

# 基于模糊竞争学习的模糊模型一体化辨识

王宏伟\*, 顾宏

(大连理工大学 电子与信息工程学院, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 提出了一种利用 MGS(modified Gram-Schmidt) 算法建立非线性系统模型的建模方法,并给出了基于 MGS 算法的模型结构和参数辨识的一体化方法,即利用 MGS 正交变换对通过模糊竞争学习的聚类结果进行变换,确定对模型贡献大的规则,删除对模型贡献小的规则,同时对模型中的参数进行估计,实现模糊模型结构和参数的优化.仿真结果表明,提出的方法能够对非线性系统进行模糊建模.

**关键词:** 模糊建模; 模糊竞争学习; 模糊辨识; 正交变换

**中图分类号:** TP15 **文献标识码:** A

## 0 引言

基于模糊集合的模糊模型,利用模糊推理规则描述复杂、病态、非线性系统的特性是一种有效方法. T-S 模糊模型是常用的函数规则模型,可以解析地描述系统的输入输出关系. 基于 T-S 模糊模型得到了广泛应用<sup>[1-3]</sup>.

基于 T-S 模糊模型的模糊建模,本质上是确定模糊模型是由哪些规则组成的,规则数是多少. 对于模糊模型的结构辨识,现在主要有模糊网格法<sup>[4]</sup>、模糊聚类法<sup>[5-7]</sup>、模糊决策树法<sup>[8]</sup>等. 但是对于聚类方法的有效性、网格划分的判别准则却没有一个完整的理论和方法.

针对上述问题,本文提出一种利用 MGS(modified Gram-Schmidt) 算法建立非线性系统模型的方法.

## 1 模糊模型的结构描述

设辨识对象为  $P(U, Y)$ .  $U$  为系统的输入,  $U \subset \mathbf{R}^M$ .  $Y$  为系统的输出,  $Y \subset \mathbf{R}^p$ . 因为对于这样的多输入多输出系统,可以分解成  $p$  个多输入单输出系统进行辨识,因此这里讨论多输入单输出系统. 模糊模型形式如下:

$$R^i: \text{if } \mathbf{Z} \text{ is } \bar{\mathbf{Z}}_i \text{ then } y^i = \theta_i^T \cdot \hat{\mathbf{Z}} \quad (i=1, 2, \dots, c) \quad (1)$$

其中  $\mathbf{Z}$  是输入向量,  $\mathbf{Z} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_M)^T \in \mathbf{R}^M$ ;  $\bar{\mathbf{Z}}_i$  是第  $i$  类的中心向量,  $\bar{\mathbf{Z}}_i = (\bar{x}_{i1} \ \bar{x}_{i2} \ \dots \ \bar{x}_{iM})^T$ ;  $\bar{\mu}_i$  是输入向量在第  $i$  类里的隶属度;  $y^i$  是第  $i$  条规则的后件输出;  $\theta_i$  为第  $i$  条规则的后件参数向量,  $\theta_i = (p_{i0} \ p_{i1} \ \dots \ p_{iM})^T$ ;  $\hat{\mathbf{Z}}$  是后件部分的输入向量,  $\hat{\mathbf{Z}} = (1 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_M)^T$ ;  $c$  为规则数.

模型 (1) 输出为

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^c \bar{\mu}_i y^i, \quad i=1, 2, \dots, c, \quad \sum_{i=1}^c \bar{\mu}_i = 1 \quad (2)$$

## 2 基于模糊竞争学习确定模糊模型

### 2.1 基于模糊竞争学习确定隶属函数

竞争学习的原理是“胜者为王”,竞争学习的目的是把训练样本分在相应的类里,从而使在一类里的样本相似程度比在不同类里的相似程度强. 模糊竞争学习是通过样本到中心矢量的距离来确定每个样本在每一类里的隶属度. 模糊竞争学习在文献 [9] 中给予了介绍. 基于模糊竞争学习算法,系统的模糊空间结构被划分.

模糊竞争学习算法表示如下<sup>[9]</sup>:

- (1) 选择聚类数  $c$  ( $2 \leq c \leq N/2$ ,  $N$  为样本总数), 初始中心向量  $\mathbf{Z}_i$  ( $i=1, 2, \dots, c$ ).
- (2) 对于任意样本确定其隶属度

$$-_{ki} = \left[ \sum_{j=1}^c \left( \frac{\|Z(k) - Z_i\|^2}{\|Z(k) - Z_j\|^2} \right) \right]^{-1};$$

$$i = 1, 2, \dots, c, k = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

$k$  表示第  $k$  次采样,  $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $c$  为聚类的分类数;  $_{ki}$  表示第  $k$  次采样的样本在第  $i$  类里的隶属度;  $Z_i$  表示第  $i$  类中心向量 ( $i = 1, 2, \dots, c$ );  $Z(k)$  表示第  $k$  次采样的样本。

(3) 修正中心向量  $Z_i (i = 1, 2, \dots, c)$

$$Z_i(t+1) = Z_i(t) + Z_{_{ki}}^2 [Z(k) - Z_i(t)] \quad (4)$$

其中  $Z$  是学习系数。

(4) 若  $\|Z_i(t+1) - Z_i(t)\| \leq \lambda$ , 停止; 否则,  $t = t + 1$ , 转第 (2) 步。

采用上述模糊竞争学习可以确定模糊模型的输入空间和规则。

### 2.2 模糊模型的参数辨识

通过模糊竞争学习确定模糊模型的隶属度函数后, 对于模糊模型 (1) 来说, 给定的  $N$  个输入输出数据对  $\{Z_k, y_k\}, k = 1, 2, \dots, N$ , 其中  $Z_k$  为  $M$  维输入向量,  $Z_k = (x_{1k} \ x_{2k} \ \dots \ x_{Mk})^T$ , 可以转化成观测矩阵  $Z_e, Z_e$  为  $[1, Z]$  的矩阵, 其行向量为  $[1, Z_k^T], Z_e \in \mathbf{R}^{N \times (M+1)}$ 。另外, 将每条规则的权重  $_{i} (i = 1, 2, \dots, c)$  形成一个  $N \times N$  维的对角阵, 即  $\Gamma_i, \Gamma_i \in \mathbf{R}^{N \times N}, \text{diag}(\Gamma_i) = (_{1i}, _{2i}, \dots, _{Ni}), i = 1, 2, \dots, c$  这样形成一个新的矩阵  $Z$ , 即

$$Z = (\Gamma_1 Z_e \ \Gamma_2 Z_e \ \dots \ \Gamma_c Z_e) \quad (5)$$

另外, 被估计的参数向量  $\theta (\theta \in \mathbf{R}^{c(M+1)})$  为  $\theta = (\theta_1^T \ \theta_2^T \ \dots \ \theta_c^T)^T$ , 其中  $\theta_i = (p_{i0} \ p_{i1} \ \dots \ p_{iM})^T$ , 这样模型 (1) 的输出又可以变为下列形式:

$$Y = Z \cdot \theta + e \quad (6)$$

其中  $Y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N)^T, e$  为逼近误差。应用最小二乘, 通过式 (7) 可以估计参数

$$\theta = (Z^T Z)^{-1} Z^T Y \quad (7)$$

## 3 模糊模型的化简和数据压缩

### 3.1 问题的提出

若用最小二乘法解如式 (7) 超定方程, 求解模型的参数, 需要解决以下几个问题。

(1) 在基于模糊模型的建模过程中, 往往采用模糊聚类的方法, 如文献 [6], 但是如果聚类效果不好, 可能使各类之间存在一定相关性, 使  $Z$  阵存在线性共性问题。

(2) 在工程实际应用中, 噪声和干扰的存在, 以及变量之间的耦合, 使得  $Z$  阵中的输入变量  $x_1,$

$x_2, \dots, x_M$  存在近似相关性。

(3) 为了提高建模精度增加变量数量时,  $Z$  的维数相应增加, 被估计参数向量  $\theta$  中变量个数就会增加,  $\theta, Z, Y$  的维数太大, 将涉及到如何降低在求解线性方程组时计算机有限字长而引起的计算误差。计算误差在建模中会引起建模精度下降; 理论上收敛的算法在实际应用中可能会发散。

对于 (1)、(2) 两个问题,  $Z^T Z$  将会形成奇异矩阵, 即使不是奇异矩阵, 但由于  $Z$  所有特征值存在着近似于零的分量,  $\theta$  的估计变得不可信, 因此必须对模糊模型进行简化。对模糊模型 (1) 来说, 它的参数向量总含有一些系统贡献非常小的元素, 因它们对系统的贡献小, 可以近似地认为其值为零。如果在辨识参数向量之前, 通过一定的方法, 确定出这些元素所在的位置, 将它们从中删除, 然后重构模型 (1), 这样既降低了模型 (1) 的维数, 又有利于降低计算量和提高辨识精度。

### 3.2 CGS (classical Gram-Schmidt) 和 MGS (modified Gram-Schmidt) 算法

给定秩为  $M$  的  $N \times M$  实矩阵  $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_M), N \geq M$ , 及  $N$  维实向量  $Y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N)^T$ , 最小二乘问题可以描述为求  $\theta = (\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_M)^T$ , 使得  $\|X\theta - Y\|_2$  为最小。

对矩阵  $X$  进行正交分解,  $X = WA$ , 这里  $W = (w_1 \ w_2 \ \dots \ w_M)$  为直交化的矩阵,  $W$  各列向量之间是正交的, 满足  $W^T W = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_M)$ 。  $A$  为对角线是 1 其他元素为  $T_{ij} (i = 1, 2, \dots, M - 1, j = i + 1, \dots, M)$  的上三角矩阵。

CGS 算法每次计算矩阵  $A$  的一列, 并以如下步骤使矩阵  $X$  的各列正交化: 在第  $k$  步,  $k = 2, \dots, M$ , 更新第  $k$  列使之与已正交化的前  $k - 1$  个列向量正交。CGS 算法表示如下:

$$\begin{cases} w_1 = x_1 \\ T_{ik} = \langle w_i, x_k \rangle / \langle w_i, w_i \rangle, \\ \quad 1 \leq i \leq k, k = 2, 3, \dots, M \\ w_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} T_{ik} w_i \end{cases} \quad (8)$$

其中符号  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示两个向量的点乘, 以下该符号皆表示此意义。

定义  $g = D^{-1} W^T Y = (g_1 \ g_2 \ \dots \ g_M)^T$ , 则最小二乘解  $\theta$  通过回代计算, 即由  $A\theta = g$  求出。

文献 [10] 指出, 文献 [11] 给出的 MGS 算法数值稳定性要比 CGS 算法优越得多, 其数值稳定

性与非常优良的 Householder 变换, Givens 变换相同. 与 CGS 算法每次计算矩阵  $A$  的一列不同, MGS 算法每次计算矩阵  $A$  的一行, 并以如下步骤使矩阵  $X$  的各列正交化: 在第  $k$  步,  $k = 1, \dots, M - 1$ , 更新第  $k + 1, k + 2, \dots, M$  列使之与第  $k$  列正交. 计  $x_i^{(0)} = x_i, i = 1, 2, \dots, M$ , MGS 算法的执行步骤如下:

$$\begin{cases} w_k = x_k^{(k-1)} \\ T_{ki} = \langle w_k, x_i^{(k-1)} \rangle / \langle w_k, w_k \rangle, k = 1, 2, \dots, M - 1 \\ x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} - T_{ki} w_k \\ w_M = x_M^{(M-1)} \end{cases} \quad (9)$$

对  $N$  维实向量  $Y$  做上述类似的变换:  $Y = Y^0, Y^1, \dots, Y^M = X$  在变换的第  $k$  步,  $k = 1, 2, \dots, M, Y^k$  通过如下计算得到:  $Y^k = Y^{(k-1)} - g_k w_k, g_k = \langle w_k, Y^{(k-1)} \rangle / \langle w_k, w_k \rangle$ . 本文根据上述思想, 进行模糊模型 (1) 的简化.

### 3.3 正交分解的模糊模型结构和参数辨识

首先, 通过输入数据进行模糊竞争学习, 经过聚类后得到如下形式的模糊推理关系矩阵.

$$U = \begin{pmatrix} -_{11} & -_{12} & \dots & -_{1c} \\ -_{21} & -_{22} & \dots & -_{2c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -_{N1} & -_{N2} & \dots & -_{Nc} \end{pmatrix} \quad (10)$$

对式 (10) 的模糊推理关系矩阵进行正交分解

$$U = W \cdot A \quad (11)$$

其中  $W$  是正交矩阵,  $A$  为对角线是 1, 其他元素为  $T_{ij} (i = 1, 2, \dots, c, j = i + 1, \dots, c)$  的上三角矩阵. 为了确定各规则模型对系统贡献的大小, 用  $W$  代替  $U$  来确定模型规则. 首先, 将  $W$  的列向量构成一个对角阵  $W_i, W_i = \text{diag}(w_i) (i = 1, 2, \dots, c)$ . 用  $W_i$  代替  $\Gamma_i$ , 这样就有新的输入矩阵  $Z', Z' = (W_1 Z_e, W_2 Z_e, \dots, W_c Z_e)$ , 这样模糊模型 (6) 可以转化为下列形式:

$$Y = Z' \cdot \theta' \quad (12)$$

其中  $\theta' = (g_1^T, g_2^T, \dots, g_c^T)^T, g_i = (g_{i0}, g_{i1}, \dots, g_{im})^T$ . 这样根据 MGS 原理来简化模糊模型.

设  $u_i^{(0)} = u_i = (-_{1i}, -_{2i}, \dots, -_{Ni})^T, i = 1, 2, \dots, c, \Gamma_i^{(0)} = \text{diag}(u_i^{(0)})$  (即矩阵  $\Gamma_i^{(0)}$  的对角线上元素为  $u_i^{(0)}$  向量内的元素),  $P_i^{(0)} = \Gamma_i^{(0)} Z_e, i = 1, 2, \dots, c, Y^0 = Y$ . 则模糊模型结构和参数确定过程如下:

(1)  $k = 1$

(2) 计算

$$p_k^{(i)} = \frac{\langle P_i^{(k-1)}, Y^{(k-1)} \rangle}{\langle P_i^{(k-1)}, P_i^{(k-1)} \rangle}, i = k, \dots, c \quad (13a)$$

$$e_i = \frac{(p_k^{(i)})^2 \langle P_i^{(k-1)}, P_i^{(k-1)} \rangle}{\langle Y, Y \rangle}, i = k, \dots, c \quad (13b)$$

(3) 设  $e_i = \max\{e_i, k \leq i \leq c\}$ , 则矩阵  $U^{(k-1)}$  的第  $i$  列与第  $k$  列交换. 为方便起见交换后的矩阵仍记为  $U^{(k-1)}$ , 同时矩阵  $A$  中的第  $i$  列与第  $k$  列的前  $k - 1$  个元素交换.

(4) 用 MGS 方法进行正交化

$$w_k = u_k^{(k-1)} \quad (14a)$$

$$T_{ki} = \frac{\langle w_k, u_i^{(k-1)} \rangle}{\langle w_k, w_k \rangle}, i = k + 1, \dots, c \quad (14b)$$

$$u_i^{(k)} = u_i^{(k-1)} - T_{ki} w_k, i = k + 1, \dots, c \quad (14c)$$

$$\Gamma_i^k = \text{diag}(u_i^{(k)}), i = k + 1, \dots, c$$

( $\Gamma_i^k$  对角线上元素为  $u_i^{(k)}$  向量内的元素) (14d)

$$P_i^k = \Gamma_i^k Z_e, i = k + 1, \dots, c \quad (14e)$$

$$W_k = \text{diag}(w_k) \quad (14f)$$

$$Z_k = (W_k Z_e) \quad (14g)$$

$$g_k = \frac{\langle Z_k, Y^{(k-1)} \rangle}{\langle Z_k, Z_k \rangle} \quad (14h)$$

$$Y^k = Y^{(k-1)} - g_k Z_k \quad (14i)$$

(5) 若  $1 - \sum_{i=1}^M e_i = d \leq d_{\max}$ , 则算法结束; 否则  $k = k + 1$  转到第 (2) 步.

通过上述步骤求得参数向量  $\theta', W_k (k = 1, 2, \dots, M_s)$  和规则数  $M_s$ . 这样描述系统的模糊模型的规则数为  $c = M_s$ . 最后通过式 (15) 回代, 求得参数向量  $\theta_k$ .

$$\Gamma_k X_e \theta_k = W_k X_e g_k; k \leq M_s \quad (15)$$

## 4 仿真实例

例 1 设非线性系统如下<sup>[12, 13]</sup>, 这个例子也是国内外经常采用的建模仿真实例.

$$y(t+1) = \frac{y(t) + y(t-1)}{1 + y(t)^2 + y(t-1)^2} + u(t)^2 \quad (16)$$

从被辨识对象 (16) 中产生 500 个样本点, 这 500 个样本点是利用输入信号  $u(t) = \sin(2\pi t/25) (t = 1, \dots, 500)$  产生的. 利用本文提出的模糊建模方法对上述非线性系统进行建模. 在建模中将  $y(k), y(k-1), u(k)$  作为输入量, 用 500 对输入输出数据, 采用模糊竞争学习方法进

行聚类, 采用了 15 条聚类规则. 通过本文提出的正交分解后, 每条规则对于建模所做贡献如表 1 所示.

表 1 每条规则对于建模所做贡献

Tab 1 The generating contribution for each rule to build fuzzy model

规则	$e_i$	规则	$e_i$	规则	$e_i$
15	0.85210	7	0.006328	10	0.00051
9	0.17510	4	0.003671	12	0.00032
3	0.07810	8	0.002841	13	0.00021
14	0.03843	5	0.001081	2	0.00011
6	0.00961	11	0.000823	1	0.00008

通过表 1 分析, 模糊模型的第 1 2 13 12 10 11 5 8 4 7 6 条规则对于建模的贡献基本没有, 因此本文采用了第 15 9 3 14 条规则作为最后描述模糊模型的规则. 这样经过辨识后, 均方误差为 0.0319. 图 1 给出了辨识模型的输出与实际输出的比较, 图 2 为误差曲线.

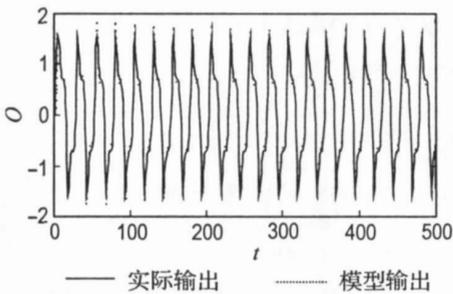


图 1 辨识模型的输出与实际输出的比较

Fig 1 The comparison between the output of identifying model and the real output

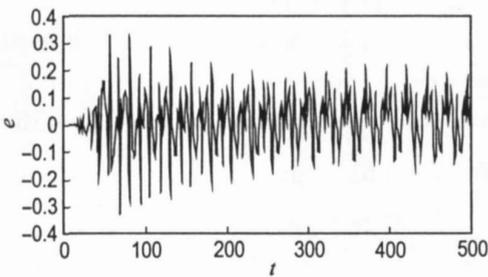


图 2 误差曲线

Fig 2 The error diagram

经过选择后, 确定 4 条模糊规则来描述系统的行为:

$$R_1: \text{ if } Z \text{ is } \bar{Z}_1 \text{ then } y(k+1) = 0.1485 - 1.3487y(k) - 0.9321y(k-1) + 0.8251u(k)$$

$$R_2: \text{ if } Z \text{ is } Z_2 \text{ then } y(k+1) = -0.5233 + 3.1023y(k) + 0.1473y(k-1) + 1.8221u(k)$$

$$R_3: \text{ if } Z \text{ is } \bar{Z}_3 \text{ then } y(k+1) = -0.367 + 0.4918y(k) - 1.4351y(k-1) - 0.5491u(k)$$

$$R_4: \text{ if } Z \text{ is } Z_4 \text{ then } y(k+1) = 0.8294 + 0.572y(k) + 1.1258y(k-1) - 0.653u(k)$$

另外, 本文还与其他建模方法进行了比较, 比较结果见表 2. 从图 1 辨识结果和图 2 误差曲线的变化以及表 1 结果, 可以看出本文提出的方法可以用于建立非线性系统的模型, 并能够提高模型的辨识精度, 为非线性系统建模提供了新的工具.

表 2 本文模糊辨识方法与其他辨识方法的比较  
Tab 2 The comparison between the fuzzy identifying method and other identifying methods

模型名称	输入变量	规则数	均方误差
文献 [14] 方法	$y(k), y(k-1), u(k)$	3	0.1080
文献 [15] 方法	$y(k), y(k-1), u(k)$	3	0.0713
本文方法	$y(k), y(k-1), u(k)$	4	0.0319

## 5 结 语

针对模糊模型的结构辨识问题, 提出了 MGS(modified Gram-Schmidt) 算法建立非线性系统的模型的方法. 首先, 提出了基于 MGS 算法的模型结构和参数辨识的一般算法; 然后将 MGS 正交变换移植到模糊模型的结构辨识算法当中, 确定描述模糊模型的规则, 删减冗余规则; 最后, 通过非线性系统验证了本文方法模糊建模的有效性.

## 参考文献:

- [1] TOMOHIRO T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control [J]. **IEEE Trans on Syst Man and Cybernetics**, 1985, 15(1): 116-132
- [2] HWANG H S, WOO K B. Linguistic fuzzy model identification [J]. **IEE Proc Control Theory Appl**, 1995, 142(6): 537-544
- [3] WANG L, LANGARI R. Complex systems modeling via fuzzy logic [J]. **IEEE Trans on Syst Man and Cybernetics-1**, 1996, 26(1): 100-106
- [4] SUBRAMANIAN K R, FUSSELL D S. Applying space subdivision techniques to volume rendering [C]// **Proceedings of the First IEEE Conference on Visualization**, San Francisco: IEEE Press, 1990.

150-159

- [5] CHANG X G, WEI L, FARRELL J A C-mean clustering based fuzzy modeling method [C]// **The Ninth IEEE International Conference on Fuzzy Systems** San Antonio: IEEE Press, 2000: 937-940
- [6] YUSHNARI Y, PEDRYCZ W. Construction of fuzzy models through clustering techniques [J]. **Fuzzy Sets and Syst** 1993, **54**(1): 157-165
- [7] 祖家奎, 戴冠中, 卢京潮, 等. 基于聚类 and SVD 算法的模糊逻辑系统结构辨识 [J]. **控制理论与应用**, 2003, **20**(4): 615-618
- [8] 张建刚, 毛剑琴, 夏天, 等. 模糊树模型及其在复杂系统辨识中的应用 [J]. **自动化学报**, 2000, **26**(3): 378-381
- [9] FULAI C, TANG L. Fuzzy competitive learning [J]. **Neural Network** 1994, **7**(3): 539-551
- [10] CHEN S, BILLINGS S A. Representation of nonlinear systems the NARMAX model [J]. **Int J Control** 1989, **49**: 1013-1032
- [11] BILLINGS S A, LEONTARITIS I J. Parameter estimation techniques for nonlinear systems [C]// **Proceedings of 6th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation** Washington D C: Elsevier Press, 1982: 505-510
- [12] GUSTAFSON D, KESSEL W. Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix [C]// **Proceedings of IEEE CDC**. San Diego: Elsevier Press, 1979: 761-766
- [13] CHOI C H. Constructive neural network with piecewise interpolation capabilities for function approximations [J]. **IEEE Trans on Neural Network** 1994, **5**(6): 936-944
- [14] CHEN Q, XI Y G, ZHANG Z J. A clustering algorithm for fuzzy model identification [J]. **Fuzzy Sets and Syst** 1998, **98**: 319-329
- [15] SUGENO M, TAKAHIRO Y. A fuzzy-logic-based approach to qualitative modeling [J]. **IEEE Trans on Fuzzy Syst** 1993, **1**(1): 7-31

## An integrated identification of fuzzy model based on fuzzy competitive learning

WANG Hong-wei<sup>\*</sup>, GU Hong

( School of Electr and Inf Eng, Dalian Univ of Technol, Dalian 116024 China )

**Abstract** The modeling method is proposed to build the model of nonlinear system by the modified Gram-Schmidt method. An integrated algorithm is used to confirm the structure and the parameters of the model by means of the modified Gram-Schmidt algorithm. The fuzzy competitive learning is transformed to confirm the fuzzy rules by means of orthogonal transform. The modified Gram-Schmidt orthogonal transform is used to acquire the important rules and remove the less important rules. The parameters of fuzzy model are estimated via the proposed method. The structure identification and the parameter identification of fuzzy model are synchronously identified in the proposed algorithm. The structure and parameters of fuzzy model are optimized. With the illustration of the simulating result, the fuzzy model of non-linear system can be built by the proposed algorithm.

**Key words** fuzzy modeling; fuzzy competitive learning; fuzzy identification; orthogonal transform