

广义高斯和分形序列及其 M-J集研究

王兴元*, 常沛军

(大连理工大学 电子与信息工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 推广了 Lakhtakia 和 Berndt 等的工作, 分析了分形(自相似)序列的生成规则, 给出了二次高斯和所生成的分形序列的标度及维数. 利用逃逸时间算法, 构造了广义高斯和的 Mandelbrot-Julia 集 (M-J 集), 并从理论上分析了 M-J 集的周期性和结构特征. 结果表明: M-J 集由许多螺旋状的花束构成, 这种结构在不同水平上嵌套出现, 体现了明显的自相似分形特性; 随指数值增大, M-J 集中的精细花瓣结构增多并趋于复杂; J 集在 x 轴方向上具有周期性. 本研究成果有助于理解广义高斯和的动力学性质.

关键词: 分形序列; 广义高斯和; M-J 集; 周期性
中图分类号: TP301.5 **文献标识码:** A

0 引言

20 世纪 70 年代, 著名数学家 Mandelbrot 根据 Julia 和 Fatou 所开创的“复动力系统理论”的思想, 利用计算机构造并研究了动力 Z 平面上的 J 集和参数 C 平面上的 M 集^[1]. 目前, 人们已对 M-J 集进行了较深入的研究, 发现其中深藏着规律性的结构, 从而丰富了分形理论^[2~13]. 1989 年, Lakhtakia 等讨论了分形序列, 并构造了二次高斯和的 J 集^[14]; 另外, Berndt Takagi Kim Mbodj Zhang Aoki 和 Meijer 等曾对高斯和的性质做了深入研究^[15~23]. 在 Lakhtakia 和 Berndt 等工作的基础上, 本文研究广义高斯和的分形序列及其 M-J 集.

1 理论与方法

1.1 分形序列

分形序列 $\{f(n)\}$ 可定义为^[15]

$$f(sn) = s^a f(n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots; f(n) \in \mathbf{R} \text{ 或 } \mathbf{C}) \quad (1)$$

式中: 正整数 $s > 1$, 称为 $\{f(n)\}$ 的标度; 实数 $a > 0$, 称为 $\{f(n)\}$ 的分形维数. 若 $f(n) \neq 0$, 则有

$$a = \lg[f(sn)/f(n)]/\lg(sn/n)$$

序列 $\{f(n)\}$ 的生成规则如下: (i) $f(1)$ 或 $f(s)$; (ii) $f(m) (m = 2, 3, 4, \dots, s-2, s-1)$; (iii) $f(m) [m > s, (m, s) = 1]$. 以上这些元素为可数无穷多个. 由式 (1) 可得 $f(1)$ 与 $f(s)$ 的关系为

$$f(s) = s^a f(1)$$

另外, 若 $m < s$, 即 $m \pmod s = m$, 元素 (ii) 不能由式 (1) 确定, 必须独立给出. 若 m 与 s 为互质数, 即 m 和 s 的最大公因子为 1, 则元素 (iii) 不能由式 (1) 生成, 也必须独立给出. 但对于任给 $n > s$ 且 s 是 n 的一个因子, 则 $f(n)$ 可由式 (1) 来确定.

将元素 (i) ~ (iii) 作为初值, 由式 (1) 即可生成序列 $\{f(n)\}$ ^[24]. 一个标度 $s = 2$, 维数 $a = \lg 3/\lg 2$ 的分形序列为

1, 3, 5, 9, 11, 15, 19, 27, 29, 33, 37, 45, 49, 57, 65, 81, 83, 87, 91, 99, 103, 111, 119, 135, 139, 147, 155, 171, 179, 195, 211, 243, ...

另一个标度 $s = 3$, 维数 $a = \lg 6/\lg 3$ 的分形序列为 1, 3, 6, 8, 12, 18, 21, 27, 36, 38, 42, 48, 52, 60, 72, 78, 90, 108, 111, 117, 126, 132, 144, 162, 171, 189, 216, ...

1.2 广义高斯和及其分形序列

双指数二次高斯和定义如下:

$$h(p,q)=\sum_{r=0,1,2,\cdots,q-1}\exp[\mathfrak{Z}i(p/q)r^2]\tag{2}$$

其中 $i=\sqrt{-1}$, p 和 q 是正整数^[18]. 若 $p=1,3,5,\cdots,q=16,32,64,\cdots$, 则有

$$h(p,q)=2h(p,q/4)\tag{3}$$

成立^[15]. 又当 p 为奇数时, 由式 (2) 可求出 $h(p,1)=1$ 和 $h(p,2)=0$ ^[15]. 这样由式 (3) 即可生成分形序列族 $\{f_p(q)\}(q=1,2,3,\cdots)$, 参数 p 确定了族内序列的种类. 其中 p 类分形序列为

$$f_p(1)=(1+i^p),$$

$$f_p(2)=\overline{(2^{p-1})(1+i)},$$

$$f_p(4)=h(p,4)(k=1,2,3,\cdots),$$

$$f_p(4^{k+1/2})=h(p,4^{k+1/2})(k=1,2,3,\cdots),$$

$$f_p(q)=0(q\text{取其他值})$$

由上述序列知 $f_p(4)=h(p,4)$, $f_p(16)=h(p,16)$; 又由式 (3) 知 $h(p,16)=2h(p,4)$. 故有 $f_p(16)=2f_p(4)$. 由式 (1) 可知该分形序列族的标度 $s=4$, 维数 $a=0.5$. 另外, $|f_p(q)|$ 的值与参数 p 无关^[15].

分形序列 $\{f_N(q)\}$ 可以利用恒等式

$$h(1,2^N)=(1+i)\overline{2^N}(N>0,q\geq 2)$$

来确定^[15], 其标度 $s=2$, 维数 $a=\lg(h(1,2^N)/h(1,2^{N-1}N))/\lg(2^N/2^{N-1}N)=\lg 2/\lg 2=0.5$.

上述分形序列中 p 和 q 皆为正整数, 故这些序列不像 Collatz 序列 $(2n+1)$ 具有复杂形式^[17]. 近年来, 一些学者研究了二次高斯和^[20]

$$S_L(f)=\sum_{r=1,2,\cdots,l}\exp(i\pi fr^2)(f\in\mathbf{R})$$

并证明了

$$S_q(2/q)=h(1,q)$$

若 $p\in\mathbf{C}$, 则由式 (2) 可定义广义高斯和

$$F(z;q,c)=c+\sum_{r=0,1,2,\cdots,q-1}\exp(\mathfrak{Z}izq^{-1}r^2)(z,c\in\mathbf{C})\tag{4}$$

广义高斯和 (4) 可生成更复杂的分形序列. 式 (4) 又可进一步推广为

$$F(z;q,n,c)=c+\sum_{r=0,1,2,\cdots,q-1}\exp(\mathfrak{Z}izq^{-1}r^n)(n\in\mathbf{R})\tag{5}$$

还可给出式 (5) 的更广义形式

$$F(z;\mathbb{T},n,c)=c+\int_0^{\mathbb{T}}\exp[\mathfrak{Z}iz(\mathbb{T}_+-1)^{-1}r^n]dr$$

$$(T>0\text{且}T\in\mathbf{R})\tag{6}$$

2 实验与结果

选取逃逸半径 $R=20$ 逃逸时间限制 $N=200$, 利用逃逸时间算法作者绘制了放大倍数 U 不同的式 (4)~(6) 的 M-J 集 (图 1~5). 其中白色为稳定区, 黑色为逃逸区. 观察图 1, 由图 1(a) 和其局部放大图图 1(b) 可见式 (4) 的 J 集由许多螺旋状的花束构成, 其中较大花瓣上生长着较小花瓣, 较小花瓣上又生长着更小花瓣..., 这种结构在不同水平上嵌套出现, J 集的整体与局部放大图非常相似, 体现了明显的自相似分形特性; 且随 q 值增大, J 集中的精细花瓣结构增多并趋于复杂 (图 1(b) 图 1(e) 和图 1(g)). 观察图 2~5, 还可看到式 (4)~(6) 的 M-J 集也都具有上述的分形结构特征.

性质 1 式 (4) 和式 (5) 的 J 集在 x 轴方向上具有周期性.

证明 若令 $z=x+iy$, 则由式 (4) 有 $F(z;q,c)=c+\sum_r\exp[\mathfrak{Z}i(x+iy)q^{-1}r^2]=c+\sum_r\exp(-\mathfrak{Z}yq^{-1}r^2)[\cos(\mathfrak{Z}q^{-1}r^2x)+i\sin(\mathfrak{Z}q^{-1}r^2x)]$

可见在动力 (x,y) 平面的 x 轴方向上 $F(z;q,c)$ 是周期为 $\mathfrak{Z}/\mathfrak{Z}q^{-1}r^2=q/r^2$ 的函数, 即式 (4) 的 J 集在 x 轴方向上应具有周期性 (图 1(a) 图 1(c) 图 1(d) 和图 1(f)). 同理可证式 (5) 的 J 集在 x 轴方向上也具有周期性.

由于式 (6) 不能直接积分求出解析表达式, 根据幂级数展开式可知

$$F(z;\mathbb{T},n,c)=c+\int_0^{\mathbb{T}}(1+\sum_{m=1}^{\infty}\{[\mathfrak{Z}iz(\mathbb{T}_+-1)^{-1}r^n]^m/m!\})dr=c+\mathbb{T}_+-1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\mathfrak{Z}iz)^m\mathbb{T}_+^{mn+1}}{(\mathbb{T}_+-1)^m(mn+1)m!}\tag{7}$$

由式 (7) 构造 M-J 集, 涉及到 m 值的选取. m 值取得过小, 得到的 M-J 集不准确; m 值取得过大, 构造 M-J 集又需较长时间. 为此 m 值的选取是经过多次试算, 发现所得 M-J 集的结构趋于稳定时得到的. 本文取 $m=100$. 另外, 式 (7) 为非周期函数, 故其 J 集在 x 轴方向上不具有周期性 (如图 5 所示).

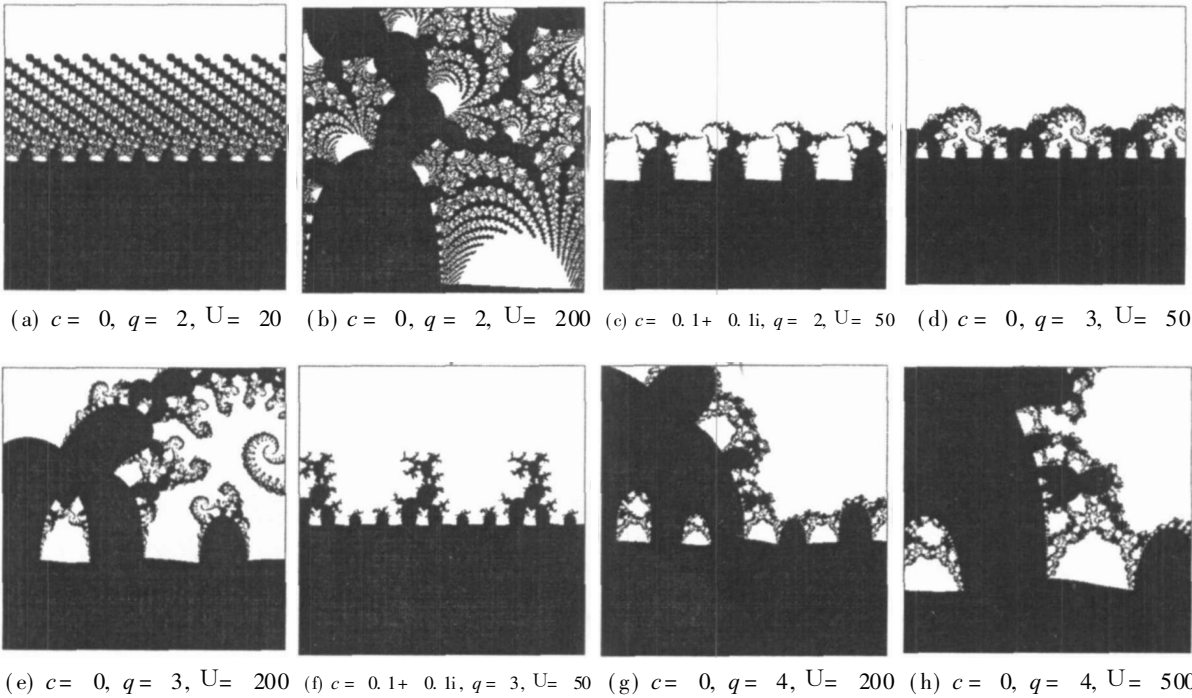


图 1 广义高斯和式 (4) 的 J 集

Fig. 1 The J sets of generalized Gauss sums Eq. (4)

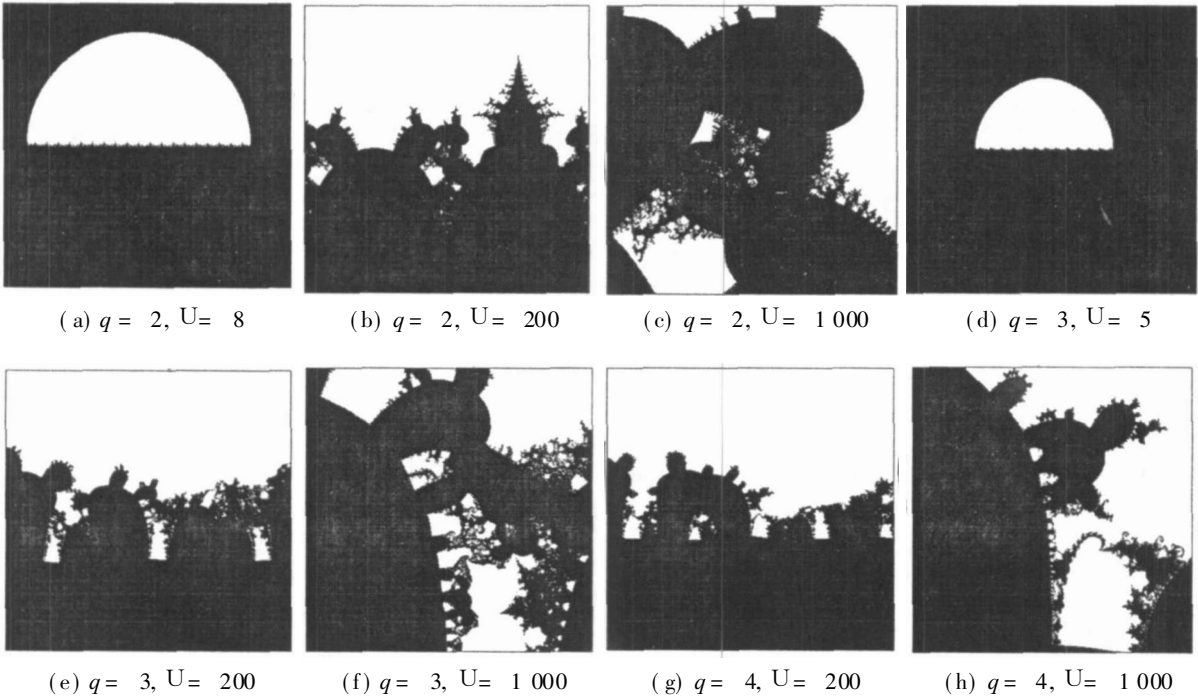


图 2 广义高斯和式 (4) 的 M 集

Fig. 2 The M sets of generalized Gauss sums Eq. (4)

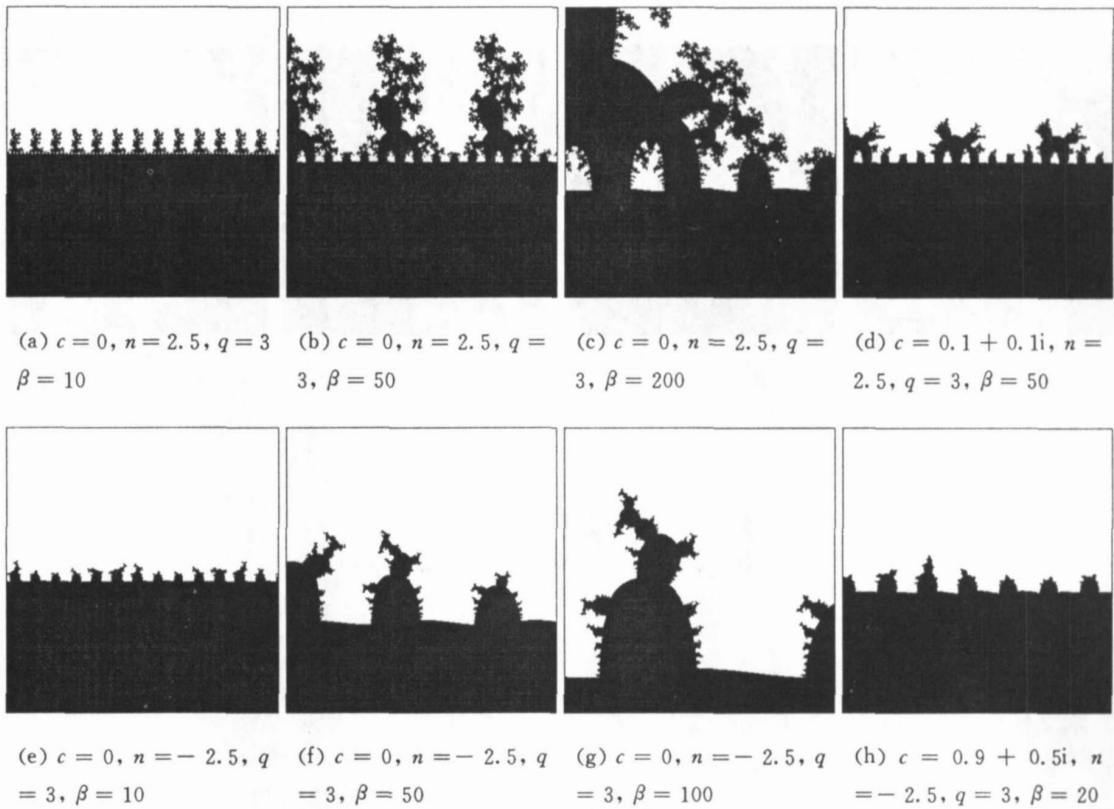


图 3 广义高斯和式 (5) 的 J 集

Fig. 3 The J sets of generalized Gauss sums Eq. (5)

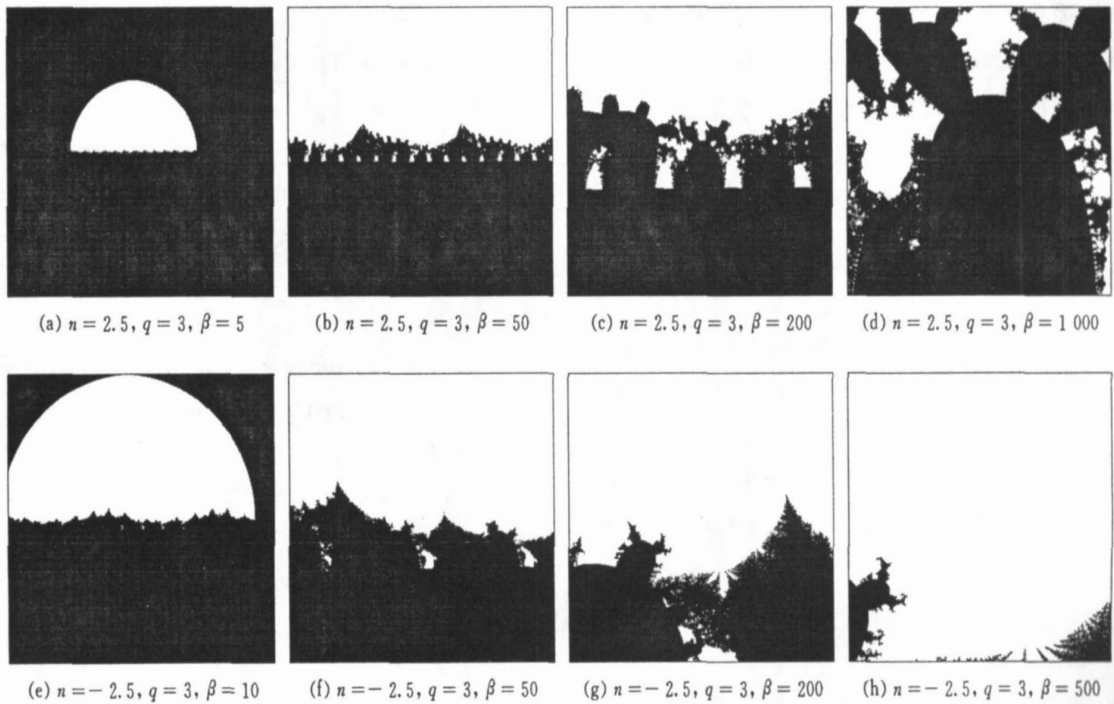


图 4 广义高斯和式 (5) 的 M 集

Fig. 4 The M sets of generalized Gauss sums Eq. (5)

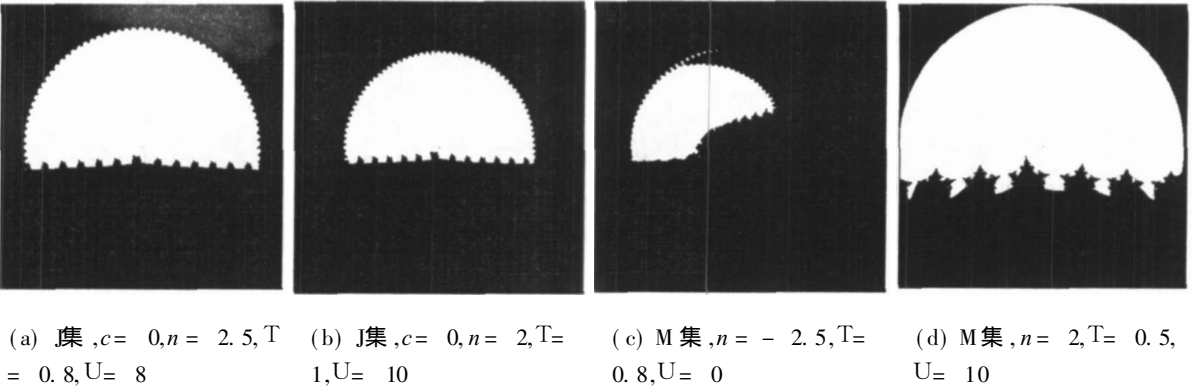


图 5 广义高斯和式 (6) 的 M-J 集
Fig. 5 The M-J sets of generalized Gauss sums Eq. (6)

3 结 语

本文推广了 Lakhtakia 和 Berndt 的工作, 分析了分形序列的生成规则, 给出了二次高斯和所生成的分形序列的标度及维数. 利用逃逸时间算法构造了广义高斯和的 M-J 集, 并从理论上分析了 M-J 集的周期性和结构特征.

伟大的数学家高斯曾断言“数论是数学的皇后”, 而广义高斯和在数论中占有重要的地位. 目前, 广义高斯和在许多领域中得到了广泛应用^[25]. 可以期待, 伴随着分形学的发展, 研究广义高斯和量与形的新的数学工具也将伴之而生, 从而可能改变这个数学皇后的面貌!

参考文献:

[1] MANDELROT B B. **The Fractal Geometry of Nature** [M]. San Francisco: Freeman W H, 1982: 5-47

[2] PEITGEN H O, SAUPE D. **The Science of Fractal Images** [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988: 137-218

[3] 王兴元. 广义 M-J 集的分形机理 [M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2002: 1-58

[4] 王兴元. 复杂非线性系统中的混沌 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2003: 91-113

[5] LAKHTAKIA A. On the symmetries of the Julia sets for the process $z \leftarrow z^p + c$ [J]. **J Phys A: Math**

Gen, 1987, **20**(15): 3533-3535

[6] GUJAR U G, BHAVSAR V C. Fractals from $z \leftarrow z^T + c$ in the complex c -plane [J]. **Computers & Graphics**, 1991, **15**(3): 441-449

[7] GUJAR U G, BHAVSAR V C, VANGALA N. Fractals images from $z \leftarrow z^T + c$ in the complex z -plane [J]. **Computers & Graphics**, 1992, **16**(1): 45-49

[8] DHURANDHAR S V, BHAVSAR V C, GUJAR U G. Analysis of z -plane fractals images from $z \leftarrow z^T + c$ for $T < 0$ [J]. **Computers & Graphics**, 1993, **17**(1): 89-94

[9] WANG Xing-yuan, LIU Xiang-dong, ZHU Wei-yong, *et al*. Analysis of c -plane fractal images from $z \leftarrow z^T + c$ for $T < 0$ [J]. **Fractals**, 2000, **8**(3): 307-314

[10] WANG Xing-yuan. Fractal structures of the non-boundary region of the generalized Mandelbrot set [J]. **Progress in Natural Sci**, 2001, **11**(9): 693-700

[11] WANG Xing-yuan. Switched processes generalized mandelbrot sets for complex index number [J]. **Appl Math Mech**, 2003, **24**(1): 73-81

[12] 王兴元, 刘向东, 朱伟勇. 由复映射 $z \leftarrow z^T + c$ ($T < 0$) 所构造的广义 M 集的研究 [J]. **数学物理学报**, 1999, **19**(1): 73-79

[13] 王兴元, 孟庆业. 基于 Langevin 问题探讨广义 M-J 集的物理意义 [J]. **物理学报**, 2004, **53**(2): 388-395

[14] LAKHTAKIA A, MESSIER R. Self-similar

- sequences and chaos from Gauss sums [J]. **Computers & Graphics**, 1989, **13**(1): 59-62
- [15] BERNDT B C, EVANS R J. The determination of Gauss sums [J]. **Bull of the Amer Math Soc**, 1981, **5**(1): 107-129
- [16] TAKAGI T. Product formula of the cubic Gauss sum modulo the product of the primes [J]. **J Number Theory**, 1997, **62**(2): 298-306
- [17] KIM D S. Gauss sums for $O(2n+1, q)$ [J]. **Finite Fields and Their Appl**, 1998, **4**(1): 62-86
- [18] MBODJ O D. Quadratic Gauss sums [J]. **Finite Fields and Their Appl**, 1998, **4**(3): 347-361
- [19] EVANS R, HOLLMANN H D L, KRATTENTHALER C. Gauss sums, Jacobi sums, and p -ranks of cyclic difference sets [J]. **J Combinatorial Theory A**, 1999, **87**(1): 74-119
- [20] ZHANG Wen-peng. Moments of generalized quadratic Gauss sums weighted by L -functions [J]. **J Number Theory**, 2002, **92**(2): 304-314
- [21] EVANS R, MINEI M, YEE B. Incomplete higher-order Gauss sums [J]. **J Math Anal Appl**, 2003, **281**(3): 454-476
- [22] AOKI M. Local units and Gauss sums [J]. **J Number Theory**, 2003, **101**(2): 270-293
- [23] MEIJER P, VLUGT M. The evaluation of Gauss sums for characters of 2-power order [J]. **J Number Theory**, 2003, **100**(3): 381-395
- [24] LAKHTAKIA A, MESSIER R, VARADAN V V, *et al.* Spatial convolution and the generation of clusters and generalized Cantor bars [J]. **Phys Lett A**, 1986, **118**(1): 54-58
- [25] SCHROEDER M R. **Number Theory in Science and Communication** [M]. New York: Springer-Verlag, 1986: 8-35

Research on generalized Gauss sums fractal sequences and their M-J sets

WANG Xing yuan^{*}, CHANG Pei jun

(School of Electr. and Inf. Eng., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China)

Abstract The studies brought forward by Lakhtakia and Berndt, *et al.* are extended. The form rules of the fractal sequences (self-similar) and the scale and dimension of fractal sequences generated by quadratic Gauss sums are presented. The generalized Mandelbrot-Julia sets (M-J sets) of generalized Gauss sums are constructed by the escape-time algorithm and the periodicity and structure of them are analyzed in theory. The result shows the following phenomena: The M-J sets consist of many spiry bouquets, such overlapping embedment structure appears at different levels, and it shows self-similar fractal characteristic. The fine bouquet structure grows and gets complicated with the increase of exponent. The J sets are periodic on x -axis. The research can contribute to the comprehension of dynamics of generalized Gauss sums.

Key words fractal sequences; generalized Gauss sums; M-J sets; periodicity