

尖点突变模型在平板荷载试验中应用及预测研究

张业民^{* 1,2}, 郝冬雪^{1,2}, 栾茂田^{1,2}

(1. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

2. 大连理工大学 土木水利学院 岩土工程研究所, 辽宁 大连 116024)

摘要: 根据静力荷载试验曲线的特点, 定性分析了利用尖点突变模型表达荷载-沉降曲线的可行性. 通过坐标变换导出平板荷载试验的荷载-沉降曲线方程在沉降量、施加荷载及承载力因子三维空间中的表达式. 根据土的破坏条件, 确定出相应参数并建立其尖点突变模型. 利用该突变模型对已有的试验进行了预测, 预测结果和试验结果吻合较好.

关键词: 平板荷载试验; 尖点突变模型; 荷载-沉降; 极限承载力

中图分类号: TU195 **文献标识码:** A

0 引言

地基基础的重要性和复杂性, 决定了岩土勘察工程的必要性. 在地基基础设计时, 为了保证基础安全、经济合理, 设计前都要进行工程勘察. 岩土工程勘察成果报告为地基基础设计提供了可靠的数据. 原位测试指的是在土体的本来位置, 对处于天然状态下的土体所进行的工程性质的测试. 它具有直接性、真实性和实用性的特点, 对土体工程性质的判断起着十分重要的作用.

我国幅员辽阔, 地形复杂, 岩土的种类繁多, 同类土体在不同的场地工程状况也不相同, 所以岩土工程勘察不能完全被理论所替代. 但有一些原位测试试验的时间很长, 加载困难, 试验结果也难确定. 若把试验与理论模型相结合来确定地基土的极限承载力或检验设计荷载, 既节约工时, 又节省造价.

平板荷载试验是在一定面积的承压板上向地基土逐级施加荷载, 观测地基土的压力与变形特性的原位试验. 它反映承压板下 1.5~2.0倍承压板直径(或宽度)深度范围内地基土强度、变形的综合性状. 承压板的底面积^[1]一般为 0.25~0.50 m²; 对均匀密实土可用 0.10~0.25 m²; 对松软及人工填土则不应小于 0.50 m².

1 平板荷载试验的尖点突变模型

突变理论是一种能够直接处理不连续性而无须联系任何内在机制的先进理论, 特别适用于内部作用尚属未知的系统研究, 并适用于观察具有不连续性的情况^[2]. 由 $p-s$ 曲线的发展及土破坏过程可以看出, 对于较硬土地基而言, 当荷载大于某一数值时, 基础急剧下降, 地基发生突然破坏; 而软黏土和松砂地基土的变形是渐变的, 没有突变现象. 故可运用尖点模型表达地基土工作至破坏的中间过程^[3].

连续固体介质如钢材受拉、混凝土受压, 当拉力或压力增大到某一极限值时, 钢筋会被拉断, 混凝土会被压碎. 但土体与此不同, 因土体的天然特殊性, 其极限承载能力不能像钢材、混凝土那样确定, 而是以土的变形控制. 如果土的变形特性不能满足设计要求, 即认为土体破坏. 在 $p-s$ 曲线中也能体会到这一点, $p-s$ 曲线有明显拐点, 出现陡降时, 以拐点处荷载 p 作为极限荷载 p_u ; $p-s$ 曲线没有明显拐点或没有拐点时, 以沉降量 $s = 0.06b$ (b 为荷载板的边长或直径) 点所对应的荷载值 p 作为极限荷载 p_u ^[4]. 所以可认为土体剪切破坏以变形为状态变量, 即当变形超过允许值时土体破坏.

收稿日期: 2005-06-12 修回日期: 2006-08-26.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172022); 教育部跨世纪优秀人才培养计划研究基金资助项目.

作者简介: 张业民^{*} (1964-), 男, 博士生导师, E-mail: m1964@126.com; 栾茂田 (1962-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, E-mail: mluan@dlut.edu.cn.

1.1 坐标变换

本文定义变量或参数如下：将表征物质态变化参量的土的沉降变形量 s 作为状态变量；土的承载力因子 R 与荷载 p 作为控制变量； k 为加载系数，如图 1 所示。

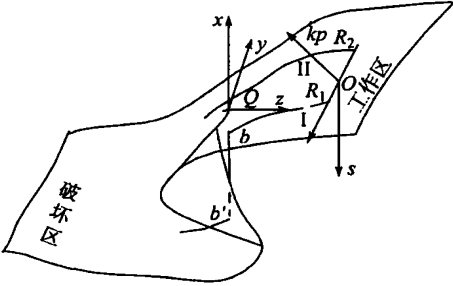


图 1 地基承载力破坏的尖点突变模型
Fig. 1 The cusp-catastrophe model of failure of soils

行为曲面的标准方程为

$$x^3 + xy - z = 0 \tag{1}$$

进行坐标变换，原坐标为 (x, y, z) ，新坐标为 (s, R, p) ，其中 s R p 分别代表地基土变形、土的承载力因子和外加荷载值。新旧坐标之间的关系可表示为^[5]

$$\begin{cases} x = a_{11}s + a_{12}R + a_{13}kp + T \\ y = a_{21}s + a_{22}R + a_{23}kp + U \\ z = a_{31}s + a_{32}R + a_{33}kp + V \end{cases} \tag{2}$$

首先考虑坐标轴只有旋转而无平移的情况。由于曲面内存在一系列内置于工作曲面的直线，利用工作曲面这一特殊性质，令其中某一条直线为 R 轴， s 轴平行于原 x 轴，即垂直于平面 yOz ，则 R p 轴均平行于平面 yOz ，故系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{3}$$

此种情况只需考虑绕 y 轴旋转 θ ，新坐标与原坐标之间的关系如图 2，故有

$$\begin{cases} y = R \cos \theta - p \sin \theta \\ z = R \sin \theta + p \cos \theta \end{cases} \tag{4}$$

因此，同时考虑旋转与平移时的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x = -s + T \\ y = R \cos \theta + p \sin \theta + U \\ z = -R \sin \theta + p \cos \theta + V \end{cases} \tag{5}$$

则系数矩阵可写为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{6}$$

令直线 $z = T + T_y$ 表示土的承载力因子 R 轴（代表土的性质），则此直线相对于 y 轴的转角即为 θ ，如图 2，可得

$$\tan \theta = T, \sin \theta = \frac{-T}{1+T^2}, \cos \theta = \frac{-1}{1+T^2} \tag{7}$$

R 轴在曲面内， (T, U, V) 是新坐标原点 O 在旧坐标系中的坐标，所以有^[6]

$$T + TU - V = 0 \tag{8}$$

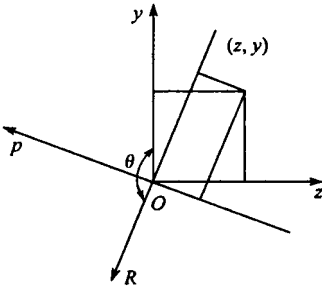


图 2 新旧坐标之间的关系
Fig. 2 The relation between new and old coordinates

1.2 参数 T U V 的确定

根据《建筑地基基础设计规范》（GB 50007-2002）^[4]，对于没有明显转折点的荷载试验 $p-s$ 曲线，取沉降为 0.06 承压板直径（ $0.06b$ ）所对应的加荷值为极限荷载。基于尖点突变模型的物理意义，尖点 Q 为分歧曲线的交点，假设土体的变形量 $s > 0.06b$ ， $p-s$ 曲线越过 Q 点土态趋向破坏区；变形量 $s < 0.06b$ ，认为土体依然有承载能力，则 $p-s$ 曲线还在工作区。因此，分歧交点 Q 是土态变化的分界点，即 $s = 0.06b$ 。当 Q 点平移至原点 O 时，相应的土破坏因子 R 和加载因子 kp 皆为零，故 x 轴坐标平移量 $T = 0.06b$ ，代入式（7）和（8），即

$$\tan \theta = 0.06b \tag{9a}$$

$$\sin \theta = \frac{-0.06b}{1+(0.06b)^2} \tag{9b}$$

$$\cos \theta = \frac{-1}{1+(0.06b)^2} \tag{9c}$$

此模型假设，如果土体破坏时 $R < 0$ ， $p-s$ 曲线绕过分歧交点 Q 进入破坏区；若土体破坏时 $R > 0$ ， $p-s$ 曲线有突变现象。根据这一假设，过原坐标点 $Q(0, 0, 0)$ 做与 R 轴垂直的平面 m ，平面 m 与直线 R 的交点即为新坐标点。

R 轴的直线方程为 $\begin{cases} x = 0.06b \\ x^3 + xy - z = 0 \end{cases}$ ，其方向向量为 $R = (0, 1, 0.06b)$ ，过点 $Q(0, 0, 0)$ 且

与 R 垂直的 m 平面方程为 $y + 0.06z = 0$. 平面 m 与直线 R 的交点为

$$\begin{cases} x = 0.06 \\ x^3 + xy - z = 0 \\ y + 0.06z = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = 0.06 \\ y = -(0.06)^4/[1+(0.06)^2] \\ z = (0.06)^3/[1+(0.06)^2] \end{cases}$$

即

$$(T,U,V)=\left[0.06,\frac{-(0.06)^4}{1+(0.06)^2},\frac{(0.06)^3}{1+(0.06)^2}\right] \quad (10)$$

1.3 系数 k 的确定

新坐标系下的行为曲面为

$$\begin{aligned} f(s,R,p) = & (-s+T)^3 + (-s+T)(R\cos\theta - \\ & kp\sin\theta + U) - R\sin\theta - kpcos\theta - \\ & r = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

式 (11) 变形得

$$R = \frac{[\sin\theta(T-s) + \cos\theta kp + U_s + T^3 - (T-s)^3]}{(T-s)\cos\theta - \sin\theta} \quad (12)$$

将 $(p_u, 0.06b)$ 代入式 (12), 令 $R = 0$, 有 $kp_u\cos\theta + U_s + T^3 = 0$, 将式 (9) 和 (10) 代入得 $kp_u = q$, 其中

$$q = \left[(0.06b)^3 - \frac{(0.06b)^5}{1+(0.06)^2} \right] \frac{1}{1+(0.06)^2}$$

对于软土 $k_1p_{u1} > q$, 土体破坏时没有明显的突变; 对于硬土 $0 < k_2p_{u2} < q$, 土体破坏时有明显的突变. 即软土承载力系数 $k_1 > q/p_{u1}$; 硬土承载力系数 $0 < k_2 < q/p_{u2}$. 其中 p_{ui} 为第 i 种软土的极限承载力 (kPa), p_{u2} 为第 i 种硬土的极限承载力 (kPa). 为满足上面两个不等式, 取

$p_{u1} = \min\{p_{ui}\}, p_{u2} = \max\{p_{ui}\}, p_{u1} \geq 10$ kPa (淤泥的最低承载力), 非特殊硬土或碎石土的承载力 $p_u \leq 1\,000$ kPa. 所以

$$k_1 = 0.1q, k_2 = 0.001q \quad (13)$$

1.4 面积为 0.5 m^2 的平板荷载试验模型

平板荷载试验的承压板, 应具有足够的刚度, 一般采用圆形或正方形刚性板. 面积为 0.5 m^2 的圆形承压板直径为 80 cm , 即 $b = 80\text{ cm}$. 其突变模型方程为

$$(4.8-s)^3 + (4.8-s)(R\cos\theta - kp\sin\theta - 22.08) - R\sin\theta - kpcos\theta - 4.6003 = 0 \quad (14)$$

其中

$$\cos\theta = -0.204 \quad (15a)$$

$$\sin\theta = -0.979 \quad (15b)$$

对于软土 $k = 2\,256$, 对于坚实的硬土 $k = 0.022\,56$.

2 模型可行性检验

对拟建的葫芦岛市住宅小区地基承载力进行静荷载试验, 试验测得了荷载-沉降关系见表 1~

4. 将试验数据代入式 (12), 求得试验点加载至破坏过程中土的承载力因子 R 值随所加荷载 p 的变化, 其中绿岛花园小区 4 号楼地基土为杂填土, 按软土取 k 值, 其他试验点按硬土取 k 值, 然后将 R 和 p 的关系用三次曲线拟合, 如图 3, 硬土破坏时的 R 值大于零, 软土破坏时的 R 值小于零, 符合假设. 将 14 个试验点的各组数据及拟合的 R 值代入式 (14), 计算结果在零左右, 按文中的推导, f 理论值应为 0, 数值和计算结果见表 5~8. 由此可见以尖点突变拟合 s - p - R 关系式在实践上是可行的.

表 1 s 值 (cm)

Tab. 1 Value s (cm)

p/kPa	试验点			
	绿岛 1	绿岛 2	志达西	志达北
50	0.048	0.720	0.078	0.088
100	0.148	0.150	0.165	0.142
150	0.220	0.227	0.247	0.193
200	0.318	0.326	0.342	0.238
250	0.435	0.450	0.448	0.270
300	0.567	0.581	0.505	0.327
350	0.699	0.711	0.583	0.405
400	0.848	0.883	0.643	0.510

表 2 志达滨河小区 1~18[#] s 值 (cm)

Tab. 2 Values s of Zhida Binhe District 1~18[#] (cm)

p/kPa	试验点		
	1	2	3
45	0.039	0.080	0.075
90	0.110	0.136	0.196
135	0.169	0.207	0.253
180	0.202	0.265	0.332
225	0.241	0.312	0.408
270	0.304	0.390	0.477
315	0.352	0.431	0.527
360	0.394	0.539	0.590
405	0.453	0.659	0.684

表 3 4 号楼试验点地基土 s 值 (cm)

Tab. 3 Values s of 4[#] Building (cm)

p/kPa	s/cm	p/kPa	s/cm
25	0.195	125	1.864
50	0.418	150	2.633
75	0.745	175	3.544
100	1.286	200	4.639

表 4 阳光城市花园复合地基 s 值 (cm)
Tab. 4 Value s of Yangguang City Garden composite site (cm)

p /kPa	试验点					
	48°	680°	387°	315°	633°	16°
55	0.048	0.130	0.064	0.058	0.190	0.077
110	0.105	0.248	0.095	0.125	0.240	0.144
165	0.131	0.298	0.147	0.212	0.299	0.213
220	0.175	0.379	0.188	0.306	0.348	0.310
275	0.228	0.448	0.244	0.386	0.418	0.417
330	0.283	0.506	0.285	0.453	0.472	0.532
385	0.345	0.579	0.369	0.535	0.536	0.644
440	0.427	0.641	0.507	0.609	0.642	0.771

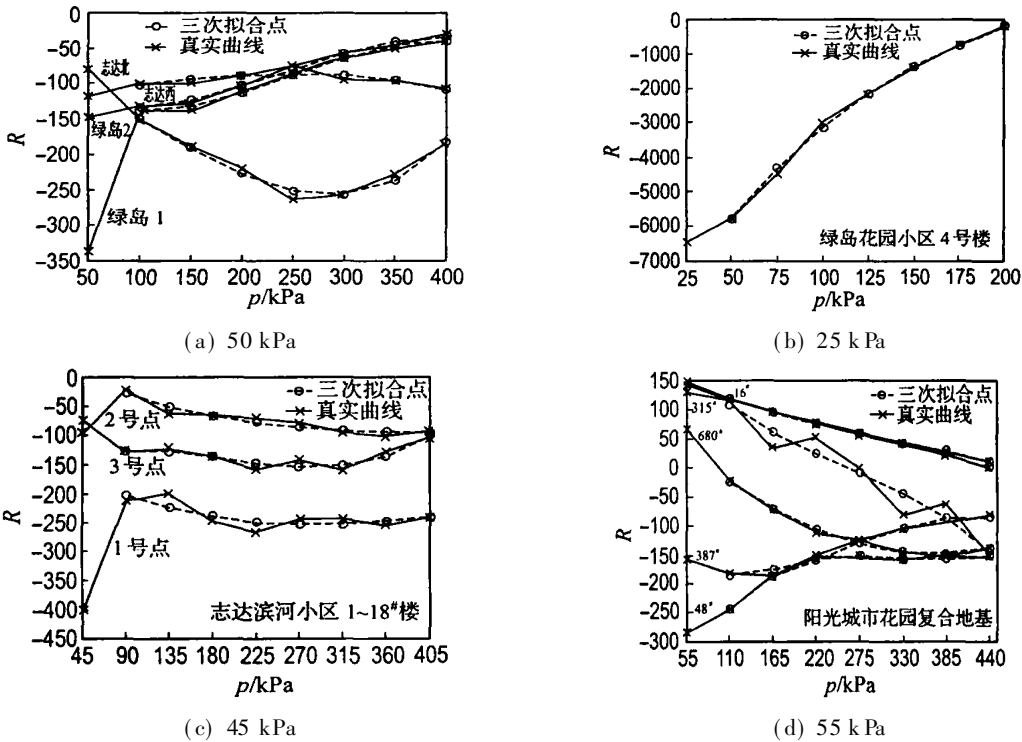


图 3 不同加荷等级的 p - R 关系曲线
Fig. 3 The curve of p - R for different loading-grade

表 5 f 值 (理论值为 0)
Tab. 5 Value f (theoretical value 0)

p /kPa	试验点			
	1	2	3	4
100	- 0.069 17	- 0.063 14	- 0.080 65	0.064 79
150	0.293 19	0.246 28	0.313 32	- 0.083 86
200	- 0.132 60	0.011 62	0.041 83	- 0.332 83
250	- 0.342 97	- 0.484 70	- 0.908 91	0.658 41
300	- 0.056 37	- 0.112 82	0.616 38	0.027 19
350	0.073 37	0.088 21	0.215 02	- 0.668 63
400	- 0.379 36	- 0.450 37	- 0.195 90	0.366 10

表 6 4 号楼试验点地基土 f 值 (理论值为 0)
Tab. 6 Value f of 4# Building (theoretical value 0)

p /kPa	f	p /kPa	f
50	- 0.039	150	0.107
75	0.022	175	0.132
100	- 0.361	200	0.131
125	0.549		

表 7 志达滨河小区 1~ 18[#] f 值 (理论值为 0)
Tab. 7 Value f of Zhida Binhe District 1 ~ 18
(theoretical value 0)

p /kPa	试验点		
	1	2	3
90	0.215 68	0.074 59	- 0.213 85
135	- 0.814 41	- 0.221 39	0.591 67
180	0.351 44	- 0.022 17	0.004 20
225	0.971 63	0.661 01	- 0.518 38
270	- 0.621 56	- 0.914 27	- 0.614 02
315	- 0.566 25	0.830 92	0.469 74
360	0.357 18	- 0.719 30	0.852 15
405	0.044 60	0.294 61	- 0.596 09

表 8 阳光城市花园复合地基 f 值 (理论值为 0)
Tab. 8 Value f of Yangguang Gty Garden composite site (theoretical value 0)

p /kPa	试验点					
	1	2	3	4	5	6
110	- 0.006 52	- 1.722 37	0.046 54	0.003 97	- 0.039 08	- 0.102 06
165	0.077 91	2.716 20	- 0.090 38	0.069 73	0.040 59	0.431 96
220	- 0.117 84	- 4.727 86	- 0.227 86	- 0.175 56	0.378 72	- 0.275 00
275	0.057 43	- 1.036 13	0.862 93	0.032 68	- 0.603 75	- 0.409 07
330	0.098 66	4.292 37	- 0.693 01	0.424 26	- 0.079 15	0.005 56
385	- 0.094 08	- 3.764 98	0.117 28	- 0.485 70	0.603 30	0.825 88
440	0.038 58	0.740 17	0.092 89	0.174 55	- 0.278 46	- 0.442 99

曲线具有单调性. 将曲线预测部分的 p 与 R 代入式 (14) 求地基沉降量 s , 其预测沉降 s 与实测沉降比较见表 9. 绿岛花园一期 1 号地基土 1 号、2 号试验点的 p - R 曲线具有单调性, 其预测与实测曲线完全吻合. 预测的沉降与实测沉降基本一致. 志达滨河小区 1~ 15[#] 楼地基西号试验点、绿岛

3 模型预测研究

在静力荷载试验中, 加载到大于 1/2 极限承载力或者大于 1/2 设计要求承载力的某个荷载值后, 将试验测得的 p - s 值代入式 (14), 求得土承载力因子 R 值, 将所加荷载 p 与土承载力因子 R 用一次线性拟合, 然后用外插法预测在增加荷载到 p 时, 承载力因子 R 所对应的值, 将 7 个试验点的 p - R 拟合及预测曲线绘图, 由于篇幅有限, 只将绿岛花园一期 1 号试验点 p - R 曲线表示出, 如图 4. 结合地质情况可发现, 复杂的地基土 p - R 曲线具有凸凹性, 地基土层变化不多或单一土层时, p - R

花园小区 4 号楼地基试验点的 p - R 预测曲线与实测曲线虽然不是完全吻合, 但预测曲线趋向相同, 预测沉降与实际沉降基本相同. 其他试验点的预测沉降 s 与实测沉降在不同加载时的准确程度不同, 但在验证承载力基本值时, 能够得到与实测相同的结果.

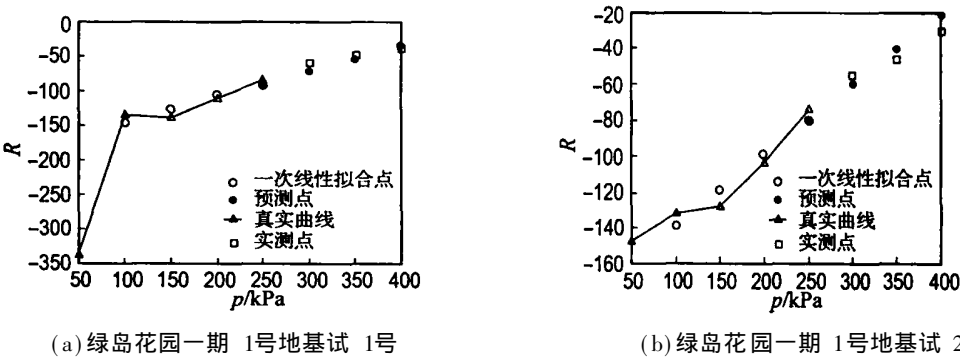


图 4 绿岛花园一期 1 号地基土试验所加荷载 p 与承载力因子 R 的预测曲线
Fig. 4 p - R predicted curve of 1[#] foundation of Li dao Garden

表 9 预测 s 值 (cm)
Tab. 9 Predicted value of s (cm)

试验点	$p = 300 \text{ kPa}$		$p = 350 \text{ kPa}$		$p = 400 \text{ kPa}$	
	预测	实测	预测	实测	预测	实测
绿岛花园试 1号	0.548	0.567	0.690	0.699	0.864	0.848
绿岛花园试 2号	0.572	0.581	0.729	0.711	0.927	0.883
志达滨河试西号	0.547	0.505	0.595	0.583	0.605	0.643
志达滨河试北号	0.301	0.327	0.327	0.405	0.350	0.510

试验点	$p = 315 \text{ kPa}$		$p = 360 \text{ kPa}$		$p = 405 \text{ kPa}$	
	预测	实测	预测	实测	预测	实测
志达滨河试 1号	0.332	0.352	0.368	0.394	0.403	0.453
志达滨河试 2号	0.437	0.431	0.490	0.539	0.541	0.659
志达滨河试 3号	0.522	0.527	0.572	0.590	0.618	0.684

4 结 论

通过对现有的试验数据在模型中拟合分析及对试验场地土的压力-变形预测,可见此模型比较适合土层单一或变化不多的地基土;另外,此模型以沉降量为 0.06倍的承压板直径作为土体破坏标准,这种假设比较符合软土或松土破坏确定标准,所以此模型能更好地反映破坏过程没有突变的土体.如果大量收集某一地区某一类地基土的静载试验数据,计算这类曲线在模型中的土的承载力因子 R 随荷载增加的变化规律,以寻求 R 与 p 的拟合曲线与模型真实求得的曲线一致.对地基土工程进行静荷载试验,检验承载力是否满足设计要求时,由于静载试验的时间长,加载困难,采用模拟模型可以预测 2倍设计要求承载力

的地基土变形,判断其是否满足设计要求.

参考文献:

[1] 高大钊. 岩土工程标准规范实施手册 [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997
[2] 张业民, 崔春义. 突变理论在土工中应用的哲学基础 [J]. 辽宁工学院学报, 2003, 23(1): 8-12
[3] 张业民, 栾茂田, 李顺群. 尖点突变模型描述土应力应变特性的可行性 [J]. 武汉理工大学学报, 2004, 8(26): 38-40
[4] 建筑地基基础设计规范, GB 50007- 2002[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002
[5] 何广讷. 土工的若干新理论研究与应用 [M]. 北京: 水利水电出版社, 1994 257-260
[6] 何广讷, 张业民. 土本构关系的尖点突变模式 [J]. 固体力学学报, 1991, 12(3): 199-207

Study of application and prediction of cusp-catastrophe model in plane-plate loading test

ZHANG Ye-min^{* 1,2}, HAO Dong xue^{1,2}, LUAN Mao tian^{1,2}

(1.State Key Lab. of Coastal and Offshore Eng., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China;
2.Inst. of Geotech. Eng., School of Civil and Hydraul. Eng., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China)

Abstract Based on the property of loading-settlement curve obtained from static loading test, the feasibility of cusp-catastrophe theory applied to the simulation of the curve for plane-plate loading test is qualitatively analyzed through coordinate transformation, a curve equation of plane-plate loading test, which is illustrated in the space of axes settlement, load and factor of bearing capacity for soils is established. According to the failure condition defined by soil deformations, the parameters of model are determined and the model is built up. By analysis of test data, it is indicated that the studied model is feasible. The cusp-catastrophe model is applied to the prediction of the relationship between loading and settlement of several plane-plate loading testing experiments. Through comparison and verification, it is displayed that the predicted results by cusp-catastrophe model are in accordance with the test results to a high degree.

Key words plane-plate loading test; cusp-catastrophe model; loading-settlement; ultimate bearing capacity