

关于离散参数曲线网上曲率的一种刻画

侯中华*^{1,2}, 阎少宏^{1,2}

(1. 大连理工大学 应用数学系, 辽宁 大连 116024

2. 河北理工大学 理学院, 河北 唐山 063009)

摘要: 针对由参数曲线网形成的四边形网格, 提出了一种简洁快速的加细方法, 即在保持初始网格不变的情况下, 使每一个小极限曲面片为 C^2 , 而整体极限曲面为一次连续的. 应用该方法, 给出了一种四边形网格上任意顶点处的离散估计值的定义方法, 主要包括离散的 Gauss 曲率和平均曲率的定义. 最后, 实验验证表明了该方法的有效性和优越性.

关键词: 离散参数曲线网; 重心加细; 离散 Gauss 曲率; 离散平均曲率

中图分类号: O186.11 **文献标识码:** A

0 引言

近年来, 非光滑曲面渐渐成为许多领域中经常涉及到的几何对象. 除了航空、造船、汽车这三大制造业外, 在建筑设计、生物工程、医疗诊断、电子工程、机器人、服装鞋帽设计等技术领域中也逐渐可见其身影. 因此, 非光滑曲面的研究变得日益重要.

而在离散微分几何的研究中, 一个极为关键的问题就是曲率的定义. 当前, 针对三角形网格曲面, 有如下几种方法来定义曲率^[1]: (1) 密切抛物面方法; (2) 利用 Meusnier's 定理和 Euler 公式来联合计算的方法; (3) 利用 Gauss-Bonnet 公式的方法; (4) Watanabe 和 Belyaev 的方法; (5) Taubin 的方法.

本文的研究对象为离散参数曲线网, 主要是关于离散参数曲线网上的离散平均曲率和 Gauss 曲率的研究.

1 光滑表面上的 Gauss 曲率和平均曲率

定义 1 设 $D = I \times I, I = [0, 1]$, 则

$$S: r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in E^3, (u, v) \in D$$

为一曲面. 若 $r(u, v)$ 的每个分量函数是无限阶连续可微的, 且向量 $r_u \wedge r_v \neq 0$, 其中

$$r_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}, r_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

那么称 S 为 E^3 的一个正则曲面; 称 (u, v) 为该正

则曲面的 (坐标) 参数; 称 $n = \frac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|}$ 为该正则曲面的法向量.

正则曲面 S 的平均曲率和 Gauss 曲率可表示为

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}, K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (1)$$

其中 E, F, G, L, M, N 为第一、第二基本形式系数.

2 离散参数曲线网

对于正则曲面 $S: r = r(u, v), (u, v) \in D$. 考虑 D 的一个分法如下:

$$\Delta: 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_m < 1, \\ 0 < v_1 < v_2 < \dots < v_n < 1$$

经此分划后, 可以得到一个平面正交网, 记为 $(D, \Delta) = (D, \Delta)_h \cup (D, \Delta)_v$. 易见

$$(D, \Delta)_h = \{ [(1-t)u_i + tu_{i+1}, v_j], t \in [0, 1], i = 1, \dots, m-1, j = 1, \dots, n \}$$

$$(D, \Delta)_v = \{ [u_i, (1-t)v_j + tv_{j+1}], t \in [0, 1], i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n-1 \}$$

同时可得两族参数曲线

$$\begin{cases} C_{u,j}: r = r(u, v_j), u\text{-曲线}, 1 \leq j \leq n \\ C_{v,i}: r = r(u_i, v), v\text{-曲线}, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

它们构成了一个参数曲线网, 记为 (S, Δ) .

在文献 [3] 中, Hertrich-Jeromin 利用几何化的手段证明了如下的定理:

定理 1 光滑曲面 S 上的参数曲线网为共轭的, 当且仅当参数曲线网上所有的无穷小网格四

边形为平面四边形. 特别地, 此参数曲线网为曲率线的充要条件是它可以把该曲面分解成无穷小的正方形.

该定理的局限性是非常明显的. 因为, 对于共轭参数曲线网, 可知 $M = 0$. 其平均曲率与 Gauss 曲率可以表示为

$$H = \frac{LG + NE}{2(EG - F^2)}, K = \frac{LN}{EG - F^2}$$

而当参数曲线网为曲率线网时, $M = F = 0$. 其平均曲率与 Gauss 曲率可以表示为

$$H = \frac{LG + NE}{2EG}, K = \frac{LN}{EG}$$

因此, 若 $M \neq 0$, 正则面上的参数曲线网就不能把该曲面分解成平面四边形网格, 而只能得到一般的空间四边形网格. 于是, 研究一般的参数曲线网的网格问题就显得十分必要了.

定义 2 (S, Δ) 为参数曲线网, 记其上任意两条参数曲线的交点为

$$P_{i,j} = r(u_i, v_j); i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

以如下规则对 (S, Δ) 进行离散化:

- (1) 用直线段顺次连接交点 $P_{i,j}$ 与 $P_{i+1,j}, i = 1, \dots, m - 1, j = 1, \dots, n$.
- (2) 用直线段顺次连接交点 $P_{i,j}$ 与 $P_{i,j+1}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n - 1$.

以这种离散化规则所得到的 $(S, \Delta^*) = (S, \Delta^*)_h \cup (S, \Delta^*)_v$, 称为 (S, Δ) 的离散参数曲线网, 其中

$$(S, \Delta^*)_h = \{[(1-t)P_{i,j} + tP_{i+1,j}], t \in [0, 1], i = 1, \dots, m - 1, j = 1, \dots, n\},$$

$$(S, \Delta^*)_v = \{[(1-t)P_{i,j} + tP_{i,j+1}], t \in [0, 1], i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n - 1\}$$

由图 1 易见, 在离散参数曲线网 (S, Δ^*) 中, 任意 4 个顶点 $P_{i,j}, P_{i+1,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}$ 构成一个空间四边形, 不为平面四边形.

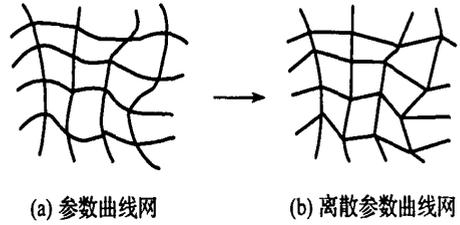


图 1 参数曲线网到离散参数曲线网的转化
Fig. 1 Transformation from parametric curves net to discrete parametric curves net

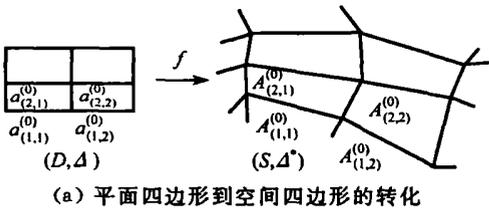
3 重心加细

定义 3 定义网格映射 $f: (D, \Delta) \rightarrow (S, \Delta^*)$ 如下:

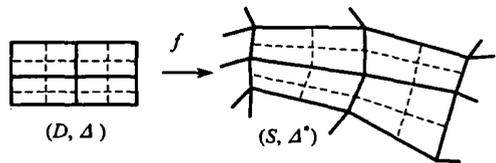
$$f: ((1-t)u_i + tu_{i+1}, v_j) \rightarrow (1-t)P_{i,j} + tP_{i+1,j}, t \in [0, 1], i = 1, \dots, m - 1, j = 1, \dots, n;$$

$$f: (u_i, (1-t)v_j + tv_{j+1}) \rightarrow (1-t)P_{i,j} + tP_{i,j+1}, t \in [0, 1], i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n - 1$$

这样 f 把 (D, Δ) 上的每一个交点和边映射为 (S, Δ^*) 的交点和边, 如图 2(a) 所示, (D, Δ) 与 (S, Δ^*) 的交点和边是一一对应的.



(a) 平面四边形到空间四边形的转化



(b) 相应的加细规则

图 2 (D, Δ) 与 (S, Δ^*) 在加细前后的表现

Fig. 2 The representation of (D, Δ) and (S, Δ^*)

下面, 在插值方法的基础上定义一种新的加细规则, 这种加细可以在保持初始网格不变的情况下, 使每一个小极限曲面片为 C^2 , 而整体极限曲面为一次连续的.

由于 f 把 (D, Δ) 中的每一个小矩形映射为 (S, Δ^*) 中的一个小空间四边形, 设 (D, Δ) 为由点 $\{a_{(1,1)}^{(0)} = (0, 0), a_{(1,2)}^{(0)} = (1, 0), a_{(2,1)}^{(0)} = (0, 1), a_{(2,2)}^{(0)} = (1, 1)\}$ 首尾相连组成的平面矩形, (S, Δ^*) 为由点 $\{A_{(1,1)}^{(0)} = f(a_{(1,1)}^{(0)}), A_{(1,2)}^{(0)} = f(a_{(1,2)}^{(0)}), A_{(2,1)}^{(0)} = f(a_{(2,1)}^{(0)}), A_{(2,2)}^{(0)} = f(a_{(2,2)}^{(0)})\}$ 首尾相连得到的空间四边形, 其对应情况如图 2(a) 所示.

整个加细过程描述如下:

(1) 取矩形 (D, Δ) 的重心和四边的中点, 得数列 $\{a_{(i,j)}^{(1)}\}$, 其中

$$a_{(1,1)}^{(1)} = a_{(1,1)}^{(0)},$$

$$a_{(1,2)}^{(1)} = \frac{a_{(1,1)}^{(0)} + a_{(1,2)}^{(0)}}{2}, a_{(1,3)}^{(1)} = a_{(1,2)}^{(0)}$$

$$a_{(2,1)}^{(1)} = \frac{a_{(1,1)}^{(0)} + a_{(2,1)}^{(0)}}{2},$$

$$a_{(2,2)}^{(1)} = \frac{a_{(1,1)}^{(0)} + a_{(1,2)}^{(0)} + a_{(2,1)}^{(0)} + a_{(2,2)}^{(0)}}{4},$$

$$a_{(2,3)}^{(1)} = \frac{a_{(1,2)}^{(0)} + a_{(2,2)}^{(0)}}{2}$$

$$a_{(3,1)}^{(1)} = a_{(2,1)}^{(0)}, a_{(3,2)}^{(1)} = \frac{a_{(2,1)}^{(0)} + a_{(2,2)}^{(0)}}{2},$$

$$a_{(3,3)}^{(1)} = a_{(2,2)}^{(0)}$$

记对 (D, Δ) 分划后所得的平面正交网为 $(D, \Delta)^{(1)} = (D, \Delta)_h^{(1)} \cup (D, \Delta)_v^{(1)}$, 其中
 $(D, \Delta)_h^{(1)} = \{ [(1-t)a_{(i,j)}^{(1)} + ta_{(\frac{i}{2}, \frac{j}{2})}^{(1)}], t \in [0, 1], i = 1, 2, j = 1, 2, 3\}$
 $(D, \Delta)_v^{(1)} = \{ [(1-t)a_{(i,j)}^{(1)} + ta_{(i, \frac{j}{2})}^{(1)}], t \in [0, 1], i = 1, 2, 3, j = 1, 2\}$

相应地, 取 (S, Δ^*) 的重心和对边中点, 得数列 $\{A_{(i,j)}^{(1)}\}$, 其中

$$A_{(1,1)}^{(1)} = A_{(1,1)}^{(0)}, A_{(1,2)}^{(1)} = \frac{A_{(1,1)}^{(0)} + A_{(1,2)}^{(0)}}{2},$$

$$A_{(1,3)}^{(1)} = A_{(1,2)}^{(0)}$$

$$A_{(2,1)}^{(1)} = \frac{A_{(1,1)}^{(0)} + A_{(2,1)}^{(0)}}{2},$$

$$A_{(2,2)}^{(1)} = \frac{A_{(1,1)}^{(0)} + A_{(1,2)}^{(0)} + A_{(2,1)}^{(0)} + A_{(2,2)}^{(0)}}{4},$$

$$A_{(2,3)}^{(1)} = \frac{A_{(1,2)}^{(0)} + A_{(2,2)}^{(0)}}{2}$$

$$A_{(3,1)}^{(1)} = A_{(2,1)}^{(0)}, A_{(3,2)}^{(1)} = \frac{A_{(2,1)}^{(0)} + A_{(2,2)}^{(0)}}{2},$$

$$A_{(3,3)}^{(1)} = A_{(2,2)}^{(0)}$$

记对 (S, Δ^*) 分划后得到的离散参数曲线网为 $(S, \Delta^*)^{(1)} = (S, \Delta^*)_h^{(1)} \cup (S, \Delta^*)_v^{(1)}$, 其中
 $(S, \Delta^*)_h^{(1)} = \{ [(1-t)A_{(i,j)}^{(1)} + tA_{(\frac{i}{2}, \frac{j}{2})}^{(1)}], t \in [0, 1], i = 1, 2, j = 1, 2, 3\}$
 $(S, \Delta^*)_v^{(1)} = \{ [(1-t)A_{(i,j)}^{(1)} + tA_{(i, \frac{j}{2})}^{(1)}], t \in [0, 1], i = 1, 2, 3, j = 1, 2\}$

从而, 由定义 3 可得映射 $f_n: (D, \Delta)^{(1)} \rightarrow (S, \Delta^*)^{(1)}$, 使得对于所有可能的 $i, j, f_n: a_{(i,j)}^{(1)} \rightarrow A_{(i,j)}^{(1)}$.

(2) 对“ (1)” 重复 n 次后, 有数列 $\{A_{(i,j)}^{(n)}\}$, 其中

$$A_{(i,j)}^{(n)} = \begin{cases} A_{(\frac{i-1}{2}, \frac{j-1}{2})}^{(n-1)} & ; i, j \text{ 都为奇数} \\ \frac{A_{(\frac{i}{2}, \frac{j-1}{2})}^{(n-1)} + A_{(\frac{i-1}{2}, \frac{j}{2})}^{(n-1)}}{2} & ; i \text{ 为偶数, } j \text{ 为奇数} \\ \frac{A_{(\frac{i-1}{2}, \frac{j}{2})}^{(n-1)} + A_{(\frac{i}{2}, \frac{j-1}{2})}^{(n-1)}}{2} & ; i \text{ 为奇数, } j \text{ 为偶数} \\ \frac{A_{(\frac{i}{2}, \frac{j}{2})}^{(n-1)} + A_{(\frac{i-1}{2}, \frac{j}{2})}^{(n-1)} + A_{(\frac{i}{2}, \frac{j-1}{2})}^{(n-1)} + A_{(\frac{i-1}{2}, \frac{j-1}{2})}^{(n-1)}}{4} & ; i, j \text{ 都为偶数} \end{cases}$$

记对 (S, Δ^*) 进行 n 次分划后得到的离散参数曲线网为 $(S, \Delta^*)^{(n)} = (S, \Delta^*)_h^{(n)} \cup (S, \Delta^*)_v^{(n)}$, 其中
 $(S, \Delta^*)_h^{(n)} = \{ [(1-t)A_{(i,j)}^{(n)} + tA_{(\frac{i}{2}, \frac{j}{2})}^{(n)}], t \in [0, 1], i = 1, \dots, 2^n, j = 1, \dots, 2^n + 1\}$
 $(S, \Delta^*)_v^{(n)} = \{ [(1-t)A_{(i,j)}^{(n)} + tA_{(i, \frac{j}{2})}^{(n)}], t \in [0,$

$$1], i = 1, \dots, 2^n + 1, j = 1, \dots, 2^n\}$$

由定义 3 可得映射 $f_n: (D, \Delta)^{(n)} \rightarrow (S, \Delta^*)^{(n)}$, 使得对于所有可能的 $i, j, f_n: a_{(i,j)}^{(n)} \rightarrow A_{(i,j)}^{(n)}$. 上述的加细过程称为重心加细.

考查数列 $\{A_{(i,j)}^{(n)}\}$. 易验证

$$A_{(i,j)}^{(n)} = \frac{(2^n + (i-1)(j-1) - 2^n(i+j-2))}{4} A_{(1,1)}^{(0)} + \frac{(j-1)(2^n - i + 1)}{4} A_{(1,2)}^{(0)} + \frac{(i-1)(2^n - j + 1)}{4} A_{(2,1)}^{(0)} + \frac{(i-1)(j-1)}{4} A_{(2,2)}^{(0)} = \frac{(i-1)(j-1)}{4} (A_{(1,1)}^{(0)} + A_{(2,2)}^{(0)} - A_{(1,2)}^{(0)} - A_{(2,1)}^{(0)}) + A_{(1,1)}^{(0)} + \frac{(i-1)}{2^n} (A_{(2,1)}^{(0)} - A_{(1,1)}^{(0)}) + \frac{(j-1)}{2^n} (A_{(1,2)}^{(0)} - A_{(1,1)}^{(0)}) = \frac{(i-1)(j-1)}{4} B_1 + \frac{(i-1)}{2^n} B_2 + \frac{(j-1)}{2^n} B_3 + B_4 \tag{2}$$

其中 $i = 1, \dots, 2^n + 1, j = 1, \dots, 2^n + 1$, 且 $B_1 = A_{(1,1)}^{(0)} + A_{(2,2)}^{(0)} - A_{(1,2)}^{(0)} - A_{(2,1)}^{(0)}, B_2 = A_{(2,1)}^{(0)} - A_{(1,1)}^{(0)}, B_3 = A_{(1,2)}^{(0)} - A_{(1,1)}^{(0)}, B_4 = A_{(1,1)}^{(0)}$.

设参数曲面 S 由如下参数方程给出:

$$W(s, t) = sB_1 + tB_2 + (s-t)B_3 + B_4, s, t \in [0, 1]$$

则 (S, Δ^*) 经 n 次分划后所得的离散参数曲线网可表示为

$$(S, \Delta^*)^{(n)} = \left\{ W\left[\frac{i-1}{2^n}, t\right], W\left[s, \frac{j-1}{2^n}\right] \mid i, j = 1, \dots, 2^n + 1, s, t \in [0, 1] \right\}$$

易见, $(S, \Delta^*)^{(n)} \subset W(s, t), n \in \mathbf{Z}^+$.

定理 2 $\bigcup_{n=1}^{\infty} (S, \Delta^*)^{(n)}$ 在参数曲面 S 中稠密.

证明 由实数集的完备性可知点集 $U = \left\{ \frac{k}{2^n} \mid 0 \leq k \leq 2^n, n = 1, 2, \dots \right\}$ 在 $[0, 1]$ 上稠密.

往证, 对任意的 $s_0, t_0 \in [0, 1]$, 存在 $\{X_m\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (S, \Delta^*)^{(n)}$, 使得 $\lim_{m \rightarrow +\infty} X_m = W(s_0, t_0)$.

因 U 在 $[0, 1]$ 上稠密, 故存在数列 $\{s_i\}, \{t_j\} \subset U$, 对任意的 $X > 0$, 存在 $M > 0$, 当 $i, j > M$ 时, $|s_i - s_0| < X, |t_j - t_0| < X$ 取子数列 $\{s_m\}, \{t_m\}$ 使得 $i_m > m, j_m > m, m = 1, 2, \dots$.

令 $X_m = W(s_m, t_m), m = 1, 2, \dots$, 则当 $m > M$ 时

$$|X_m - W(s_0, t_0)| < X(|B_1|X + |B_2| + |B_3|)$$

从而 $\lim_{m \rightarrow +\infty} X_m = W(s_0, t_0)$.

即证

4 离散曲率计算

理论上,对于一个离散参数曲线网不可定义曲率.因为它上面的每个面都是空间四边形,而且离散曲面在每个顶点和边上达不到一般光滑曲面的需要满足 2 次可微的要求.但是,考虑到离散参数曲线网可以作为一个未知曲面的分段线性近似,本文利用离散参数曲线网上给定的信息来估计该未知曲面的 Gauss 曲率和平均曲率,进而研究其几何性质.

应用重心加细,现给出一种方法来计算任意顶点处的离散平均曲率和 Gauss 曲率.

如图 3 所示,设顶点 p 所在的四个空间四边形 $p v_i v_{i+1} v_{i+2}, i = 1, 3, 5, 7$,在加细后生成的小极限曲面片为 $S_i, i = 1, \dots, 4$. 特别地,把 $p v_7 v_8 v_1$ 加细后生成的小极限曲面片记为 S_4 . 并且,定义各顶点处的坐标为

$p(p^1, p^2, p^3), v(v^1, v^2, v^3), i = 1, \dots, 8$
 以曲面 S_1 为例,其参数方程为

$$r(t, s) = (x_1(t, s), x_2(t, s), x_3(t, s)), \quad t \in [0, 1], s \in [0, 1] \quad (3)$$

其中 $x_i(t, s) = s t V_{ip} + s V_{3i} + t V_{2i} + p_i$. 而 $V_{2i} = v_{2i} - p_i, V_{3i} = v_{3i} - p_i, V_{ip} = v_{2i} + p_i - v_{1i} - v_{3i}, i = 1, 2, 3$

其在顶点 p 处的第一、第二基本形式系数为

$$E = \sum_{i=1}^3 V_{2i}^2, \quad F = \sum_{i=1}^3 V_{1i} V_{3i}, \quad G = \sum_{i=1}^3 V_{3i}^2,$$

$$L = 0, \quad M = \frac{(V_1, V_3, V)}{|V_1 \times V_3|}, \quad N = 0$$

其中 $V_1 = (V_{11} \ V_{12} \ V_{13}), V_3 = (V_{31} \ V_{32} \ V_{33}), V = (V_{1p} \ V_{2p} \ V_{3p}), (V_1, V_3,$

$V)$ 为 3 个向量的混合积.

从而,利用式 (1) 即可得到曲面 S_i 上顶点 p 处的平均曲率和 Gauss 曲率.

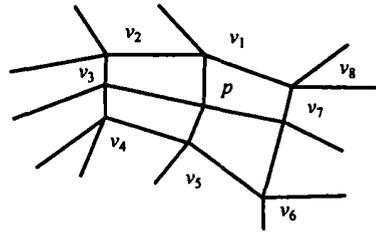


图 3 离散参数曲线网上顶点 p 处的邻域
 Fig. 3 The neighborhood of vertex p on the discrete parametric curves net

定义 4 (1) 定义离散参数曲线网 (S, Δ^*) 上顶点 p 处的离散平均曲率

$$H_p = \sum_{i=1}^4 H_i \mathbb{T}_i \left| \sum_{i=1}^4 \mathbb{T}_i \right| \quad (4)$$

(2) 定义离散参数曲线网 (S, Δ^*) 上顶点 p 处的离散 Gauss 曲率

$$K_p = \sum_{i=1}^4 K_i \mathbb{T}_i \left| \sum_{i=1}^4 \mathbb{T}_i \right| \quad (5)$$

式中: $H_i, K_i (1 \leq i \leq 4)$ 分别为曲面片 S 在 p 点的平均曲率和 Gauss 曲率; $\mathbb{T}_i = \angle v_{2i-1} p v_{2i+1} (1 \leq i \leq 4)$ 为向量 $p v_{2i-1}$ 与 $p v_{2i+1}$ 之间的夹角, 特别地, $\mathbb{T}_4 = \angle v_7 p v_1$.

5 试验结果

5.1 对离散参数曲线网加细前后的比较

给定任意一个离散参数曲线网,应用本文的规则对它进行加细,得到一次连续的极限曲面,如图 4 所示.

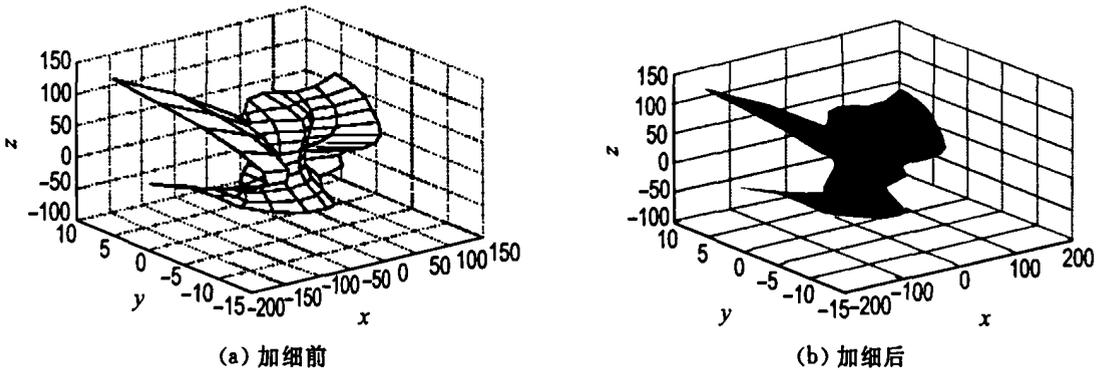


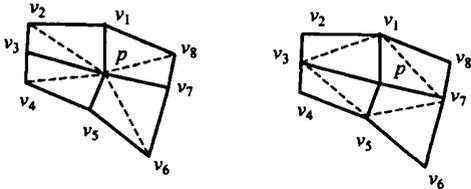
图 4 离散参数曲线网在加细前后的对比

Fig. 4 The comparison of the status of discrete parametric curves net between and after subdivision

5.2 本文方法与文献 [2] 中方法的比较

对于四边形网格曲面,为了获得任意顶点处离散的法向量,只有两种剖分成三角形网格曲面的方法,如图 5 所示. 进而,可应用文献 [2] 中的

方法来计算离散的平均曲率和 Gauss 曲率,所得结果分别记为 $Watan(1)$ 和 $Watan(2)$. 其中 $Watan(1)$ 对应图 5(b), $Watan(2)$ 对应图 5(a).



(a) p 点处的 8 个三角形 (b) p 点处的 4 个三角形
图 5 顶点 p 处不同的剖分

Fig. 5 The different subdivisions at vertex p

例 1 在表 1 中,实验对象为 Peaks 函数,主要是比较顶点 $(0, 0, 0.9810)$ 处的离散 Gauss 曲率和平均曲率值. 其中 Peaks 函数的参数表示可以写成如下形式:

$$r(x, y) = \begin{cases} x, y, 3(1-x)^2 e^{-x^2 - (y+1)^2} - \\ 10 \left[\frac{x}{5} - x^3 - y^5 \right] e^{-x^2 - y^2} - \\ \frac{1}{3} e^{-(x+1)^2 - y^2} \end{cases}$$

表 1 不同方法下离散平均曲率和 Gauss 曲率值 (例 1)

Tab. 1 The numerical value of discrete Gauss curvature and mean curvature using different methods (Example 1)

方法	Gauss 曲率	平均曲率
Peaks(真实)	- 0.043 2	0.188 2
本文	- 0.047 9	0.201 1
Watan(1)	- 0.002 9	- 0.045 3
Watan(2)	- 0.220 1	0.142 2

例 2 在表 2 中,比较了由正螺面(其参数表示为 $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 3v)$) 获得的离散参数曲线网在不同方法下顶点 $(0, 0, 0)$ 处的离散 Gauss 曲率和平均曲率值.

由上面两个例子可以发现本文的方法能达到很好的结果,基本上能很真实地反映一个离散参

数曲线网上各个顶点处的 Gauss 曲率和平均曲率值.

表 2 不同方法下离散平均曲率和 Gauss 曲率值 (例 2)

Tab. 2 The numerical value of discrete Gauss curvature and mean curvature using different methods (Example 2)

方法	Gauss 曲率	平均曲率
正螺面(真实)	- 0.111 1	0
本文	- 0.110 7	0
Watan(1)	0	0
Watan(2)	- 0.040 0	$4.417 4 \times 10^{-18}$

6 结 语

本文利用微分几何的方法,将参数曲线网离散化得到四边形网格,提出了一种相应的加细方法. 应用该方法,给出了四边形网格上任意顶点处的离散估计值的一种定义方法.

参考文献:

- [1] TATIANA S, EVEGENY M, OCTAVIAN S, *et al.* A comparison of Gaussian and mean curvatures estimation methods on triangular meshes [J]. **ICRA**, 2003, **1**: 1021-1026
- [2] KOUKI W, ALEXANDER B. Detection of salient curvature features on polygonal surfaces [J]. **Comput Graphics Forum**, 2001, **20**(3): 385-392
- [3] HERTRICH-JEROMIN U. The surfaces capable of division into infinitesimal squares by their curves of curvature A nonstandard analysis approach to classical differential geometry [J]. **Math Intell**, 2000, **22**: 54-61
- [4] DO CARMO M P. **Differential Geometry of Curves and Surface** [M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1976

A kind of definition of curvatures on discrete parametric curves net

HOU Zhong hua^{* 1}, YAN Shao hong^{1,2}

(1. Dept. of Appl. Math., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China;
2. College of Sci., Hebei Univ. of Polytech., Tangshan 063009, China)

Abstract To get a more efficient numerical method of computing the discrete curvatures of a surface, a new subdivision rule of the discrete parametric curves net is proposed, that is, in the case of keeping initial network, each of limit surface is C^2 , and the unitary limit surface is C^1 . Applying this rule, a kind of the definition of the discrete estimated value on the quadrilateral net is given. It includes the definition of discrete Gauss curvature and discrete mean curvature. At last, the validity and superiority of this definition are illustrated by numerical experiments.

Key words discrete parametric curves net; barycentric subdivision; discrete Gauss curvature; discrete mean curvature