

关于非单位步长的紧优双环网络 $G(N; r, s)$

徐喜荣^{* 1,2}, 周建钦³, 汪光阳³

(1. 大连理工大学 电子与信息工程学院, 辽宁 大连 116024
2. 中国科学技术大学 数学系, 安徽 合肥 230026;
3. 安徽工业大学 计算机学院, 安徽 马鞍山 243002)

摘要: 双环网络是计算机互连网络或通讯系统的一类重要拓扑结构,其图论模型是指一个有向图 $G(N; r, s)$: 每个顶点记为 $0, 1, 2, \dots, N-1$, 并从每个顶点 i 发出两条有向边 $i \rightarrow i+r \pmod N$ 和 $i \rightarrow i+s \pmod N$, 其中 r 和 s 是自然数, 且 $1 \leq r \neq s < N$. 若 $G(N; r, s)$ 存在 k 紧优双环网络, $G(N; 1, s)$ 存在 k_1 紧优双环网络, 且满足 $k_1 > k$, 称 $G(N; r, s)$ 为非单位步长双环网络. 在 L 形瓦理论的基础上, 给出一个求非单位步长双环网络的方法, 求得两个关于模型 $G(N; r, s)$ 的紧优双环网络无限族; 结合中国余数定理和数论中的素数理论, 给出一个求非单位步长双环网络无限族 ($k_1 - k \geq 1$ 且 $k > 0$) 的方法; 作为具体应用, 求得两个非单位步长双环网络无限族 ($k_1 - k \geq 2$ 且 $k > 0$).

关键词: 双环网络; 紧优; 无限族; 非单位步长整数; 素数
中图分类号: O157.9; TP302 **文献标识码:** A

0 引言

计算机互连网络或通讯系统的拓扑结构可以用有向图 G 来模拟, 其中 G 的顶点表示处理机或开关元件, G 的有向边表示单向通讯连线. 网络有效性的一个重要参数是信息的传输延迟, 它可以用图的直径来度量. 双环网络具有对称性、简单性和可扩性, 因而被广泛用于计算机互连网络或通讯系统的拓扑结构中. 双环网络的图论模型是指这样一个有向图 $G(N; r, s)$: 它的每个顶点记为 $0, 1, 2, \dots, N-1$, 并从每个顶点 i 发出两条有向边 $i \rightarrow i+r \pmod N$ 和 $i \rightarrow i+s \pmod N$, 其中 r 和 s 是自然数, 且 $1 \leq r \neq s < N$. 若 g. c. d. $(N, r, s) = 1$, 则 $G(N; r, s)$ 强连通, 故存在有限直径. 记 $G(N; r, s)$ 的直径为 $d(N; r, s)$, 并记 $d(N) = \min\{d(N; r, s): 1 \leq r \neq s < N\}$; $d_1(N) = \min\{d(N; 1, s): 1 < s < N\}$. 现在已知的

$d(N)$ 的一个下界是^[1]: $\text{lb}(N) = \lceil \sqrt{3N} \rceil - 2$, 这里 $\lceil X \rceil$ 表示不小于 X 的最小整数.

设 $\mathbf{Z}$ 是非负整数集合, 对于 $k \in \mathbf{Z}$, 若 $d(N; r, s) = d(N) = \text{lb}(N) + k$, $d(N; 1, s) = d_1(N) = \text{lb}(N) + k_1$, 则称 $G(N; r, s)$ 为 k 紧优, 称 $G(N; 1, s)$ 为 k_1 紧优. 设 $N(t)$ 是一个定义在 $\mathbf{Z}$ 上的正整数值函数, $\{N(t); r(t), s(t) | t \in \mathbf{Z}, t \geq t_0\}$ 称为 k 紧优双环网络的无限族, 如果对任何 $t \geq t_0$, 都存在 $s(t)$ 使得 $G(N(t); r(t), s(t))$ 为 k 紧优的. 本文提到的 $N(t)$, $r(t)$ 和 $s(t)$ 都是关于 $t \in \mathbf{Z}$ 的整系数多项式.

若整数 N 关于 $G(N; r, s)$ 存在 k 紧优双环网络, 关于 $G(N; 1, s)$ 存在 k_1 紧优双环网络. 对于绝大多数 $N > 0, k = k_1$ 成立, 但存在少数 N 满足 $k_1 > k$, 此时 N 称为非单位步长整数, 称相应的 $G(N; r, s)$ 为非单位步长双环网络. 有关定义、术

收稿日期: 2005-09-17; 修回日期: 2007-01-22.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60473142); 安徽省教育厅自然科学基金资助项目 (2006KJ238B).
作者简介: 徐喜荣* (1967-), 女, 博士, E-mail: xixrongxu@ustc.edu.cn.
©1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

语和记号参见文献 [1 2]. 徐俊明在文献 [1] 中给出 3 个非单位步长双环网络无限族 ($k_1 - k \geq 1$ 且 $k = 0$); Aguilo 等在文献 [2] 中给出一个求非单位步长双环网络无限族 ($k_1 - k \geq 1$ 且 $k = 0$) 的方法, 并给出若干个非单位步长双环网络无限族 ($k_1 - k \geq 1$ 且 $k = 0$).

本文在文献 [1] 和文献 [3] 的基础上, 结合文献 [4~ 7], 给出一个求非单位步长双环网络的方法; 同时还给出一个求非单位步长双环网络无限族的方法, 并求两个非单位步长双环网络无限族.

1 定义和引理

因为 $G(N; r, s)$ 是点对称的, 所以要研究 $G(N; r, s)$ 的直径只需考查从顶点 0 到其他顶点 k 的距离. 为此, 在 Descartes 平面直角坐标系中, 令 x 轴的单位为 r (或 s), y 轴的单位为 s (或 r). 把第 1 象限中的所有格点 (x, y) 按下列顺序排成序列:

$(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), \cdots, (j, 0), (j-1, 1), \cdots, (j-i, i), \cdots, (1, j-1), (0, j), \cdots$

并且依次在每一格点 (x, y) 的右上角的单位方格内安置一个数 $k \in \{0, 1, 2, \cdots, N-1\}$, 其中 $k = xr + ys \pmod{N}$. 如果在此之前数 k 已出现过, 则空出此方格, 考查下一个格点, 直到数 $0, 1, 2, \cdots, N-1$ 都出现时为止.

$G(16; 3, 5)$ 按上述方法得到的构图如图 1 所示, 其中 $N = 16, r = 3, s = 5$.

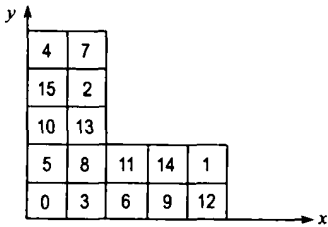


图 1 双环网络 $G(16; 3, 5)$

Fig. 1 Double-loop network $G(16; 3, 5)$

已经证明^[8]: 如果 N, r, s 满足 $\text{g. c. d.}(N, r, s) = 1$, 则由 $G(N; r, s)$ 所确定的 N 个方格组成的构图呈图 2 所示的面积为 N 个单位的 L 形 (也可能是矩形或正方形, 例如 $G(15; 1, 3)$ 和 $G(16; 1, 4)$) 区域, 记为 $L(N; r, s)$. 易知, 若数 k 位于格点

(x, y) 的右上角的方格内, 则在强连通的 $G(N; r, s)$ 中, 顶点 0 到顶点 k 的距离是 $x + y$.

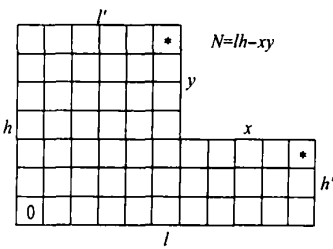


图 2 L 形瓦 $L(N; l, h, x, y)$

Fig. 2 L-shaped tile $L(N; l, h, x, y)$

定义 1 如图 2 所示, 由 l, h, x, y 所确定的面积为 N 个单位的 L 形区域称为 L 形瓦, 记为 $L(N; l, h, x, y)$, 其中 l, h, x, y 都是整数, 并且规定 $l, h \geq 2, 0 \leq x < l, 1 \leq y < h, y < l, x \leq h$. 令 $D(L(N; l, h, x, y)) = \max\{h + l' - 2, l + h' - 2\}$, 称为 $L(N; l, h, x, y)$ 的直径. 记在面积为 N 个单位的所有 L 形瓦中直径的最小值为 $D(N)$. 记由 $G(N; r, s)$ 确定的 L 形瓦的直径为 $D(N; r, s)$. $L = L(N; l, h, x, y)$ 称为紧的, 如果 $D(L) = \text{lb}(N)$; L 称为可被 (r, s) 实现的, 如果存在一个 $G(N; r, s)$ 使得 $L(N; r, s) = L(N; l, h, x, y)$.

根据上述记号和定义可知, 对任何 $G(N; r, s)$, 均有 $d(N; r, s) = D(N; r, s)$, 并且 $d(N) \geq D(N)$. 若 $G(N; r, s)$ 是紧优的, 则它所对应的 L 形瓦一定是紧瓦. 反之, 若 L 形瓦是紧瓦, 则不一定有紧优 $G(N; r, s)$ 与之对应.

引理 1^[3 8] 设 $I_1(t) = [3t^2 + 1, 3t^2 + 2t]$, $I_2(t) = [3t^2 + 2t + 1, 3t^2 + 4t + 1]$, $I_3(t) = [3t^2 + 4t + 2, 3(t + 1)^2]$. 则对于正整数 T 成立, $[4, 3T^2 + 6T + 3] = \bigcup_{t=1}^T \bigcup_{i=1}^3 I_i(t)$, 并且对每个 $i = 1, 2, 3$, 若 $N \in I_i(t)$, 则 $\text{lb}(N) = 3t + i - 2$.

引理 2^[3 8] 设 $L = L(N; l, h, x, y)$ 是 L 形瓦, 若 $|x - y| \geq z_0 \geq 1$, 则 $d(L(N; l, h, x, y)) \geq$

$$3N - \frac{3}{4}z_0^2 + \frac{1}{2}z_0 - 2.$$

引理 3^[3 8] 设 $N(t) = 3t^2 + At + B \in I_i(t)$, $L = L(N(t); l, h, x, y)$ 是 L 形瓦, 其中 $l = 2t + a, h = 2t + b, x = t + a + b - j, z = y - x \geq 0$ (或者 $y = t + a + b - j, z = x - y \geq 0$), a, b

x, y 均为 t 的整系数多项式, 则 L 是 k 紧的当且仅当

$$(a + b - j)(a + b - j + z) - ab + (A + z - 2j)t + B = 0 \tag{1}$$

对 $j = i + k (k \in \mathbb{Z})$ 成立; 且 L 可被 $(1, s)$ 实现的充分必要条件是 $\text{g. c. d.}(y, h - y) = 1$. 若存在 T 和 U , 使得 $Ty + U(h - y) = 1$, 则存在 k 紧优双环网络 $G(N(t); 1, s)$, 其中 $s = T - U(l - x) \pmod{N(t)}$.

定理 1^[3] 关于 a 和 b 的不定方程

$$(a + b - j)(a + b - j + z) - ab + (6 + z - 2j)t - 26 = 0$$

有整数解的必要条件是 $H(z, j) = (2j - z)^2 - 3[j(j - z) + (6 + z - 2j)t - 26]$ 可表示成 $s^2 + 3m^2$ 的形式, 其中 s 和 m 均为整数.

下面的引理 4 是定理 1 的推广, 引理 4 的证明见文献 [3].

引理 4 令 $H(z, j) = (2j - z)^2 - 3[j(j - z) + (A + z - 2j)t + B]$, 则关于 a 和 b 的不定方程 (1) 有整数解的必要条件是 $4H(z, j)$ 可表示成 $s^2 + 3m^2$ 的形式, 其中 s 和 m 均为整数.

定理 2^[3] 设 $n \in \mathbb{Z}$, 存在 $s, m \in \mathbb{Z}$, 使得 $n = s^2 + 3m^2$ 的必要条件是若 n 有素因子 $p = 2$ 或 $p = 5 \pmod{6}$, 则 p 在 n 的素因子分解中有偶次幂.

易证素数 $p = 2$ 或 $p = 5 \pmod{6}$ 等价于素数 $p = 2 \pmod{3}$, 故可得下面的引理 5.

引理 5 设 n, s 和 m 为整数, $n = s^2 + 3m^2$ 的必要条件是若 n 有素因子 $p = 2 \pmod{3}$, 则 p 在其素因子分解中有偶次幂.

引理 6^[1] 若 $L = L(N; l, h, x, y)$ 是 L 形瓦, $N = lh - xy$, 则 L 可被 (r, s) 实现的充分必要条件是 $\text{g. c. d.}(l, h, x, y) = 1$, 其中 r (或 s) $= T_h + Uy \pmod{N}$, s (或 r) $= Tx + U \pmod{N}$, 且满足 $\text{g. c. d.}(N, r, s) = 1$, T 和 U 是整数.

2 一个求非单位步长双环网络方法

先证明下面的定理 3.

定理 3 设正整数 $N = 3t^2 + At + B \in I_i(t)$, k 为任意非负整数, $H(z, j) = (2j - z)^2 - 3[j(j - z) + (A + z - 2j)t + B]$, 若满足:

(1) $A = 1, 3, 5$ 时, $3N - \frac{3}{4}(2k + 2)^2 > \left(3t + \frac{A - 1}{2}\right)^2$, 且当 $0 \leq z \leq 2k + 1, j = i + k \left[i = \frac{A + 1}{2}\right]$ 时, $4H(z, j)$ 不能表示成 $s^2 + 3m^2$ 的形式, 其中 s 和 m 均为整数;

(2) $A = 2, 4, 6$ 时, $3N - \frac{3}{4}(2k + 1)^2 > \left(3t + \frac{A - 1}{2}\right)^2$, 且当 $0 \leq z \leq 2k, j = i + k \left[i = \frac{A}{2}\right]$ 时, $4H(z, j)$ 不能表示成 $s^2 + 3m^2$ 的形式, 其中 s 和 m 均为整数;

则 N 个结点不存在 k 紧优双环网络.

证明 下面只讨论情况 (1), 情况 (2) 类似.

假设 N 含 k 紧优双环网络, 则必存在 k 紧瓦 $L = L(N; l, h, x, y)$. 令 $z = |x - y|$, 则当 $z \geq (2k + 2)$ 时, 根据引理 2, 由 $3N - \frac{3}{4}(2k + 2)^2 > \left(3t + \frac{A - 1}{2}\right)^2$, 则

$$d(L(N; l, h, x, y)) \geq 3N - \frac{3}{4}(2k + 2)^2 + \frac{1}{2}(2k + 2) - 2 > 3t + \frac{A - 1}{2} + \frac{1}{2}(2k + 2) - 2 = 3t + i - 2 + k \left[i = \frac{A + 1}{2}\right]$$

根据引理 1, $\text{lb}(N) = 3t + i - 2$, 故 $z \geq (2k + 2)$ 时, 不存在 k 紧瓦 $L = L(N; l, h, x, y)$.

当 $0 \leq z \leq 2k + 1, j = i + k$ 时, $4H(z, j)$ 不能表示成 $s^2 + 3m^2$ 的形式, 故由引理 4 相应的关于 a 和 b 的不定方程 (1) 没有整数解. 再由引理 3, 当 $0 \leq z \leq 2k + 1, j = i + k$ 时, 亦不存在 k 紧瓦 $L = L(N; l, h, x, y)$.

定理得证.

需要说明的是, 定理 3 只是一个充分条件. 由引理 3 和引理 6, 关于 a 和 b 的不定方程 (1) 有整数解, 其 L 形瓦并不总能被实现, 即并不总能推出 $N(t)$ 存在 k 紧双环网络.

由定理 3, 可得如下求非单位步长双环网络的方法.

设非负整数 k, k_1 , 且 $k < k_1$.

步骤 1 由定理 3, 通过计算相应的 $4H(z, j)$, 可求一集合 $S = \{N > 4 \text{ 且 } N \text{ 不存在 } i \text{ 紧双环}$

网络 $(0 \leq i \leq k-1 \text{ 或者 } k+1 \leq i \leq k_1-1)$;

步骤 2 在集合 S 中,使用普通算法验证 S 中每个 N , 容易发现若干非单位步长双环网络,即关于 $G(N; r, s)$ 存在 k 紧优双环网络,关于 $G(N; 1, s)$ 存在 k_1 紧优双环网络.

下面看两个例子.

例 1 令 $N = 631\,098$, 则 $N = 3t^2 + At + B \in I_2(t)$, 其中 $t = 458, A = 4, B = -26$.

当 $k = 0$ 时, 易得 $3N - \frac{3}{4}(2k+1)^2 > \left(3t + \frac{A-1}{2}\right)^2$, 且对于 $z = 0, j = 2, t = 458$, $H(z, j) = 82 = 2 \cdot 41$, 故有素因子 $2 = 2 \pmod{3}$, 其幂次为 1. 由引理 5, $4H(z, j)$ 不能表示成 $s^2 + 3m^2$ 的形式, 因而不存在 0 紧优双环网络.

当 $k = 2$ 时, 易得 $3N - \frac{3}{4}(2k+1)^2 > \left(3t + \frac{A-1}{2}\right)^2$, 且对于 $0 \leq z \leq 4, j = 4, t = 458$,

$H(0, 4) = 5\,590 = 5 \cdot 1\,118$, 故有素因子 $5 = 2 \pmod{3}$, 幂次为 1;

$H(1, 4) = 4\,213 = 11 \cdot 383$, 故有素因子 $11 = 2 \pmod{3}$, 幂次为 1;

$H(2, 4) = 2\,838 = 2 \cdot 1\,419$, 故有素因子 $2 = 2 \pmod{3}$, 幂次为 1;

$H(3, 4) = 1\,465 = 5 \cdot 293$, 故有素因子 $5 = 2 \pmod{3}$, 幂次为 1;

$H(4, 4) = 94 = 2 \cdot 47$, 故有素因子 $2 = 2 \pmod{3}$, 幂次为 1.

由引理 5, $4H(z, j)$ 不能表示成 $s^2 + 3m^2$ 的形式, 因而不存在 2 紧优双环网络.

使用普通算法验证可得, $G(631\,098; 14, 1\,347)$ 为 1 紧优双环网络; $G(631\,098; 1, 1\,368)$ 为 3 紧优双环网络. 即 631 098 为非单位步长整数, $k_1 - k = 2$ 关于模型 $G(N; 1, s)$, 不存在包含 631 098 的 1 紧优双环网络无限族.

对于 $z = 1, j = 3, A = 4, B = -26$, 下式成立:

$$(a + b - j)(a + b - j + z) - ab + (A + z - 2j)t + B = 0$$

即

$$(a + b - 3)(a + b - 2) - ab - t - 26 = 0$$

当 $t = 458$ 时, 该不定方程有整数解 $S = \{(-17, -4), (-17, 26), (-4, -17), (-4, 26), (26, -17), (26, -4)\}$.

令 $a = -4, b = f + 26$, 由不定方程 $(a + b - 3)(a + b - 2) - ab - t - 26 = 0$ 可得 $t = f^2 + 43f + 458$, 因而可得

$$l(f) = 2t + a = 2f^2 + 86f + 912,$$

$$h(f) = 2t + b = 2f^2 + 87f + 942$$

$$x(f) = t + a + b - j = f^2 + 44f + 477,$$

$$y(f) = x(f) + z = f^2 + 44f + 478$$

$$h(f) - 2y(f) = -(f + 14),$$

$$x(f) - 2l(f) = -(3f^2 + 128f + 1\,347);$$

$$\text{g. c. d.}(f + 14, 3f^2 + 128f + 1\,347) = \text{g. c. d.}(f + 14, 143)$$

所以当 f 为 143 的倍数时, $\text{g. c. d.}(2y(f) - h(f), 2l(f) - x(f)) = \text{g. c. d.}(14, 143) = 1$, 即 $\text{g. c. d.}(l(f), h(f), x(f), y(f)) = 1$

由 $T = -1, U = 2$, 得 $r(f) = Uy(f) + Th(f) = f + 14, s(f) = Ul(f) + Tx(f) = 3f^2 + 128f + 1\,347$.

由引理 6 和定理 3, $\{G(3t^2 + 4t - 26; r(f), s(f)): t = f^2 + 43f + 458, r(f) = f + 14, s(f) = 3f^2 + 128f + 1\,347, f = 143e, e \geq 0\}$ 是一个 1 紧优双环网络无限族. 当 $e = 0$ 时, 即为 $G(631\,098; 14, 1\,347)$.

例 2 易得 $G(3\,084\,354; 8, 3\,107)$ 为 2 紧优双环网络; $G(3\,084\,354; 1, 28\,270)$ 为 3 紧优双环网络. 即 3 084 354 为非单位步长整数, $k_1 - k = 1$. 关于模型 $G(N; 1, s)$, 不存在包含 3 084 354 的 2 紧优双环网络无限族.

取 $N(t) = 3t^2 + 6t - 231 \in I_3(t)$, 当 $t = 1\,013$ 时, $N(t) = 3\,084\,354$.

对于 $3 \leq j \leq 5, 0 \leq z \leq 2(j-3)$, 将 $t = 1\,013$ 代入每一个 $H(z, j)$, 可得

$$H(0, 3) = 702, \text{ 故有素因子 } 2, \text{ 幂次为 } 1;$$

$$H(0, 4) = 6\,787, \text{ 故有素因子 } 11, \text{ 幂次为 } 1;$$

$$H(1, 4) = 3\,745, \text{ 故有素因子 } 5, \text{ 幂次为 } 1;$$

$$H(2, 4) = 705, \text{ 故有素因子 } 5, \text{ 幂次为 } 1.$$

由引理 5, $4H(z, j)$ 不能表示成 $s^2 + 3m^2$ 的形式, 因而不存在 0 紧优和 1 紧优双环网络.

以上所有素因子相应偶次幂的最小公倍数为 $(H(0, 3) \text{ 和 } H(2, 4) \text{ 关于 } t \text{ 为常数, 故可以不考虑}) g = 25 \cdot 11^2$.

$H(0, 5) = 12\,874$, 故有素因子 2, 幂次为 1;

$H(1, 5) = 9\,831$, 故有素因子 29, 幂次为 1;

$H(2, 5) = 6\,790$, 故有素因子 2, 幂次为 1;

$H(3, 5) = 3\,751 = 2^2 + 3 \cdot 3^3$;

$H(4, 5) = 714$, 故有素因子 2, 幂次为 1.

对于 $z = 3, j = 5, A = 6, B = -231$ 有下式成立:

$$(a + b - j)(a + b - j + z) - ab +$$

$$(A + z - 2j)t + B = 0$$

即

$$(a + b - 5)(a + b - 2) - ab - t - 231 = 0$$

当 $t = 1\,013$ 时, 该不定方程有整数解 $S = \{(-38, 17), (-38, 28), (17, -38), (17, 28), (28, -38), (28, 17)\}$.

令 $a = 28, b = f - 38$, 由不定方程 $(a + b - 5)(a + b - 2) - ab - t - 231 = 0$ 可得 $t = f^2 - 55f + 1\,013$, 因而可得

$$l(f) = 2t + a = 2f^2 - 110f + 2\,054,$$

$$h(f) = 2t + b = 2f^2 - 109f + 1\,988$$

$$y(f) = t + a + b - j = f^2 - 54f + 998$$

$$x(f) = y(f) + z = f^2 - 54f + 1\,001,$$

$$h(f) - 2y(f) = -(f + 8),$$

$$x(f) - 2l(f) = -(3f^2 - 166f + 3\,107);$$

$$\text{g. c. d.}(f + 8, 3f^2 - 166f + 3\,107) = \text{g. c. d.}(f + 8, 4\,627)$$

所以当 f 为 $4\,627$ 的倍数时, $\text{g. c. d.}(2y(f) - h(f), 2l(f) - x(f)) = \text{g. c. d.}(8, 4\,627) = 1$, 即 $\text{g. c. d.}(l(f), h(f), x(f), y(f)) = 1$.

由 $T = -1, U = 2$, 得 $r(f) = Uy(f) + Th(f) = f + 8, s(f) = Ul(f) + Tx(f) = 3f^2 - 166f + 3\,107$.

由引理 6 和定理 3, $\{G(3t^2 + 6t - 231; r(f), s(f)): t = f^2 - 55f + 1\,013, r(f) = f + 8, s(f) = 3f^2 - 166f + 3\,107, f = 4\,627 \cdot 25 \cdot 11^2 e, e \geq 0\}$ 是一个 2 紧优双环网络无限族. 当 $e = 0$ 时, 即为 $G(3\,084\,354; 8, 3\,107)$.

3 非单位步长双环网络的无限族

本文的思路是从一个具体的非单位步长双环

网络 N_0 出发, 构造非单位步长双环网络的无限族.

设 $N(t) = 3t^2 + At + B$, 且 $N(t_0) = N_0$, $N(t) \in I(t)$. 有时, $4H(z, j)$ 虽然能表示成 $s^2 + 3m^2$ 的形式, 其中 s 和 m 均为整数, 即关于 a 和 b 的不定方程 (1) 有整数解, 即存在 k 紧瓦 $L = L(N; l, h, x, y)$. 但若 $\text{g. c. d.}(y, h - y) \neq 1$, 则 k 紧瓦 $L = L(N; l, h, x, y)$ 是不能实现的. 而满足 $\text{g. c. d.}(y, h - y) \neq 1$ 的条件, 可归结为关于 t 的一组同余方程.

另一方面, $4H(z, j)$ 不能表示成 $s^2 + 3m^2$ 的形式, 由引理 5 可归结为在 $H(z, j)$ 中找出一个素因子 $p \equiv 2 \pmod{3}$, 使得 p 在其素因子分解中有奇次幂 $2q+1$. 设 $H(z, j) = at + b$, 则 $at_0 + b = xp^{2q+1}$ 且 x 不能被 p 整除. 当 $t = t_0 \pmod{p^{2q+2}}$ 时, $at + b = at_0 + b \pmod{p^{2q+2}} = xp^{2q+1} \pmod{p^{2q+2}}$ 成立. 即 t 满足 $t = t_0 \pmod{p^{2q+2}}$ 时, p 在 $at + b$ 的素因子分解中有奇次幂 $2q+1$.

所有这些同余方程组成一个同余方程组, t_0 即为一个具体解, 该同余方程组的所有解即构成一个非单位步长双环网络的无限族.

下面给出一个求非单位步长双环网络无限族的方法:

步骤 1 求一个具体的非单位步长双环网络 N_0 , 且 $d(N_0) = k + 1, \text{lb}(N_0), d_1(N_0) = k + 1, \text{lb}(N_0), k_1 - k > 0$, 则关于 $G(N; 1, s), N_0$ 不含 $i (0 \leq i < k_1)$ 紧优双环网络;

步骤 2 找一个包含 N_0 的多项式 $N(t) = 3t^2 + At + B$, 设 $N(t_0) = N_0, N(t) \in I(t)$;

步骤 3 取 $T = -1, U = 2$, 根据引理 6, 适当选取 $r(t), s(t)$, 使 $\{G(N(t); r(t), s(t)): t = 10e + t_0, e \geq 0\}$ 为 k 紧优双环网络 (关于 $G(N; r, s)$) 无限族;

步骤 4 对于每一个 $H(z, j), i \leq j \leq i + k_1, 0 \leq z \leq 2(j - i)$ (若 $A = 1, 3, 5$, 则 $0 \leq z \leq 2(j - i) + 1$),

(a) $4H(z, j)$ 不能表示成 $s^2 + 3m^2$ 的形式

将 t_0 代入 $H(z, j)$, 在 $H(z, j)$ 中找出一个素因子 $p \equiv 2 \pmod{3}$, 使得 p 在其素因子分解中有奇次幂 $2q+1$;

设得到的素因子及幂次分别为 $p_1^{2q_1+1}, p_2^{2q_2+1}, \dots, p_i^{2q_i+1}$, 设 $p_1^{2q_1+2}, p_2^{2q_2+2}, \dots, p_i^{2q_i+2}$ 的最小公倍数为 g_0 .

(b) $4H(z, j)$ 能表示成 $s^2 + 3m^2$ 的形式

当 $t = t_0$ 时, 方程 $(a + b - j)(a + b - j + z) - ab + (A + z - 2j)t + B = 0$ 有解.

对于每个解 (a, b) , 可如下定义 $(j - i)$ 紧瓦 $L = L(N; l, h, x, y)$:

$$l(t) = 2t + a = 2(t - t_0) + l_0,$$

$$h(t) = 2t + b = 2(t - t_0) + h_0,$$

$$x(t) = t + a + b - j = (t - t_0) + x(t_0),$$

$$y(t) = x(t) + z = (t - t_0) + y(t_0)$$

和

$$l(t) = 2t + a = 2(t - t_0) + l_0,$$

$$h(t) = 2t + b = 2(t - t_0) + h_0,$$

$$y(t) = t + a + b - j = (t - t_0) + y(t_0),$$

$$x(t) = y(t) + z = (t - t_0) + x(t_0)$$

对每个 $(j - i)$ 紧瓦 $L = L(N; l, h, x, y)$, 由于 $t = t_0$ 时 $\text{g. c. d.}(y, h - y) \neq 1$, 存在 $\text{g. c. d.}(y, h - y) \neq 1$ 的一个最小素因子 g .

设所有得到的素因子为 $g_i, 1 \leq i \leq q$.

步骤 5 设 $g_i, 0 \leq i \leq q$ 的最小公倍数为 g , 则 $\{N(t); t = ge + t_0, e \geq 0\}$ 即为一个不含 $i (0 \leq i \leq k_1)$ 紧优双环网络 (关于 $G(N; 1, s)$) 的无限族.

步骤 6 取 l_0 和 g 的最小公倍数 l , 则 $\{G(N(t); r(t), s(t)); t = le + t_0, e \geq 0\}$ 为一个非单位步长双环网络无限族, 且 $d_1(N(t)) - d(N(t)) \geq k_1 - k$.

下面具体求两个非单位步长双环网络的无限族.

例 3 通过上一章求非单位步长双环网络的方法, 可求得非单位步长整数 815 190, $G(815\ 190; 21, 1\ 586)$ 为 1 紧优双环网络; $G(815\ 190; 1, 1\ 626)$ 为 3 紧优双环网络. 即 815 190 为非单位步长整数, $k_1 - k = 2$.

取 $N(t) = 3t^2 + 2t - 175 \in I_1(t)$, 当 $t = 521$ 时, $N(t) = 815\ 190$.

对于 $1 \leq j \leq 3, 0 \leq z \leq 2(j - 1)$, 将 $t = 521$ 代入每一个 $H(z, j)$, 可得

$H(0, 1) = 526$, 故有素因子 2, 幂次为 1;

$H(0, 2) = 3\ 655$, 故有素因子 5, 幂次为 1;

$H(1, 2) = 2\ 091$, 故有素因子 17, 幂次为 1;

$H(2, 2) = 529 = 23^2$;

$H(0, 3) = 6\ 786$, 故有素因子 2, 幂次为 1;

$H(1, 3) = 5\ 221$, 故有素因子 23, 幂次为 1;

$H(2, 3) = 3\ 658$, 故有素因子 2, 幂次为 1;

$H(3, 3) = 2\ 097$, 故有素因子 233, 幂次为

1.

$H(4, 3) = 538$, 故有素因子 2, 幂次为 1.

以上所有素因子相应偶次幂的最小公倍数为

$$g_0 = 4 \cdot 25 \cdot 17^2 \cdot 23^2 \cdot 233^2.$$

对于 $z = 2, j = 2, A = 2, B = -175$ 下式成立:

$$(a + b - j)(a + b - j + z) - ab + (A + z - 2j)t + B = 0$$

即

$$(a + b - 2)(a + b) - ab - 175 = 0$$

该不定方程有整数解 $S = \{(-7, -7), (-7, 16), (16, -7)\}$.

对于每个解 $(a, b) \in S$, 如下定义 1 紧瓦 $L = L(N; l, h, x, y)$:

$$l(t) = 2t + a = 2(t - 521) + l_0,$$

$$h(t) = 2t + b = 2(t - 521) + h_0,$$

$$x(t) = t + a + b - j = (t - 521) + x(521),$$

$$y(t) = x(t) + z = (t - 521) + y(521)$$

和

$$l(t) = 2t + a = 2(t - 521) + l_0,$$

$$h(t) = 2t + b = 2(t - 521) + h_0,$$

$$y(t) = t + a + b - j = (t - 521) + y(521),$$

$$x(t) = y(t) + z = (t - 521) + x(521)$$

对每个 1 紧瓦 $L = L(N; l, h, x, y)$, 由于 $t = 521$ 时 $\text{g. c. d.}(y, h - y) \neq 1$, 存在 $\text{g. c. d.}(y, h - y) \neq 1$ 的一个最小素因子 g , 所有得到的素因子为 2 3 5.

由引理 3 容易验证, 如果 t 同时满足下列 3 个条件:

$$t = 521 \pmod{2} = 1 \pmod{2}, t = 521 \pmod{3} = 2 \pmod{3}, t = 521 \pmod{5} = 1 \pmod{5}$$

面积为 $N(t) = 3t^2 + 2t - 175$ 的所有 1 紧优 L 形

瓦满足 $\text{g. c. d.}(y, h - y) \neq 1$, 即都不能被 $(1, s)$ 实现.

令 $g = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 17^2 \cdot 23^2 \cdot 233^2$, 再由定理 3 可知 $\{N(t); t = ge + 521, e \geq 0\}$ 为一个不含 k ($0 \leq k \leq 2$) 紧优双环网络的无限族.

有些 L 形瓦关于 $G(N; 1, s)$ 不能被实现, 但关于 $G(N; r, s)$ 能被实现.

取与 $(16, -7)$ 对应的 L 形紧瓦 $L(N; l, h, x, y)$: $l(t) = 2t + 16, h(t) = 2t - 7, y(t) = t + 7, x(t) = t + 9$, 显然, $\text{g. c. d.}(2t + 16, 2t - 7, t + 7, t + 9) = 1$, 由 $T = -1, U = 2$, 得 $r = U_y(t) + T_h(t) = 21, s = U_l(t) + T_x(t) = 3t + 23$.

$t \neq 4 \pmod{7}$ 时, $\text{g. c. d.}(N, r, s) = 1$, 由引理 6, $\{G(3t^2 + 2t - 175; 21, 3t + 23); t > 88 \text{ 且 } t \neq 4 \pmod{7}\}$ 是关于模型 $G(N; r, s)$ 的 1 紧优双环网络无限族.

综合以上讨论, $\{N(t); t = 7ge + 521, e \geq 0\}$ 为一个满足 $k_1 - k \geq 2$ 且 $k = 1$ 的非单位步长双环网络无限族.

例 4 已知非单位步长整数 870 390, $G(870\,390; 19, 1\,617)$ 为 1 紧优双环网络; $G(870\,390; 1, 10\,635)$ 为 3 紧优双环网络. 即 870 390 为非单位步长整数, $k_1 - k = 2$.

取 $N(t) = 3t^2 + 4t - 94 \in I_2(t)$, 当 $t = 538$ 时, $N(t) = 870\,390$.

对于 $2 \leq j \leq 4, 0 \leq i \leq 2(j - 2)$, 将 $t = 538$ 代入每一个 $H(z, j)$, 可得

$H(0, 2) = 286$, 故有素因子 2, 幂次为 1;
 $H(0, 3) = 3\,519$, 故有素因子 17, 幂次为 1;
 $H(1, 3) = 1\,903$, 故有素因子 11, 幂次为 1;
 $H(2, 3) = 289 = 17^2$;
 $H(0, 4) = 6\,754$, 故有素因子 11, 幂次为 1;
 $H(1, 4) = 5\,137$, 故有素因子 11, 幂次为 1;
 $H(2, 4) = 3\,522$, 故有素因子 2, 幂次为 1;
 $H(3, 4) = 1\,909$, 故有素因子 23, 幂次为 1;
 $H(4, 4) = 298$, 故有素因子 2, 幂次为 1.

以上所有素因子相应偶次幂的最小公倍数为 $g_0 = 4 \cdot 11^2 \cdot 17^2 \cdot 23^2$.

对于 $z = 2, j = 3, A = 4, B = -94$, 下式成立:

$$(A + z - 2j)t + B = 0$$

即

$$(a + b - 3)(a + b - 1) - ab - 94 = 0$$

该不定方程有整数解 $S = \{(-10, 7), (7, -10), (7, 7)\}$.

对于每个解 $(a, b) \in S$, 如下定义 1 紧瓦 $L = L(N; l, h, x, y)$:

$$l(t) = 2t + a = 2(t - 538) + l_0,$$

$$h(t) = 2t + b = 2(t - 538) + h_0,$$

$$x(t) = t + a + b - j = (t - 538) + x(538),$$

$$y(t) = x(t) + z = (t - 538) + y(538)$$

和

$$l(t) = 2t + a = 2(t - 538) + l_0,$$

$$h(t) = 2t + b = 2(t - 538) + h_0,$$

$$y(t) = t + a + b - j = (t - 538) + y(538),$$

$$x(t) = y(t) + z = (t - 538) + x(538)$$

对每个 1 紧瓦 $L = L(N; l, h, x, y)$, 由于 $t = 538$ 时 $\text{g. c. d.}(y, h - y) \neq 1$, 存在 $\text{g. c. d.}(y, h - y) \neq 1$ 的一个最小素因子 g , 所有得到的素因子为 2 3 19.

由引理 3 容易验证, 如果 t 同时满足下列 3 个条件:

$t = 538 \pmod{2} = 0 \pmod{2}, t = 538 \pmod{3} = 1 \pmod{3}, t = 538 \pmod{19} = 6 \pmod{19}$
 面积为 $N(t) = 3t^2 + 4t - 94$ 的所有 1 紧优 L 形瓦满足 $\text{g. c. d.}(y, h - y) \neq 1$, 即都不能被 $(1, s)$ 实现.

令 $g = 3 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 4 \cdot 11^2 \cdot 17^2 \cdot 23^2$, 再由定理 3 可知 $\{N(t); t = ge + 538, e \geq 0\}$ 为一个不含 k ($0 \leq k \leq 2$) 紧优双环网络的无限族.

取与 $(7, 7)$ 对应的 L 形紧瓦 $L(N; l, h, x, y)$: $l(t) = 2t + 7, h(t) = 2t + 7, y(t) = t + 13, x(t) = t + 11$, 显然, $\text{g. c. d.}(2t + 7, 2t + 7, t + 11, t + 13) = 1$, 由 $T = -1, U = 2$ 得 $r = U_y(t) + T_h(t) = 19, s = U_l(t) + T_x(t) = 3t + 3$.

$t \neq 18 \pmod{19}$ 时, $\text{g. c. d.}(N, r, s) = 1$, 由引理 6, $\{G(3t^2 + 4t - 94; 19, 3t + 3); t > 56 \text{ 且 } t \neq 18 \pmod{19}\}$ 是关于模型 $G(N; r, s)$ 的 1 紧优双环网络无限族.

综合以上讨论, $\{N(t); t = ge + 538, e \geq 0\}$

为一个满足 $k_1 - k \geq 2$ 且 $k = 1$ 的非单位步长双环网络无限族.

4 结 语

本文求得两个非单位步长双环网络无限族 $(d_1(N) - d(N) \geq k)$. 结合求 k 紧优双环网络 $G(N(t); 1, s)$ 无限族的方法 (参见文献 [9]), 也可求 $d_1(N) - d(N) = k (k > 0)$ 的非单位步长双环网络无限族.

参考文献:

[1] 徐俊明. 计算机互连双环网络的最优设计 [J]. 中国科学: E辑, 1999, **29**(3): 272-278
[2] AGUILÓ F, SIMÓ E, ZARAGOZA M. Optimal double-loop networks with non-unit steps [J].

Electr J Combinatorics, 2003, **10**(1): # R2
[3] 徐俊明, 刘琦. 一类 4 紧优双环网络无限族 [J]. 中国科学: A 辑, 2003, **33**(1): 71-74
[4] 徐俊明. 不含紧优和几乎紧优双环网络无限族 [J]. 科学通报, 1999, **44**(5): 486-490
[5] 徐俊明. 2 紧优双环网络无限族 [J]. 高校应用数学学报: A 辑, 2000, **15**(2): 148-152
[6] 徐俊明, 尹治军. 7 类新的 2 紧优双环网络无限族 [J]. 中国科学技术大学学报, 2002, **32**(4): 399-402
[7] HWANG F K. A complementary survey on double-loop networks [J]. *Theoret Comput Sci*, 2001, **263** 211-229
[8] 李乔, 徐俊明, 张忠良. 最优双环网络的无限族 [J]. 中国科学: A 辑, 1993, **23**(9): 979-992
[9] 周建钦. k 紧优双环网络及其无限族 [J]. 数学学报, 2005, **48**(6): 1213-1220

On tight optimal double-loop networks $G(N; r, s)$ with non-unit step

XU Xi-rong^{* 1,2}, ZHOU Jian-qin³, WANG Guang-yang³

(1.School of Electr. and Inf.Eng., Dalian Univ.of Technol., Dalian 116024, China;
2.Dept. of Math., Univ. of Sci. and Technol. of China, Hefei 230026, China;
3.School of Comput. Sci., Anhui Univ. of Technol., Ma'anshan 243002, China)

Abstract Double-loop networks (DLN) has been widely studied as architecture for local area networks. A DLN $G(N; r, s)$ is a digraph with N vertices $0, 1, \dots, N - 1$ and $2N$ edges of two types $i \rightarrow i + r \pmod N, i \rightarrow i + s \pmod N$ where $1 \leq r \neq s < N$. If $G(N; r, s)$ is k -tight optimal DLN and $G(N; 1, s)$ is k_1 -tight optimal DLN, $k_1 > k$, then $G(N; r, s)$ is called non-unit step DLN. Based on the theory of L-shaped tile, a method for finding non-unit step integers is presented. Utilizing Chinese remainder theorem and prime number theory, it also presents a method to generate infinite families of double-loop networks with non-unit step ($k_1 - k \geq 1, k > 0$). As application examples, two infinite families of non-unit step integers with $k_1 - k \geq 2$ and $k > 0$ are given.

Key words double-loop networks; tight optimal; infinite family; non-unit step integer; prime number