

一种新的进化策略及其全局收敛性

周东生^{* 1,2}, 李 斌³, 唐焕文^{1,3}

(1.大连理工大学 管理科学与工程研究所, 辽宁 大连 116024;

2.大连海事大学 经济与管理学院, 辽宁 大连 116026

3.大连理工大学 应用数学系, 辽宁 大连 116024)

摘要: 在求解单峰最优化问题算法的基础上,给出了一种新的进化策略. 针对连续函数优化问题,利用中心极限定理,在较弱的条件下,首先证明了基于均匀分布的 $(\underline{c} + \lambda)$ -ES算法依概率收敛,然后给出了采用一般连续性随机变量作为变异算子的 $(\underline{c} + \lambda)$ -ES算法依概率收敛的证明. 数值结果表明:采用基于均匀分布的进化策略求解维数较高的连续函数优化问题能够快速有效地收敛到全局最优解.

关键词: 进化算法; 进化策略; 全局收敛性; 中心极限定理

中图分类号: O22 **文献标识码:** A

0 引 言

进化算法是近年来很受重视的一类求解大型复杂优化问题的仿生类方法,主要包括 3种算法:遗传算法、进化策略和进化规划. 20世纪 90年代初,在遗传算法的基础上发展起来的遗传程序设计,与前 3种算法虽然在实现方面有一些细微差别,但都具有一个共同的特点:借助生物演化的思想和原理解决实际问题^[1~4]. 由于这些算法具有一定的通用性、鲁棒性,以及便于并行处理等优点,它们对于组合优化问题、复杂的非线性优化问题、某些非光滑优化问题,特别是某些 NP问题等都有很好的适用性,已被广泛应用于生命科学、工程科学、管理科学和社会科学等众多领域^[4~7].

进化优化是目前进化计算应用和研究的重点. 多数经典优化算法都要求对目标函数的可微连续性加以严格限定,在求解过程中易落入局部极小的陷阱,而且对于高维问题算法的可行性和计算效率明显下降,还有可能不收敛,这些局限降低了算法的有效性. 相比之下,进化算法就比较适合求解大规模优化问题. 由于进化算法使用的是适应值信息,对目标函数的要求不高,并且是一种全局优化技术,在现代科学技术和工程计算中日益显示出其优势及潜力. 但是,目前对进化算法的理论研究成果还较少,对这类算法的数学基础,包括收敛性、收敛速度、计算复杂性等的研究

还不够. 因此建立坚实的仿生类算法的数学基础,是学科发展的当务之急^[6].

Fogel利用 Markov链,给出了遗传算法和进化规划的收敛性证明^[2]. 文献[8~9]对一类进化算法的收敛性进行了研究,在较弱的条件下,用一种比较简洁的方法证明了其全局收敛性. 文献[10]针对单峰函数的优化问题提出了一种基于均匀分布的进化策略,随后在文献[11]中对其做了改进,但是没有在理论上作进一步分析. 本文在此基础上对存在有限个全局极小点的连续函数优化问题,讨论基于均匀分布的 $(\underline{c} + \lambda)$ -ES算法的全局收敛性,并且讨论以一般连续型随机变量为变异算子、概率密度函数可以是分段连续的 $(\underline{c} + \lambda)$ -ES算法的收敛性.

1 算法描述

考虑全局优化问题

(P) $\min\{f(x): x \in K \subset \mathbf{R}^n\}$, $f: K \rightarrow \mathbf{R}^1$, $f \in C$
设

$$S^* = \arg\{x \in K | f(x) = f^*\} \neq \emptyset$$

其中

$$f^* = \min_{x \in K} f(x)$$

对 $\forall X > 0$, 记

$$D_0 = \{x \in K | f(x) - f^* < X\},$$

$$D_1 = K \setminus D_0 = \{x \in K | f(x) - f^* \geq X\}$$

收稿日期: 2005-07-20; 修回日期: 2006-11-18.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10571018).

作者简介: 周东生^{*} (1964-), 男, 博士, 副教授; 唐焕文 (1936-2006), 男, 教授, 博士生导师.

©1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

1.1 基于均匀分布的 $(\underline{} + \lambda)$ -ES算法

算法的具体步骤^[10]描述如下.

算法 1

步 1 初始化: 给定初始点 $x(0) = (x_1(0) \cdots x_n(0))^T$, 初始步长 $r_0 > 0$, 精度 $X > 0$, 步长压缩系数 $k \in (0, 1)$, 内循环次数 T , 变异种群规模 $\underline{}$, 杂交种群规模 λ , 置 $r := r_0, i := 0$.

步 2 置 $k := 1$.

步 3 变异: $x_i^{(j)} = x_i + \Delta x, \Delta x = ru, j = 1, 2, \cdots, \underline{}$, 其中 u 是分量在 $[-0.5, 0.5]$ 上服从均匀分布的随机向量, 记为 $u \sim [-0.5, 0.5]$.

步 4 杂交: 用变异种群 $\{x_i^{(1)}, \cdots, x_i^{(\underline{})}\}$ 杂交产生中间种群 $\{x_i^{(+1)}, \cdots, x_i^{(+\lambda)}\}$.

步 5 寻优: 求变异种群和杂交种群的最优个体, 即令 $x_{i+1}^* = \arg \min_{x \in \{x_i^{(+1)}, \cdots, x_i^{(+\lambda)}\}} f(x_i^{(j)})$.

步 6 比较: 如果 $f(x_{i+1}^*) < f(x_i^*)$, 置 $i := i + 1, r := r_0$, 转步 2; 否则, 转步 7.

步 7 如果 $k \leq T$, 置 $k := k + 1$, 转步 3; 否则, 转步 8.

步 8 如果 $r < X$, 转步 9; 否则, 置 $r := kr$, 转步 2.

步 9 输出解 x_i^* , 停机.

应该指出, 这里步 4 中杂交种群的个体是对变异种群中两个个体进行凸组合得到的. 当步 3 中变异算子的 n 个分量相互独立, 并且服从正态分布, 即

$$\Delta x \sim N(0, e^2) = (N(0, e_1^2) \cdots N(0, e_n^2))^T$$

而且对步长没有限定时, 称此时的算法为算法 2, 其全局收敛性已在文献 [8] 中讨论过.

1.2 一种新的 $(\underline{} + \lambda)$ -ES算法

在算法 1 的基础上, 结合多点迭代的思想, 提出以下算法.

算法 3

步 1 初始化: 随机选取 $\underline{}$ 个初始点使得 $x_i(0) \in K, i = 1, 2, \cdots, \underline{}$, 则初始种群为 $X(0) = \{x_1(0), x_2(0), \cdots, x_{\underline{}}(0)\}$, 令 $k := 0$.

步 2 种群进化:

① 杂交 以等概率从 $X(k)$ 中选取两个个体 $x_{i1}(k), x_{i2}(k)$, 用随机杂交算子作用于 $x_{i1}(k), x_{i2}(k)$ 以产生中间个体 $x_{+i}(k) (i = 1, 2, \cdots, \lambda)$, 形成中间种群

$$\hat{X}(k) = \{x_{+1}(k), \cdots, x_{+\lambda}(k)\}$$

② 变异 $x_{+i}(k) = x_{+i}(k) + \Delta x (i = 1, 2, \cdots, \lambda)$, 其中 Δx 的分量是连续型随机变量, 方差不为零并且相互独立, 分量间可以服从不同分布, 但每一分量在迭代过程中服从同一分布. 若 $x_{+1}(k) \in K$, 则转③; 否则, 转②.

③ 寻优 从 $X(k) \cup \hat{X}(k)$ 中选择最优的 $\underline{}$ 个点, 其中

$$\hat{X}'(k) = \{x_{+1}(k), \cdots, x_{+\lambda}(k)\}$$

步 3 终止检验: 若满足终止进化条件, 则停止; 否则令 $k := k + 1$, 转步 2.

由于服从正态分布的随机变量落在任意区间内的概率都大于零, 结合中心极限定理, 可知对于方差不为零的任意独立同分布的连续型随机变量的无穷级数, 即 $\sum X_k$ 落在任意区间内的概率都大于零, “杂交” 可以看成“变异” 的加速. 可见算法 1 是算法 3 的一个特例, 即 $\underline{} = 1$ 时的情况.

2 收敛性分析

引理 1 (独立同分布的中心极限定理) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布, 且具有相同的数学期望和方差: $E(X_k) = \underline{}, D(X_k) = e^2 \neq 0 (k = 1, 2, \cdots, n)$, 则随机变量

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\underline{}}{n e} \rightarrow$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\underline{}}{n e} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

引理 2 有限个相互独立的一维正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

假设 1 问题 (P) 的可行域 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集, 在 K 中 (P) 有有限个全局极小点, 并且初始种群对应的水平集 $L^T = \{x | f(x) \leq T\}$ 有界.

引理 3 设 $\{x_m^*\}$ 是由算法 2 产生的序列, 则在假设 1 的前提下, 对 $\forall X > 0$, 都有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(|f(x_m^*) - f^*| < X) = 1$$

即该算法依概率收敛于 (P) 的全局极小点^[8,9]. 此命题等价于

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(x_m^* \in D_0) = 1$$

引理 4 在一维情况下, 记 $Z_m = \sum_{k=1}^m X_k /$

$(r_0 \sqrt{m}/12)$, 那么 $\sum_{k=1}^m X_k = Z_m r_0 \sqrt{m}/12$, 其中 $X_k = r_0 u_k, u_k \sim [-0.5, 0.5]$. 对 $\forall x, y \in \mathbf{R}, \forall W > W_2, \forall X > 0, \exists N_1 > 0$, 使得

$$P\left[W_2 < x + \frac{Z_m r_0}{12} - y < W\right] >$$

$$\left| P \left[W_2 < x + Yr_0 \frac{m}{12} - y < W_1 \right] \right| < X, \forall m > N_1$$

其中 $Y \sim N(0, 1)$.

证明 由 $X_k = r_0 u_k, u_k \sim [-0.5, 0.5]$, 有

$E(X_k) = 0, D(X_k) = \frac{r_0^2}{12} \neq 0$. 由引理 1 得, Z_m 的分布函数 $F_m(x)$ 对于任意 x , 满足

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} P\{Z_m < x\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

上式等价于 $\forall x \in \mathbf{R}, \forall X > 0, \exists N_1 > 0$, 使得

$$\left| P(Z_m < x) - \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| < \frac{X}{2},$$

$$\forall m > N_1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & P \left[W_2 < x + Z_m r_0 \frac{m}{12} - y < W_1 \right] = \\ & P \left[Z_m < \frac{12}{m} \frac{y - x + W_1}{r_0} \right] - \\ & P \left[Z_m < \frac{12}{m} \frac{y - x + W_2}{r_0} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & P \left[W_2 < x + Yr_0 \frac{m}{12} - y < W_1 \right] = \\ & \int_{-\infty}^{\frac{12}{m} \frac{y - x + W_1}{r_0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{-\infty}^{\frac{12}{m} \frac{y - x + W_2}{r_0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{aligned} \quad (3)$$

再由式 (1) 可以得到

$$\left| P \left[W_2 < x + Z_m r_0 \frac{m}{12} - y < W_1 \right] - P \left[W_2 < x + Yr_0 \frac{m}{12} - y < W_1 \right] \right| < X,$$

$$\forall m > N_1$$

引理证毕.

引理 5 在假设 1 的前提下, 当 $n = 1$ 时, 由算法 1 产生的序列 $\{x_m^*\}_{m=1}^\infty$ 依概率收敛于 (P) 的全局极小点, 即对 $\forall X > 0$, 都有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(f(x_m^*) - f^* < X) = 1$$

证明 (1) 当问题 (P) 的目标函数 $f(x)$ 只有一个全局极小点 x_0 时, 由引理 2, 可令 $Yr = \frac{m}{12}$

$$= \sum_{i=1}^m Y_i r \frac{1}{12}, \text{ 其中 } Y_i \sim N(0, 1) (i = 1, 2, \dots, m), \text{ 且相互独立, 再由引理 3 可知, 对 } \forall X > 0,$$

$\exists N_2 > 0$, 使得

$$\left| P \left[\left(x(0) + \sum_{i=1}^m Y_i r \frac{1}{12} \right) \in D_0 \right] - 1 \right| < X,$$

$$\forall m > N_2$$

又联系引理 4 的结论, 得出

$$\left| P \left[\left(x(0) + Z_m r \frac{m}{12} \right) \in D_0 \right] - 1 \right| < X + X,$$

$$\forall m > \max\{N_1, N_2\}$$

即算法 1 在一维的情况下依概率收敛于惟一的全局极小点.

(2) 当目标函数有 p 个全局极小点时 ($p < \infty$), 令 $x_i \in S^*$, 由

$$\bigcup_{i=1}^p (x_i + W_{2,i}, x_i + W_{1,i}) \subset D_0 \subset \bigcup_{i=1}^p [x_i + W_{2,i}, x_i + W_{1,i}], W_{2,i} < W_{1,i} (i = 1, 2, \dots, p)$$

其中 $\bigcup_{i=1}^p (x_i + W_{2,i}, x_i + W_{1,i})$ 为不交并, 有

$$\begin{aligned} & P \left[\left(x(0) + Z_m r \frac{m}{12} \right) \in D_0 \right] = \\ & \sum_{i=1}^p P \left[W_{2,i} < x(0) + Z_m r \frac{m}{12} - x_i < W_{1,i} \right] = \\ & \sum_{i=1}^p P \left[W_{2,i} \leq x(0) + Z_m r \frac{m}{12} - x_i \leq W_{1,i} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

经同 (1) 相类似的证明可以得到

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left[\left(x(0) + \sum_{k=1}^m X_k \right) \in D_0 \right] = 1$$

因此在一维情况下, 算法 1 产生的序列 $\{x_m^*\}_{m=1}^\infty$ 依概率收敛于全局极小点. 引理证毕.

由以上的引理与假设, 可以得到在一维空间中算法 1 依概率收敛的结果, 推广到 n 维空间 ($n > 1$), 对 $\forall x_i \in S^*, \exists n > 0$, 使得当 $\|x - x_i\|_\infty < n$ 时, 有

$$|f(x) - f^*| < \frac{X}{2} \quad (5)$$

令 $Q_{x_i, r_i} = \{x \in K \mid \|x - x_i\|_\infty < r_i\}$, 且使得 Q

$= \bigcup_{i=1}^p Q_{x_i, r_i}$ 为不交并, 显然 $Q \subset D_0$, 那么

$$\begin{aligned} & P \left[\left(x(0) + \sum_{k=1}^m X_k \right) \in D_0 \right] \geq \\ & P \left[\left(x(0) + \sum_{k=1}^m X_k \right) \in Q \right] = \\ & \sum_{i=1}^p P \left[\left(x(0) + \sum_{k=1}^m X_k \right) \in Q_{x_i, r_i} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & P \left[\left(x(0) + \sum_{k=1}^m X_k \right) \in Q_{x_i, r_i} \right] = \\ & \prod_{j=1}^n P \left[\left| x^j(0) + \sum_{k=1}^m X_k^j - x_i^j \right| < r_j \right] \end{aligned} \quad (7)$$

因此

$$P \left[\left(x(0) + \sum_{k=1}^m X_k \right) \in D_0 \right] \geq$$

$$\sum_{i=1}^p \left[\prod_{j=1}^n P \left(\left| x^j(0) + \sum_{k=1}^m X_k^j - x^j \right| < r_j \right) \right] \quad (8)$$

利用引理 3 并通过与引理 5 相类似的证明可知

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\left[x(0) + \sum_{k=1}^m X_k \right] \in D_0 \right) = 1$$

定理 1 在假设 1 的前提下,对于优化问题 (P),由算法 1 产生的点列 $\{x^*\}_{m=1}^\infty$ 依概率收敛于 (P) 的全局极小点,即对于 $\forall X>0$,都有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(|f(x_m^*) - f^*| < X) = 1$$

定理 2 设 $\{X(m)\}_{m=1}^\infty$ 是由算法 3 产生的种群序列,其中 $x^*(m) \in X(m)$ 为第 m 代种群中的最优 点,即 $x^*(m) = \arg \min_{x \in X(m)} f(x)$,如果问题

(P) 中的目标函数和可行域满足假设 1,则种群序列依概率收敛于问题 (P) 的全局极小点,即对 $\forall X>0$,都有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(|f(x^*(m)) - f^*| < X) = 1$$

证明 首先针对 $n=1$ 的情况. 由于算法 3 的可并行性,以及前文所述,可以把多点迭代抽象为对单点迭代的加速. 为了证明本定理,只需把引理 4 中 Z_m 的形式写成

$$Z_m = \frac{\sum_{k=1}^m X_k - m_-}{m^e} \quad (9)$$

则 $\sum_{k=1}^m X_k = Z_m \cdot m^e + m_-$,其中 $_-$ 、 e^2 分别为随机

变量 Δx 的数学期望和方差. 利用引理 4 和引理 5 的证明过程,可以得到算法产生的点列依概率收敛于全局极小点. 推广到 n 维空间 ($n>1$),利用式 (5) ~ (8),即可得到算法依概率收敛的结果. 定理证毕.

可以看出,定理 2 的结果比文献 [8] 的结果更好些,因为当随机变量的概率密度函数为分段函数时,如均匀分布,是不能用文献 [8] 的结果来衡量的,而此处依然可以得到收敛的结果,这在下面的数值试验中也得到了证实.

3 数值试验

本章从文献 [12~ 16] 中选择几个算例,利用 Matlab 编制程序对算法 3 进行数值试验.

F1

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} [100(x_{i+1} - x_i)^2 + (x_i - 1)^2],$$

$$x_i \in [-30, 30]$$

$$x^* = (1 \cdots 1)^T, f^* = 0$$

文献 [12] 列出了 GA-ALOPEX 算法、改进的进化规划算法以及改进的遗传模拟退火算法对 F1 在维数 $n=2, 30$ 的计算结果,同算法 3 的计算效率比较见表 1.

表 1 F1 的计算结果
Tab. 1 Results for F1

n	算法	步数	平均最优值偏差	统计方差
2	基于均匀分布的进化策略(算法 2)	1 560	2.4×10^{-11}	3.9×10^{-11}
2	GA-ALOPEX 算法	118	1.2×10^{-5}	1.1×10^{-5}
2	改进的遗传模拟退火算法	50	1.3×10^{-10}	3.2×10^{-10}
30	基于均匀分布的进化策略(算法 2)	15 860	6.21×10^{-2}	7.65×10^{-2}
30	改进的进化规划算法	20 000	5.06	5.87
30	改进的遗传模拟退火算法	5 000	3.92	4.49

由表 1 可见:对于低维问题,算法 3 的精度提高了,但迭代步数较多;对于维数较高的问题,算法 3 能在较少迭代步数下找到精度较高的解.

F2 GP (Goldstein-Price function $n=2$)

$$\min f(x) = [1 + (x_1 + x_2 + 1)^2(19 - 14x_1 - 14x_2 + 3x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_1x_2)] \times [30 + (2x_1 - 3x_2)^2(18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2)],$$

$$-2 < x_i < 2, i = 1, 2$$

该问题有 4 个局部极小点,一个全局极小点 $(0, 1)^T$,最优值为 3.

F3 BR (Branin function)

$$\min f(x) = a_1(x_2 - a_2x_1^2 + a_3x_1 - a_4)^2 + a_5(1 - a_6) \cos x_1 + a_5$$

其中 $a_1 = 1, a_2 = 5.1/(\pi^2), a_3 = 5\pi, a_4 = 6, a_5 = 10, a_6 = 1/(\pi)$, $-5 \leq x \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 15$. 该问题全局极小点为 $(-\pi, 12.275)^T, (\pi, 12.275)^T, (3\pi, 2.475)^T$,最优值为 $5/(\pi)$.

F4 Hn (Hartmann functions: $n=3, 6$)

$$\min f(x) = - \sum_{j=1}^4 g \exp \left[- \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_j - p_{ij})^2 \right],$$

$$0 < x_j < 1, j = 1, 2, \cdots, n$$

当 $n = 3$ 时,全局极小点为 $(0.114 \quad 0.556 \quad 0.3117 \quad 0.6573)^T$,最优值为 -3.3224 . F4 的
极小点为 $(0.2017 \quad 0.1500 \quad 0.4769 \quad 0.852)^T$,最优值为 -3.8628 . 当 $n = 6$ 时,全局
参数见表 2.

表 2 F4 的参数列表
Tab. 2 Parameter list for F4

n	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	c_i	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}
3	1	3	10	30	1	0.3689	0.1170	0.2673
3	2	0.1	10	35	1.2	0.4699	0.4387	0.7470
3	3	3	10	30	3	0.1091	0.8732	0.5547
3	4	0.1	10	35	3.2	0.0381	0.5743	0.8828
n	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	a_{i6}	q
6	1	10	3	17	3.5	1.7	8	1
6	2	0.05	10	17	0.1	8	14	1.2
6	3	3	3.5	1.7	10	17	8	3
6	4	17	8	0.05	10	0.1	14	3.2
n	i	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}	p_{i4}	p_{i5}	p_{i6}	
6	1	0.1312	0.1696	0.5569	0.0124	0.8283	0.5886	
6	2	0.2329	0.4135	0.8307	0.3736	0.1004	0.9991	
6	3	0.2348	0.1451	0.3522	0.2883	0.3047	0.6650	
6	4	0.4047	0.8828	0.8732	0.5743	0.1091	0.0381	

F5 SH (Shubert function)

$$\min f(x) = \left\{ \sum_{i=1}^5 i \cos((i+1)x_1 + i) \right\} \times \left\{ \sum_{i=1}^5 i \cos((i+1)x_2 + i) \right\},$$
$$-10 \leq x_1, x_2 \leq 10$$

该问题有 760 个局部极小点,18 个全局极小点,最优值约为 -186.7309 .

F6 RA (Rastrigin function)

$$\min f(x) = n + \sum_{i=1}^n [x_i^2 - \cos(2\pi x_i)],$$
$$-5.12 \leq x_i \leq 5.12, i = 1, 2, \dots, n$$

$f(x)$ 是多峰函数,该问题只有一个全局极小点 $(0 \dots 0)^T$,最优值为 0,分别取 $n = 2, 100, 1000$ 进行计算.

在精度 $X = 10^{-4}$,初始步长 $r_0 = 1$ 的情况下,对上述函数进行 20~100 次计算的结果见表 3.

表 3 F2~F6 的数值计算结果
Tab. 3 Numerical results for F2~F6

算例	n	k	λ	T	s	r %	
F2	2	0.1	10	12	10	50	99
F3	2	0.7	10	12	10	260	100
F4	3	0.7	15	18	15	390	100
F4	6	0.6	30	36	30	570	97
F5	2	0.9	10	12	10	880	96
F6	2	0.7	10	12	10	260	96
F6	100	0.1	200	300	200	1 000	94
F6	1 000	0.1	800	800	800	4 000	100

注: n 为维数, s 为步数, r 为成功率

从表中可见,该算法具有较好的全局收敛性,对于上述测试函数,在一定的成功率下,能够收敛到目标函数的全局极小点,并且对于全局极小点不惟一的函数,如 F3 F5,在进行 100 次独立计算过程中,能够找到全部全局极小点. 对于较高维数连续函数优化问题,如 F6 中 $n = 100, 1000$ 的情况,在所设置的参数下,算法 3 能够较快地找到全局极小点,并且针对 $n = 100, 1000$ 的情况,成功率分别高于文献 [15] 的 80% 和 90%,说明了算法 3 的有效性.

算法中所设置的步长压缩系数,一方面减少了在当前解邻域内的盲目搜索,有利于提高收敛速度,但另一方面,限制了当前解搜索邻域的范围,使得算法可能落入局部极小的陷阱. 在种群规模确定的情况下,如何选取步长压缩系数的值,主要取决于目标函数在可行域内的性态. 如果在当前解邻域内函数变化得比较平缓,步长压缩系数可以取得比较小,如 F2 相反,如果函数在当前解邻域内变化比较剧烈,并且有多个局部极小点,此时步长压缩系数应取得较大些,一般在 $[0.7, 1)$ 范围内. 图 1 是对 F3 F5 以及 F6 ($n = 2$) 进行数值计算过程中,在变异种群规模和杂交种群规模不变的情况下,改变步长压缩系数,对成功率的影响. 从图中可以看到,提高步长压缩系数的值大致可以提高搜索的成功率,出现振荡是由于 $(\lambda + \lambda) - ES$ 是概率型算法.

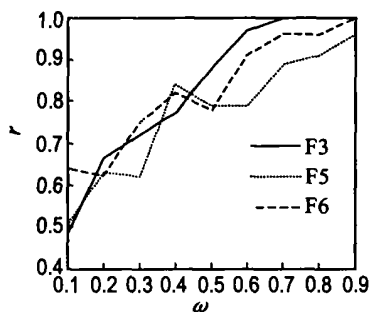


图 1 步长压缩系数对成功率的影响

Fig. 1 Effect of step compression coefficient upon successful rate

4 结 语

本文提出了一种新的进化策略,并给出了其依概率全局收敛的证明.数值试验表明对于维数较高的问题,该算法能在较少的迭代步数下找到精度较高的解.数值试验同时表明该算法具有较好的全局收敛性,在寻找全局最优解方面具有较高的成功率,这也说明了该算法的有效性.

参考文献:

- [1] FOGEL D B. An introduction to simulated evolutionary optimization [J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1994, 5(1): 3-14
- [2] FOGEL D B. Asymptotic convergence properties of genetic algorithms and evolutionary programming analysis and experiments [J]. *Cybern Syst*, 1994, 25(3): 389-407
- [3] 钱敏平, 龚光鲁. 从数学角度看计算智能 [J]. *科学通报*, 1998, 43(16): 1681-1695

- [4] 潘正君, 康立山, 陈毓屏. 演化计算 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1998
- [5] PARDALOS P M, ROMEIJN H E, TUY H. Recent developments and trends in global optimization [J]. *J Comput Appl Math*, 2000, 124: 209-228
- [6] 徐宗本, 陈志平, 章祥荪. 遗传算法基础理论研究的新近发展 [J]. *数学进展*, 2000, 29(2): 97-114
- [7] 徐宗本, 张讲社, 郑亚林. 计算智能中的仿生学: 理论与算法 [M]. 北京: 科学出版社, 2003
- [8] 李 宏, 唐焕文, 郭崇慧. 一类进化策略的收敛性分析 [J]. *运筹学学报*, 1999, 3(4): 79-83
- [9] 郭崇慧, 唐焕文. 一种改进的进化规划算法及其收敛性 [J]. *高校计算数学学报*, 2002, 24(1): 51-56
- [10] 王云诚, 唐焕文. 单峰函数最优化问题的进化策略 [J]. *计算数学*, 2000, 22(4): 465-472
- [11] 王云诚, 唐焕文. 单峰函数最优化问题的一个快速收敛的进化策略 [J]. *小型微型计算机系统*, 2002, 23(1): 1390-1392
- [12] 蓝 海, 王 雄, 王 凌. 复杂函数全局最优化的改进遗传退火算法 [J]. *清华大学学报(自然科学版)*, 2002, 42(9): 1237-1240
- [13] JI Ming-jun, TANG Huan-wen. Application of chaos in simulated annealing [J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2004, 21(4): 933-941
- [14] JI Ming-jun, TANG Huan-wen. Global optimizations and tabu search based on memory [J]. *Appl Math Comput (New York)*, 2004, 159(2): 449-457
- [15] 靳利霞, 唐焕文, 李 斌, 等. 一类连续函数模拟退火算法及其收敛性分析 [J]. *计算数学*, 2005, 27(1): 19-30
- [16] YIU K F C, LIU Y, TEO K L. A hybrid descent method for global optimization [J]. *J Global Optim*, 2004, 28(2): 229-238

A new kind of evolutionary strategy and its global convergence properties

ZHOU Dong-sheng^{* 1,2}, LI Bin³, TANG Huan-wen^{1,3}

(1.Inst. of Manage. Sci. and Eng., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China;

2.College of Econ. and Manage., Dalian Maritime Univ., Dalian 116026, China;

3.Dept. of Appl. Math., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China)

Abstract On the basis of the algorithm solving the single peak optimization problem, a new evolutionary strategy is put forward. In view of continuous function problems, it is first proved that the $(\underline{c} + \lambda)$ -ES algorithm based on uniform distribution converges in probability in a weaker condition by means of the central limit theorem. Then it is proved that the $(\underline{c} + \lambda)$ -ES algorithm which adopts the general continuous random variables as its variable operators converges in probability. Numerical results indicate that adopting the evolutionary strategy based on uniform distribution to solve the optimization problems of the continuous function with comparatively higher dimensions can converge to its global optimum solution quickly and effectively.

Key words evolutionary algorithm; evolutionary strategy; global convergence property; central limit theorem