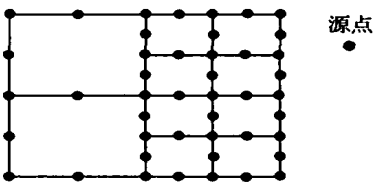



图 3　二次细分所得的子单元分布示意图

Fig. 3　Subelements after second subdivision

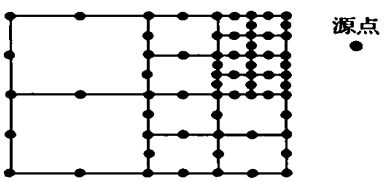



图 4　最终所得的子单元分布示意图

Fig. 4　Subelements after final subdivision

## 2　自适应高斯积分法在程序中的实现

### 2.1　实现步骤

在实际程序中 ,对准奇异积分的处理过程如图 5所示 .

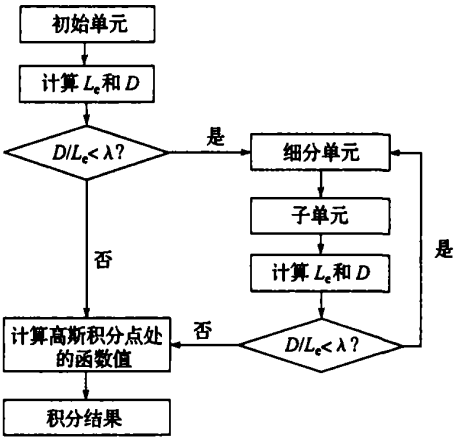



图 5　单元积分流程图

Fig. 5　The flow chart of integration on element

### 2.2　源点到单元的距离 ($D$) 的计算

在三维问题中 ,当源点在单元所属曲面上的投影位于单元内部时 ,源点到单元的距离 ($D$) 可以定义为源点和它投影的距离 ;当源点在单元所属曲面上的投影位于单元外部时 ,源点到单元的距离是源点到它投影距离的函数 . 考虑到程序实现的复杂性 ,在实际程序中用源点到单元节点的最小距离代替源点到单元的距离 , 即 $D = \min(D_i)$ ,如图 6所示 . 随着单元细分的进行 ,源点到子单元节点的最小距离将趋近于源点到单元的距离 .

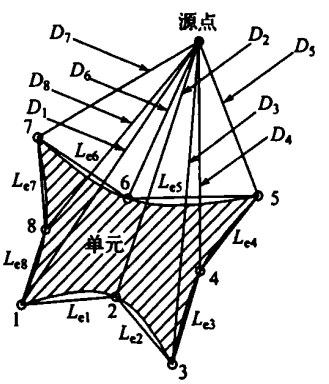



图 6　对 $D$和 $L_e$的计算示意图

Fig. 6　Calculation of $D$ and $L_e$

### 2.3　细分单元的特征长度 ($L_e$) 和单元细分

在实际三维问题的计算中 ,积分面往往是曲

面的,单元形状不规则,单元的边是曲线且长度不一,单元的特征长度 $L_e$ 需要给出新的定义. 如图 6所示的八节点单元,取 $L_e = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{8} L_{ei}$,$L_{ei}$ 为相邻两个节点的直线距离. 为了避免单元各边长相差太大,造成计算误差无法控制,在剖分单元时应尽量采用高质量单元.

使用边界元法进行计算时,是把所划分的空间单元变换到局部坐标再进行计算. 如图 7所示,局部坐标系下四边形单元的节点分布,× 表示上一次细分所得的单元节点,● 表示本次细分所得的节点. 细分时先确定本次细分子单元节点的局部坐标,根据连续高阶元的插值函数[4]确定子单元节点的空间坐标.

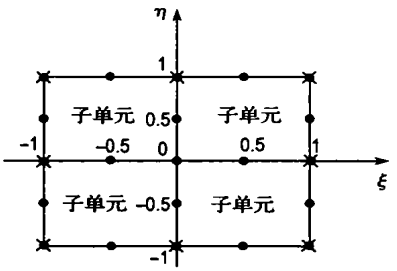



图 7 局部坐标系下四边形单元节点分布

Fig. 7 Distribution of nodes in a quadrilateral element under the local coordinate system

## 2.4 指定参数 λ 的确定和计算效率分析

指定参数 λ 的选取是确定最细层单元尺度的大小、保证计算效率的关键,它的取值需要从精度要求和计算时间两方面进行考虑.

建立如图 8所示的模型,在 $Oxy$ 平面有一个边长为 1的正方形,点 $(0,0,z_0 = 0.05)$ 到正方形上任一点的距离为 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}$. 采用本文的自适应高斯积分法计算积分 $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r}\,dx\,dy$ 和 $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r^2}\,dx\,dy$,对 λ 取不同值时所产生的误差和所需要的计算时间进行分析.

积分 $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r}\,dx\,dy$ 的解析表达式为

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r}\,dx\,dy = -z_0\arctan\left(\frac{1}{z_0\sqrt{z_0^2+2}}\right) + 2\ln\left(1+\sqrt{z_0^2+2}\right) - \ln(z_0^2+1) \tag{1}$$

对于积分 $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r^2}\,dx\,dy$,可变换为

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{1}{\cos^2\Gamma} + z_0^2\right)\,d\Gamma - \frac{\pi}{2}\ln z_0 \tag{2}$$

函数 $f(\Gamma) = \ln\left(\frac{1}{\cos^2\Gamma} + z_0^2\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 区间上不存在奇异性,可通过数值积分求得精确结果作为二维积分 $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r^2}\,dx\,dy$ 的精确值.

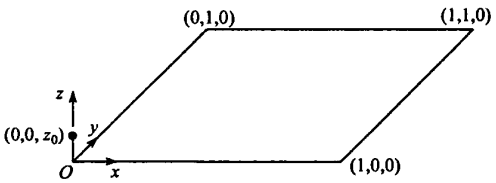



图 8 模型示意图

Fig. 8 Sketches of the model

本文方法中 λ 的取值对结果的精度有很大影响. 从图 9、10可以看出,λ 的取值越大,计算结果的精度越大. 但是,在实际计算中不能单纯地把 λ 取较大的值,当 λ 很大时,计算所产生的截断误差会很小,这时就必须考虑舍入误差对计算精度的影响.

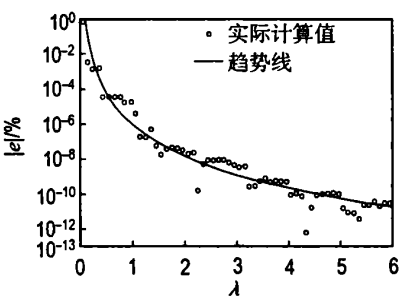



图 9 λ 的取值对计算积分 $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r}\,dx\,dy$ 精度的影响

Fig. 9 The effect of λ to calculation of $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r}\,dx\,dy$

在考虑方法计算精度的同时,也需要考虑计算的时间. 由于数值积分时间与高斯点数量成线性关系,可通过比较高斯点数量判断计算量的大小,以下以此作为衡量计算时间的指标. 图 11中显示了 λ 取不同值时计算积分 $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r}\,dx\,dy$ 和 $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r^2}\,dx\,dy$ 所使用的高斯点总数 $N$. 从图 11中

可以看出λ的取值越大,所使用的高斯点就越多,所需要的计算时间就越多. 高斯点数随λ的变化趋势为二次曲线,这意味着如果λ的值变为原来的 2倍,则高斯点总数 $N$ 约为原来的 4倍.

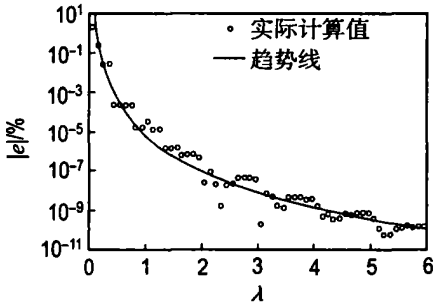



图 10　λ的取值对计算积分$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$的影响

Fig. 10　The effect of λ to calculation of $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

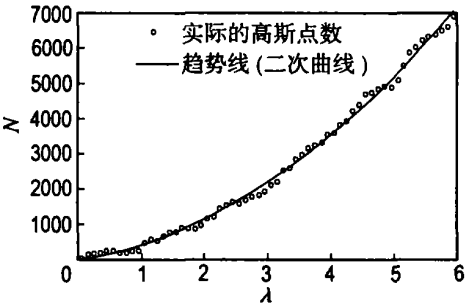



图 11　λ的取值对高斯点总数的影响

Fig. 11　The effect of λ to the number of Gauss points

在数值计算当中,比较方法的计算效率需要同时考虑计算的精度和计算时间. 对如图 8所示的模型,在直接法中对积分区域采用不同的单元划分,分别离散成 1×1, 2×2, 3×3,…, 21×21个单元,对计算区域均匀细分,从而改变计算中所使用的高斯点数;对本方法通过λ取不同值改变所使用的高斯点数.

直接法和本文方法中计算区域上的高斯点具有不同的分布,直接法中高斯点在计算区域上均匀分布(如图 12所示),而本文方法改变了积分区域上高斯点的分布,使得积分点在源点附近比较密集(如图 13所示).

为了比较直接法和本文方法的计算效率,对直接法和本文方法计算积分$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$和$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$所使用的高斯点数量与结果的精度做了研究. 由计算的结果(见图 14、15)可以看出,无论是直接法,还是本文的自适应高斯积分法,计算的精度基本上都随着高斯点数量的增加而提高. 在相同的精度要求下,本文方法需要很少的高斯点,计算所需要的时间也少得多. 因此本文方法具有很高的效率.

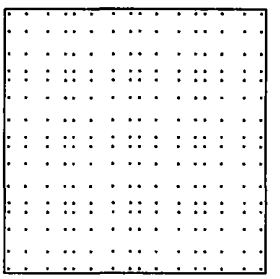


图 12　直接法中高斯点在积分区域上的分布示意图

Fig. 12　Distribution of Gauss points in direct method

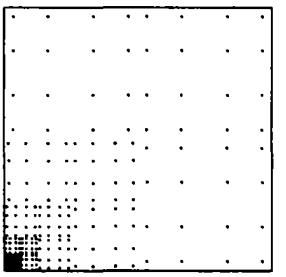


图 13　本文方法中高斯点在积分区域上的分布示意图

Fig. 13　Distribution of Gauss points in present method

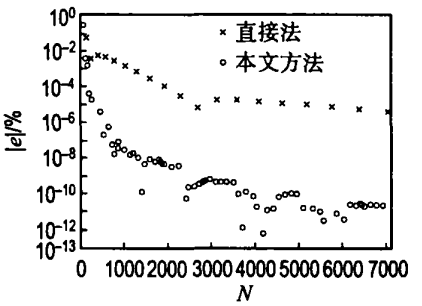



图 14　积分$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$的计算精度和高斯点总数的关系

Fig. 14　Relation between total number of Gauss points and $|e|$ for $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

综合以上对计算误差和计算时间的分析,本文建议在实际问题中,考虑计算的精度要求和时间成本,可在 0.5~ 1.5对 λ 取值.

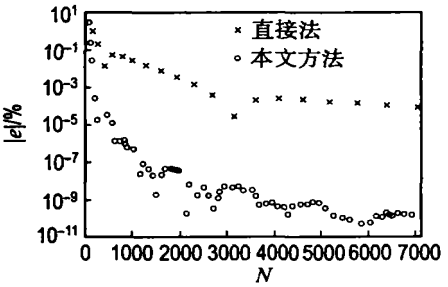



图 15 积分 $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的计算精度与高斯点总数的关系

Fig. 15 Relation between total number of Gauss points and $|e|$ for $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{r^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

## 3 应用实例

求解小振幅波浪问题时常采用摄动展开的方法,对于线性问题[5],波面可以写成 $\zeta^{(1)} = \mathrm{Re}[Z^{(1)}(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}]$,速度势可以写成 $\Phi^{(1)} = \mathrm{Re}[\Phi^{(1)}(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}]$,对于波浪绕射问题,在水面 $S_F$ 处 $Z^{(1)} = \frac{\mathrm{i}k}{g}\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(1)} = \Phi_I^{(1)} + \Phi_d^{(1)}$,其中 $\Phi_I^{(1)}$ 为一阶入射势,在水面处任一点 $(x,y)$ 处的 $\Phi_I^{(1)} = -\frac{\mathrm{i}gA_i}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x\cos\theta + y\sin\theta)}$,$\theta$ 为波浪入射角,$A_i$ 为入射波波幅;$\Phi_d^{(1)}$ 为一阶绕射势,在流域 K内,任一点的绕射势

$$\Phi_d^{(1)}(\boldsymbol{x}_0) = \iint_{S_B}\left(\Phi_d^{(1)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial G^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)}{\partial n} + G^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\frac{\partial\Phi_d^{(1)}(\boldsymbol{x})}{\partial n}\right)\mathrm{d}s \quad (\boldsymbol{x}_0\in \mathrm{K}) \tag{3}$$

其中,物面上的一阶绕射势可由以下积分方程[5]求得

$$\pi\Phi_d^{(1)}(\boldsymbol{x}_0) - \iint_{S_B}\Phi_d^{(1)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial G^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)}{\partial n}\mathrm{d}s = \iint_{S_B}G^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\frac{\partial\Phi_d^{(1)}(\boldsymbol{x})}{\partial n}\mathrm{d}s \quad (\boldsymbol{x}_0\in S_B) \tag{4}$$

根据以上公式,求出水面处的 $\Phi^{(1)}$、$Z^{(1)}$ 的值,就可计算出波幅 $A = |Z^{(1)}|$.

从式(3)可以看出,在计算水面上任一点的绕射势 $\Phi_d^{(1)}$ 的过程中,当水面上的计算点距离物面较近时,积分 $\iint_{S_B}\Phi_d^{(1)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial G^{(1)}}{\partial n}\mathrm{d}s$ 具有二阶准奇异性,积分 $\iint_{S_B}G^{(1)}\frac{\partial\Phi_d^{(1)}(\boldsymbol{x})}{\partial n}\mathrm{d}s$ 具有一阶准奇异性,使用直接的高斯积分对上述两个积分都很难获得准确的结果.作为算例,以下应用本文方法对这一问题进行分析计算,计算时取 $\lambda = 1.0$.

如图 16所示,在深为 $d$ 的水中有一直立圆柱,无因次圆柱半径 $r_0/d = 1.0$,受到沿 $x$ 轴方向传播的波浪作用,入射波波高为 $H_i = 2A_i$,无因次波数 $kd = 1.0$.由于问题的对称性,只计算半个圆柱周围的波高分布.如图 17所示为半个圆柱湿表面上所划分的单元.将自适应高斯积分法应用到计算当中,并与解析解[5]、直接高斯积分法所得的结果进行比较.

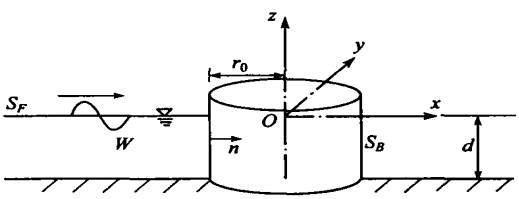



图 16 规则波对直立圆柱的作用

Fig. 16 Uniform cylinder under the action of regular waves

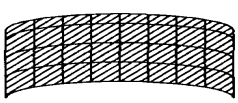


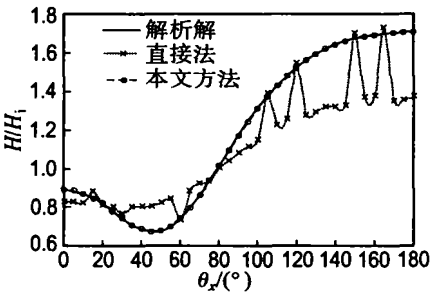
图 17 半湿物面上的单元剖分

Fig. 17 Elements on a half of the wet body surface

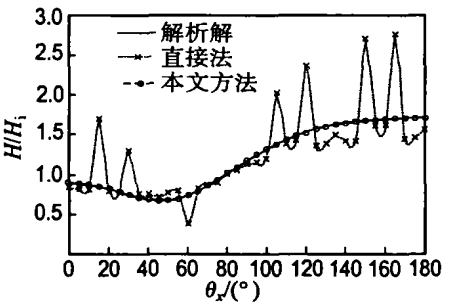
### 3.1 直立圆柱周围相同半径、不同角度处的波浪高度

分别计算距离坐标原点 $kr = 1.001$、1.01和

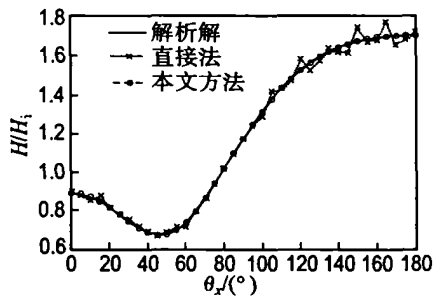
1.05上不同角度的波高，由计算的结果(见图18(a)、(b)、(c))可以看出，在计算不同半径上的点时，积分都不同程度的具有准奇异性，计算距离物面越近的点，积分的准奇异性就越明显．由直接高斯积分所得的结果有很大的误差，采用本文的自适应高斯积分法可以得到很精确的结果．




(a) $kr = 1.001$




(b) $kr = 1.01$



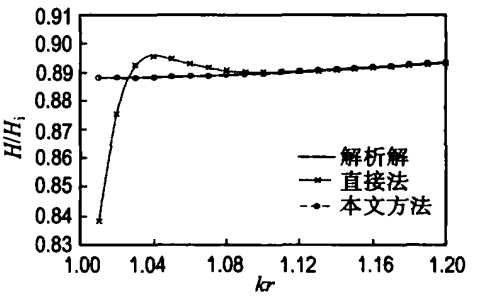

(c) $kr = 1.05$

图 18　不同 $kr$ 上的波高分布

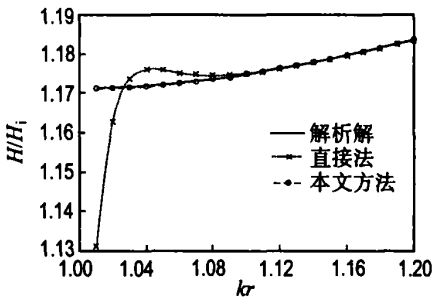
Fig. 18　Distribution of wave height around the cylinder at different $kr$

### 3.2　直立圆柱周围相同角度、不同半径处的波浪高度

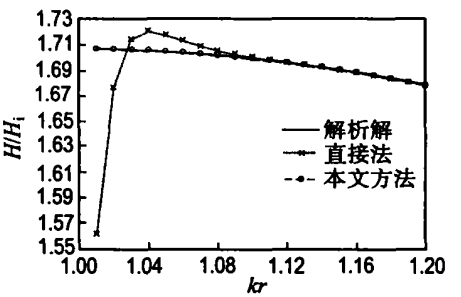
分别计算与 $x$ 轴夹角为 0°、90°、180°方向上不同半径的波高．由计算的结果(见图19(a)、(b)、(c))可以看出，在相同的角度上，当所计算点距离物面较近时，积分存在较强的准奇异性，由直接高斯积分所得的结果有很大的误差，采用本文的自适应高斯积分法可以得到很精确的结果；当所求点距离物面较远时，积分的准奇异性减弱，采用直接高斯积分和本文的自适应高斯积分法都能得到精确的结果．




(a) $\theta_x = 0°$




(b) $\theta_x = 90°$




(c) $\theta_x = 180°$

图 19　与 $x$ 轴不同夹角方向上的波高分布

Fig. 19　Distribution of wave height in different direction with $x$ axis

## 4　结　　语

本文提出的自适应高斯积分法通过在原有的

单元上按指定条件动态地进行细分改变了高斯积分点的分布,使得积分的精度有了很大的提高.通过一系列的分析和验证可以看出,自适应高斯积分法有效地处理了边界元法解三维问题时所出现的一阶准奇异积分和二阶准奇异积分,在满足精度要求的同时,节省了计算时间.本文提出的自适应高斯积分法可适用于各种准奇异积分的计算,实际程序中容易实现,具有广泛的适用性和实用性.

## 参考文献:

[1] HUANG Q, CRUSE T A. Some notes on singular integral techniques in boundary element analysis [J]. **Int J Numer Meth Eng**, 1993, **36**: 2643-2659

[2] 胡圣荣,陈国华.三维非规则非均匀边界元网格的简便的高精度算法 [J]. 固体力学学报, 1996, **17**(4): 343-347

[3] LI H B, HANG M, MANG H A. A new method for evaluating singular integrals in stress analysis of solids by the direct boundary element method [J]. **Int J Numer Meth Eng**, 1985, **21**: 2071-2098

[4] 孙 亮,滕 斌,张晓兔,等.消除"不规则频率"的非连续高阶元方法 [J]. 海洋工程, 2004, **22**(4): 51-59

[5] 李玉成,滕 斌.波浪对海上建筑物的作用: 第 2版 [M]. 北京: 海洋出版社, 2002

# A self-adaptive Gauss integral method for evaluation of nearly singular integrals

SUN Liang, TENG Bin*, NING De-zhi

(State Key Lab. of Coastal and Offshore Eng., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China)

**Abstract** Different kinds of integrations have to be evaluated in boundary element methods. The nearly singular integral is the most difficult one of them. A self-adaptive Gauss integral method is proposed to divide the element into finer meshes under the specified conditions. The integral point distribution of the whole calculation domain is changed and the integral precision is promoted by this method. Applying the self-adaptive method, an example of the wave diffraction from a uniform cylinder is examined. The examination results show that the present method is a fast and easily applicable one.

**Key words** nearly singular integral; boundary element method; integral accuracy; run time