

船舶、土木工程

文章编号: 1000-8608(2007)02-0201-05

协作体系斜拉桥竖向自由振动理论研究

余报楚^{1,2}, 张哲^{*1}, 刘春城¹, 朱巍志¹

(1.大连理工大学 桥梁工程研究所, 辽宁 大连 116024
2.大连水产学院 土木工程学院, 辽宁 大连 116023)

摘要: 基于大位移非线性弹性理论的广义变分原理,考虑加劲梁轴向压缩应变能和剪切应变能的影响,建立了协作体系斜拉桥空间耦合自由振动的大位移不完全广义势能泛函,通过约束变分导出了协作体系斜拉桥的加劲主梁竖向挠曲振动微分方程.同时以金马大桥为例,构造了T构与斜拉桥协作体系的边界条件.求解出的竖向振动方程的解析解,与有限元数值结果对比吻合良好,证明了方法的正确性.这一方法可为同类型结构的固有振动特性分析提供参考.

关键词: 协作体系;耦合;自由振动;泛函;广义变分
中图分类号: U448.232 **文献标识码:** A

协作体系桥梁的自由振动特性研究是抗风、抗震等振动效应研究的基础^[1~5].近年来,协作体系以其优美的外形、良好的力学性能以及工程经济性越来越受到青睐^[6],因此对协作体系桥的固有振动性状研究也越来越显得重要.目前对于斜拉桥的自由振动研究大部分工作都是基于有限元理论的数值解,即使有少部分解析理论的研究也忽略了主梁的转动惯量和横向剪切的影响^[3~7].而对协作体系斜拉桥的空间自由振动解析理论研究更是少见,事实上,这种协作体系结构除了与传统的斜拉桥存在竖向、横向、扭转及纵向振动的耦合以及主塔振动以外,协作体系两边T构的作用,使得其边界条件区别于传统的普通斜拉桥的边界条件,这会使得其振动频率方程求解变得更加困难.本文基于大位移非线性弹性理论的广义变分原理,考虑加劲梁轴向压缩应变能和剪切应变能的影响,建立大位移不完全广义势能泛函^[8],得到竖向挠曲振动非线性微分方程,并通过构造协作体系的边界条件,得到竖向振动方程的解析解,以便为同类桥梁的固有振动性状分析提供理论依据.

1 大位移不完全广义势能泛函建立

以图1所示T构和单塔斜拉桥协作体系结构为例,根据斜拉桥和T构协作体系的结构特点,引入如下假定:

- (1) 所有的材料符合胡克定律;
- (2) 成桥状态下,恒载沿跨度均匀分布,斜拉索呈线状;
- (3) 加劲梁视为等截面连续梁,不考虑加劲梁的竖曲线及拱度;
- (4) 斜拉索视为是稠密的,可以比拟为仅在斜拉索轴向有抗力的均匀膜,不计斜拉索的拉伸;
- (5) 不考虑塔的扭转变形及轴向压缩变形,仅仅考虑其横向和纵向变位;
- (6) 考虑加劲梁在扭转时的翘曲变形,但不考虑断面的畸变(周边变形),即假设横隔梁是稠密的,且剪切刚度为无穷大.(下面公式标注说明:下标s代表加劲主梁,t代表主塔.)

若记主塔和加劲主梁的应变能分别为 U_{∞} 和 U_{se} ,重力势能为 U_g ,动能为 T ,则协作体系斜拉桥的空间耦合振动问题的大位移不完全广义势能为^[8]

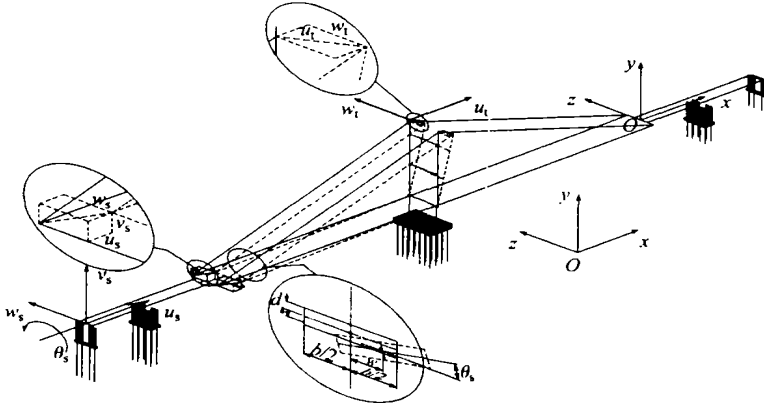


图 1 协作体系斜拉桥的振动变位

Fig. 1 Vibration deformation of collaborated system cable-stayed bridge

$$C^* = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ T - U_{te} - U_{se} - U_g - \sum_{i=1}^2 \int_0^{L_i} \lambda f dx_i \right\} dt =$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_0^{L_i} \frac{q_s}{g A_s} \left[I_{sy} \left(\frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \right. \right.$$
$$I_{sz} \left(\frac{\partial v_s}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + (I_{sy} + I_{sz}) \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial t} \right)^2 +$$
$$A_s \left(\frac{\partial u_s}{\partial t} \right)^2 + A_s \left(\frac{\partial v_s}{\partial t} \right)^2 + A_s \left(\frac{\partial w_s}{\partial t} \right)^2 \Big] dx_i +$$
$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_0^{H_i} \frac{q_t}{g A_t} \left[I_{tz} \left(\frac{\partial u_t}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + I_{ty} \left(\frac{\partial w_t}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \right.$$
$$A_t \left(\frac{\partial u_t}{\partial t} \right)^2 + A_t \left(\frac{\partial w_t}{\partial t} \right)^2 \Big] dy_i -$$
$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left[\int_0^{L_i} U_{E1} J_{sk} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right)^2 dx_i + \right.$$
$$\int_0^{L_i} G J_{st} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} E I_{sy} \left(\frac{\partial w_s}{\partial x^2} \right)^2 dx_i +$$
$$\int_0^{L_i} E I_{sz} \left(\frac{\partial v_s}{\partial x^2} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} E A_s \left(\frac{\partial u_s}{\partial x} \right)^2 dx_i +$$
$$\int_0^{L_i} N_x \left(\frac{\partial v_s}{\partial x} \right)^2 dx_i + \int_0^{L_i} - G A_s \left(\frac{\partial u_s}{\partial y} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \right)^2 dx_i +$$
$$\int_0^{L_i} - G A_s \left(\frac{\partial u_s}{\partial z} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 dx_i -$$
$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left[\int_0^{H_i} E I_{tz} \left(\frac{\partial u_t}{\partial y^2} \right)^2 dy_i + \right.$$
$$\int_0^{H_i} - G A_t \left(\frac{\partial u_t}{\partial y} \right)^2 dy_i + \int_0^{H_i} - G A_t \left(\frac{\partial w_t}{\partial y} \right)^2 dy_i +$$
$$\int_0^{H_i} E I_{ty} \left(\frac{\partial w_t}{\partial y^2} \right)^2 dy_i - \sum_{i=1}^2 \left[\int_0^{L_i} q_s v_s dx_i \right] -$$
$$\sum_{i=1}^2 \int_0^{L_i} \lambda \left[\left(u_s + \frac{b}{2} \frac{\partial w_s}{\partial x} - u_t \right)^2 + (w_s - \right.$$
$$d_t \theta_s - w_t)^2 + \left. \left(v_s + \frac{b \theta_s}{2} - v_t \right)^2 \right] dx_i \Big\} dt$$

式中 λ 为 Lagrange 乘子. $U = J_p / (J_p - J_t)$, $E_1 = E / (1 - \nu^2)$, J_p 为断面的方向性惯性矩, J_t 为圣维南扭转常数, E 为加劲梁的弹性模量, ν 为泊松比. 本文不考虑断面的畸变 (周边变形), 即假设横隔梁是稠密的, 且剪切刚度为无穷大. 扭转刚度为 GJ_t , b 为桥宽, d_t 为加劲梁扭转中心距吊点的竖向高度.

2 协作体系的竖向自由振动微分方程及简化求解^[8-10]

将泛函 C^* 分别对 u_s, v_s 取变分, 则加劲主梁的竖向振动方程为

$$\frac{q_s}{g} v_s - \frac{q_s}{g A_s} I_{sz} \frac{\partial v_s}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} + E I_{sz} \frac{\partial v_s}{\partial x^4} - N_x \frac{\partial v_s}{\partial x^2} -$$
$$- G A_s \left(\frac{\partial v_s}{\partial x^2} + \frac{\partial u_s}{\partial y} \frac{\partial v_s}{\partial x} \right) = 0 \quad (2)$$

事实上各向振动方程在耦合自由振动方程中都占主导作用, 若忽略非线性耦合项竖向振动方程为

$$E I_{sz} \frac{\partial v_s}{\partial x^4} - \frac{q_s}{g A_s} I_{sz} \frac{\partial v_s}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} - (N_x + - G A_s) \frac{\partial v_s}{\partial x^2} +$$
$$\frac{q_s}{g} v_s = 0 \quad (3)$$

令 $A = E I_{sz}, B = \frac{q_s}{g A_s} I_{sz},$

$$C = N_x + - G A_s, D = \frac{q_s}{g}$$

则方程 (3) 变为

$$A \frac{\partial v_s}{\partial x^4} - B \frac{\partial v_s}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} - C \frac{\partial v_s}{\partial x^2} + D v_s = 0 \quad (4)$$

(1) 设 $v(x, t) = \bar{v}(x) e^{iky}$, 对方程 (4) 作时间变量分

离,那么方程 (4) 简化为一个四阶常系数齐次常微分方程

$$A \frac{\partial^4 \bar{v}_s}{\partial x^4} + (Bk^2 - C) \frac{\partial^2 \bar{v}_s}{\partial x^2} - Dk^2 \bar{v}_s = 0 \quad (5)$$

所对应的齐次方程的通解可表达为

$$\bar{v}_s(x) = C_1 \text{ch } k_1 x + C_2 \text{sh } k_1 x + C_3 \cos k_2 x + C_4 \sin k_2 x \quad (6)$$

其中

$$k_1 = \frac{- (Bw^2 - C) + \sqrt{(Bw^2 - C)^2 + 4ADw^2}}{2A},$$
$$k_2 = \frac{(Bw^2 - C) + \sqrt{(Bw^2 - C)^2 + 4ADw^2}}{2A}$$

协作体系的斜拉桥在竖向挠曲自由振动时的边界条件处理见图 2. 其中 K_R K_M 分别为两边的巨型 T 构所提供的竖向挠曲变形刚度和弯曲刚度.

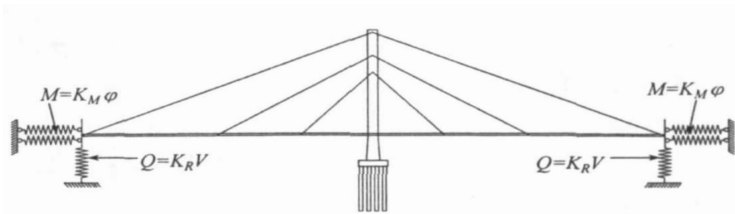


图 2 协作体系的斜拉主桥和 T 构边界条件

Fig. 2 Boundary condition of collaborated system with cable-stayed bridge and T-shape rigid structure

$$x = 0 \text{ 时, } \bar{u}_s(x = 0) = C_1 \times 1 + C_2 \times 0 + C_3 \times 1 + C_4 \times 0 = 0$$

$$x = 0 \text{ 时, } \bar{h}_1(x = 0) = C_1 k_1 \times 0 + C_2 k_1 \times 1 - C_3 k_2 \times 0 + C_4 k_2 \times 1 = 0$$

$$x = L \text{ 时, } \bar{Q}_s(x = L) = -K_R \bar{u}_s(x = L)$$
$$EI \frac{d^3 \bar{u}_s(x = L)}{dx^3} = -K_R \bar{u}_s(x = L) \text{ (令 } \bar{K}_R = \frac{K_R}{EI} \text{)}$$

$$x = L \text{ 时, } \bar{M}_s(x = L) = -K_M \bar{h}_1(x = L)$$
$$EI \frac{d^2 \bar{u}_s(x = L)}{dx^2} = -K_M \frac{d\bar{h}_1(x = L)}{dx} \text{ (令 } \bar{K}_M = \frac{K_M}{EI} \text{)}$$

则有

$$C_1 (k_1^2 \text{ch } k_1 l + \bar{K}_M k_1 \text{sh } k_1 l) + C_2 (k_1^2 \text{sh } k_1 l + \bar{K}_M k_1 \text{ch } k_1 l) + C_3 (-k_2^2 \cos k_2 l - \bar{K}_M k_2 \sin k_2 l) + C_4 (-k_2^2 \sin k_2 l + \bar{K}_M k_2 \cos k_2 l) = 0$$

将以上 4 个边界条件的方程联立构成如下线性齐次方程组:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & k_2 \\ (k_1^3 \text{sh } k_1 l + \bar{K}_R \text{ch } k_1 l) & (k_1^3 \text{ch } k_1 l + \bar{K}_R \text{sh } k_1 l) & (k_2^3 \sin k_2 l + \bar{K}_R \cos k_2 l) & (-k_2^3 \cos k_2 l + \bar{K}_R \sin k_2 l) \\ (k_1^2 \text{ch } k_1 l + \bar{K}_M k_1 \text{sh } k_1 l) & (k_1^2 \text{sh } k_1 l + \bar{K}_M k_1 \text{ch } k_1 l) & (-k_2^2 \cos k_2 l - \bar{K}_M k_2 \sin k_2 l) & (-k_2^2 \sin k_2 l + \bar{K}_M k_2 \cos k_2 l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

如果当 C_1 C_3 C_3 C_4 不全为零时,振型方程才有工程意义,所以有以下振动频率方程:

通过高斯消元整理后有 $C_1 = -C_3$, $C_2 =$

$$-\frac{k_2}{k_1} C_4, \text{ 于是}$$

$$\begin{vmatrix} - (k_1^3 \text{sh } k_1 l + \bar{K}_R \text{ch } k_1 l) + (k_2^3 \sin k_2 l + \bar{K}_R \cos k_2 l) & \frac{k_2}{k_1} (k_1^3 \text{ch } k_1 l + \bar{K}_R \text{sh } k_1 l) + (-k_2^3 \cos k_2 l + \bar{K}_R \sin k_2 l) \\ - (k_1^2 \text{ch } k_1 l + \bar{K}_M k_1 \text{sh } k_1 l) + (-k_2^2 \cos k_2 l - \bar{K}_M k_2 \sin k_2 l) & \frac{k_2}{k_1} (k_1^2 \text{sh } k_1 l + \bar{K}_M k_1 \text{ch } k_1 l) + (-k_2^2 \sin k_2 l + \bar{K}_M k_2 \cos k_2 l) \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

方程 (8) 就是协作体系的竖向挠曲振动频率方程.

3 算 例

以金马大桥^[6]为例采用非线性搜索方法求解振动频率方程. 金马大桥主桥创造性地采用独塔斜拉桥与 T 构协作的这种崭新的结构体系是金马大桥取得成功设计和施工的关键技术所在. 独塔斜拉桥结构首先在施工和设计上都要比双塔斜拉桥简单经济; 斜拉桥悬臂端竖向位移受较强的 T 构约束, 整体体系的水平力主要由斜拉桥主墩承受, 由于斜拉桥跨径大, 主墩必然设计得强大, 此外独塔下的主墩基础既要承受全桥拉索传来的竖向荷载, 同时抵抗强大的船撞力 (12 000 kN) 的要求, 可谓一举两得的设计. 协作 T 构的运用使在不增加长边索的情况下加大了主桥的跨径. 而且这种桥梁结构形式与当地环境也是非常协调的. 由于结构对称, 横载及温度力作用下主塔弯矩接近于零, 仅在活载下有较小的弯矩, 主塔只须构造配筋. T 构墩设计成柔性也适应了温度变形. 采用协作体系的主桥结构布置协调, 受力合理. 但是该体系是否稳定的问题曾经一度引起国内外一些专家的激烈讨论. 所谓缆索不稳定体系是指主梁及索塔连接处视为铰接后的一种虚拟现

象, 而主梁、塔均为有足够强度的抗弯曲构件, 因而结构是稳定的, 并有足够的刚度^[11]. 结构材料特性和截面特性如下: $E = 3.5 \times 10^7$ kPa, $G = 1.5 \times 10^7$ kPa, 混凝土泊松比 $\nu = 0.2$, $A_s = 14.07$ m², $I_\infty = 6.337 4$ m⁴, 混凝土容重取 $d = 26$ kN/m³, 边界条件 $K_R = 0.422 8 \times 10^5$ kN/m, $K_M = 0.269 1 \times 10^8$ kN·m/rad, $L = 223$ m 代入 A, B, C, D, K_M, K_R , $A = 2.218 09 \times 10^8$ kN·m², $B = 2.653$ kN·m, $C = 4.230 825 \times 10^7$ kN, $D = 37.328 51$ kN/m, $L = 223$ m, $K_R = 0.121 35$ /m³, $K_M = 0.190 6 \times 10^{-3}$ /(rad·m), 下面将本文推导方程的解析解与有限元软件 MIDAS 数值解进行比较, 取前 4 阶振型, 结果见表 1 和图 3.

表 1 本文推导的方程解与有限元数值解计算结果
Tab. 1 Analytic solution and FEM numerical solution

振型	k/Hz		
	本文推导公式的解	工程有限元数值解	误差 /%
1阶	0.288 8	0.277 7	3.99
2阶	0.578 9	0.561 3	3.13
3阶	0.677 4	0.666 7	1.07
4阶	0.732 1	0.714 5	2.46

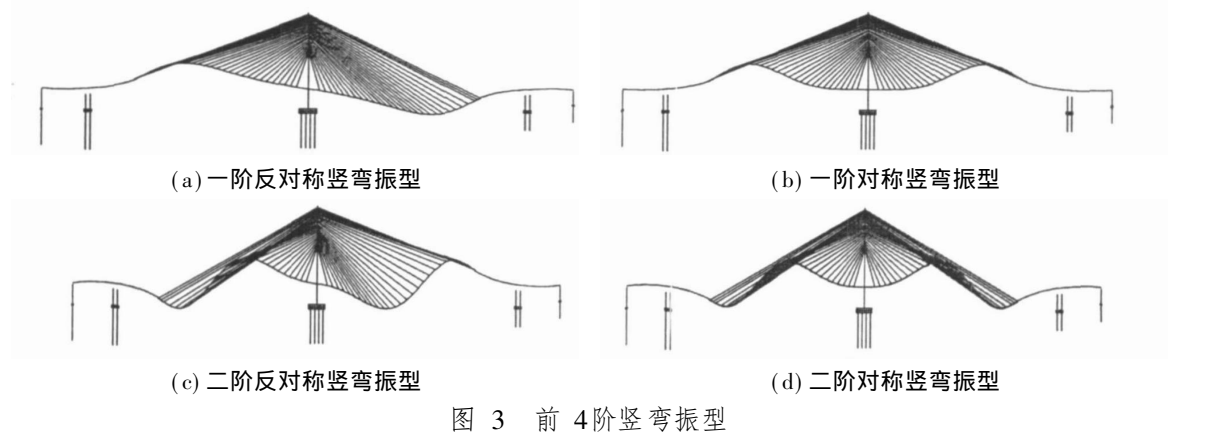


图 3 前 4 阶竖弯振型
Fig. 3 Four orders vibration modals

4 结 论

(1) 本文考虑压弯耦合效应、剪切变形和扭转变形的影响建立了协作体系斜拉桥的自由振动微分方程, 从基础微分方程可以看出: 竖向振动微分方程为非线性方程, 忽略非线性项的影响, 竖向绕曲振动将不与横向绕曲振动及扭转振动耦合. (2) 协作体系斜拉桥与普通斜拉桥的一个显

著区别是在竖向振动方程中, 协作体系两端部有一个竖向的绕曲刚度 K_R 和一个竖向弯矩刚度 K_M 的存在, 这使得利用边界条件来求解振动方程变得十分复杂; 此外在求解振动频率方程的过程中, 如果不考虑剪切效应, 那么主梁的轴向压力会对振动频率产生一定作用, 但轴向压力对振动频率的影响比剪切效应小得多, 几乎可以忽略. 此外, 在利用非线性搜索求解方程时, 发现初值的设

置变化的影响非常敏捷,方程的根跳跃非常显著,这也印证了结构的前近百阶振型的频率分布十分密集,与有限元数值解的规律吻合.

(3) 通过解析解与有限元数值解的比较可以看出:解析解普遍大于非线性数值解,最大偏差不超过 5%,原因是解析解中忽略了非线性项和耦合项的影响,使结构的几何刚度增大,频率增大. 以上分析表明:忽略非线性项得到的解析解可以很好地反映结构的自振特性,得到的结论是可靠的.

参考文献:

[1] 李国豪. 桥梁结构稳定与振动 [M]. 北京: 中国铁道出版社, 1992

[2] 武秀丽. 结构工程中的振动理论及其应用 [M]. 北京: 中国铁道出版社, 1980

[3] 陈 淮. 大跨度斜拉桥动力特性分析 [J]. 计算力学学报, 1997, 14(1): 57-63

[4] 陈幼平. 斜拉桥地震反应特性的研究 [D]. 武汉: 铁道部科学研究院, 1994

[5] 伏魁先, 张惠群. 几何非线性因素对密索型斜拉桥自振特性的影响 [J]. 西南交通大学学报, 1990, 76(2): 10-13

[6] 颜 娟. 金马大桥工程的结构分析与研究 [M]. 北京: 中国铁道出版社, 1980

[7] ALLAM S M, DATTA T K. Analysis of cable-stayed bridges under multi-component random ground motion by response spectrum method [J]. Eng Struct, 2000, 22 1365-1367

[8] 钱伟长. 变分法及有限元 [M]. 北京: 科学出版社, 1980

[9] 楼梦麟, 任志刚. Timoshenko 简支梁的振动模态特性精确解 [J]. 同济大学学报 (自然科学版), 2002, 8(2): 911-915

[10] 孙焕纯, 曲乃泗, 林家浩. 计算结构动力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1989

[11] 张 哲. 金马大桥设计实践与理论探索 [J]. 大连理工大学学报, 1999, 39(3): 285-293

(ZHANG Zhe. Design practice and theoretical exploration of Jinma Bridge [J]. J Dalian Univ Technol, 1999, 39(3): 285-293)

Theoretical study of vertical free vibration of collaborated system cable-stayed bridge

YU Bao-chu^{1,2}, ZHANG Zhe^{* 1}, LIU Chun-heng¹, ZHU Wei-zhi¹

(1.Inst. of Bridge Eng., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China;
2.School of Civil Eng., Dalian Fisheries Univ., Dalian 116023, China)

Abstract Based on the generalized potential variational principle of nonlinear elasticity theory with large deflection, the incomplete generalized potential energy functional with large deflection is established on the space coupling free vibration of collaborated system structure by considering the effect of axial compressive and shearing strain energy of stiffening girder. By constraint variation, the differential equations of vertical vibration of the stiffening girder of collaborated system cable-stayed bridge were derived. The Golden Horse Bridge with T-shape rigid structure and single-tower cable-stayed bridge is taken as an example for the solution of vertical vibration differential equation through the presented boundary condition. By comparing with finite element numerical results the correctness of the method is testified, and the method can provide more attention to the analysis of free vibration of this kind of structure.

Key words collaborated system; coupling; free vibration; functional; generalized variation