

四点时空偏心隐格式的改进求解

顾 峰 峰^{*}, 倪 汉 根

(大连理工大学 土木水利学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 在传统 Preissmann 格式离散求解一维浅水方程的基础上, 提出两个四点时空偏心隐格式改进算法. 一个是使用相邻计算单元在同一点上流量守恒的关系来建立追赶法矩阵求解; 二是在相邻单元的基础上再取一个和两单元都相交的控制体, 对其使用连续方程并进行有限体积离散的方法, 同样建立了追赶法矩阵求解. 求解过程中, 这两个方法都创新地把流量和水深进行了解耦, 构造成只有一个变量的追赶法矩阵. 通过理论解及传统解法验证了这两个新方法, 得到了较好的结果. 新方法继承了 Preissmann 格式的优点, 拓展了 Preissmann 格式的求解思路.

关键词: Preissmann 格式; 浅水方程; 改进算法
中图分类号: TV 133 **文献标识码:** A

0 引 言

1961 年 Preissmann 提出了时空平均的四点隐格式解法, 对非线性项进行了较合理的线性处理, 这给一维圣维南方程组的求解提供了一个简单的工具. 由于此格式常常会带来数值扰动, 计算中人们通常引入权重因子构成四点时空偏心隐格式, 虽然这实际上是引入人工阻尼来抑制数值计算中的不稳定, 但效果显著, 因而被普遍采用. 此方法离散求解简单, 计算速度快, 有较高精度且稳定性也较好, 所以迄今一直被广泛采用. 在四点时空偏心隐格式的一维非恒定浅水流控制方程的离散求解中, 常常引入一个辅助的线性关系, 来构造双扫描追赶法矩阵进行耦合求解. 本文提出两个改进的计算求解方法, 对流量和水深或其增量进行解耦, 构造出各自相对独立的追赶法矩阵来进行求解, 以在继承 Preissmann 格式的优点的基础上, 进一步发展 Preissmann 格式的求解方法.

1 控制方程和差分格式

一维非恒定流的控制方程为圣维南方程, 其分别表示沿水流方向的质量和动量的守恒:

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} = gAi - g \frac{Q^2 n_0^2 i^{4/3}}{A^{7/3}} + \left(\frac{Q}{A} \right)^2 \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_h \tag{2}$$

式中: B 为渠道顶水宽; h 为水深; Q 为流量; A 为断面面积; i 为坡降; n_0 为糙率系数; i 为湿周.

任意连续函数及其偏导的四点时空偏心隐格式^[1~4]可以表示如式 (3) (4), 示意如图 1

$$f(x, t) \approx \theta (hf_{i+1}^{n+1} + (1-h)f_i^{n+1}) + (1-\theta) (hf_{i+1}^n + (1-h)f_i^n) \tag{3}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &\approx \frac{1}{\Delta x} (\theta (f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}) + (1-\theta)(f_{i+1}^n - f_i^n)) \\ \frac{\partial f}{\partial t} &\approx \frac{1}{\Delta t} (h(f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n) + (1-h)(f_i^{n+1} - f_i^n)) \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

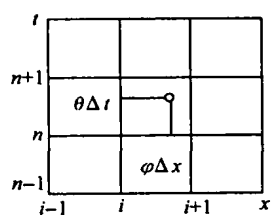


图 1 式 (3)、(4) 描述示意图

Fig. 1 Position calculated by Eq. (3) and Eq. (4)

收稿日期: 2005-11-20; 修回日期: 2007-03-19.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (重点项目 50139020).
作者简介: 顾峰峰^{*} (1978-), 男, 博士; 倪汉根 (1935-), 男, 教授.

当 $h = 0.5$ 时, $\theta = 0, 1, 0, 0.5$ 时, 分别对应显格式、隐格式、经典 Preissmann 格式. 在这里取 $h = 0.5$ 和不同的 θ 值对应于不同的变量, 不同的格式分别表述如式 (5):

$$\left. \begin{aligned} f(x, t) &\approx \frac{1}{2}(f_{i+1}^n + f_i^n) \\ \frac{\partial f}{\partial t} &\approx \frac{1}{2\Delta t}(f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n + f_i^{n+1} - f_i^n) \\ \frac{\partial h}{\partial x} &\approx \frac{1}{2\Delta x}(h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1} + h_{i+1}^n - h_i^n) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &\approx \frac{1}{\Delta x}(\theta(Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}) + (1 - \theta)(Q_{i+1}^n - Q_i^n)) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

2 控制方程离散求解的改进算法

2.1 各点流量平衡算法

如果写出 $f^{n+1} = f^n + \Delta f$, 依据上述方法及式 (5), 圣维南方程 (1)、(2) 可离散得到式 (6)^[1, 2]:

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_{i+1}^{n+1} + \Delta h_{i+1}^{n+1} k_1 &= \Delta Q_i^{n+1} - \Delta h_i^{n+1} k_2 + k_3 \\ \Delta Q_{i+1}^{n+1} + \Delta h_{i+1}^{n+1} k_4 &= \Delta Q_i^{n+1} (-k_5) + \Delta h_i^{n+1} k_7 + k_6 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

由式 (6) 可变形得到式 (7):

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_i^{n+1} &= \frac{k_1 - k_4}{k_5 + 1} \Delta h_{i+1}^{n+1} + \frac{k_7 + k_2}{k_5 + 1} \Delta h_i^{n+1} + \frac{k_6 - k_3}{k_5 + 1} \\ \Delta Q_{i+1}^{n+1} &= -\frac{k_4 + k_1 k_5}{k_5 + 1} \Delta h_{i+1}^{n+1} + \frac{k_7 - k_5 k_2}{k_5 + 1} \Delta h_i^{n+1} + \frac{k_3 k_5 + k_6}{k_5 + 1} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中系数描述如下:

$$\begin{aligned} k_1 &= k_2 = \frac{c}{\Delta t} (B_{i+1}^n + B_i^n); \quad c = \frac{\Delta x}{\Delta t}; \\ k_3 &= \frac{Q_i^n - Q_{i+1}^n}{\theta}; \\ k_4 &= \theta \left[\frac{g(A_i^n + A_{i+1}^n) + g(h_{i+1}^n - h_i^n) - 2 \left(\frac{Q}{A} \right)_{i+1}^n \cdot \left(\frac{Q}{A} \right)_{i+1}^n}{c \left[1 + 4 \left(\frac{Q}{A} \right)_{i+1}^n \right]} \right]; \\ k_5 &= \frac{1 - 4 \left(\frac{Q}{A} \right)_i^n}{1 + 4 \left(\frac{Q}{A} \right)_{i+1}^n}; \\ k_6 &= [2Q_i^n \cdot Q_i^n / A_i^n - 2Q_{i+1}^n \cdot Q_{i+1}^n / A_{i+1}^n - g(A_i^n + A_{i+1}^n)(h_{i+1}^n - h_i^n)] \cdot \left[\frac{1}{c \left[1 + 4 \left(\frac{Q}{A} \right)_{i+1}^n \right]} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. \left(N_i + N_{i+1} \right) \right] \left[\frac{1}{c \left[1 + 4 \left(\frac{Q}{A} \right)_{i+1}^n \right]} \right]; \\ k_7 &= -\theta \left[2 \left(\frac{Q}{A} \right)_i^n \cdot \left(\frac{Q}{A} \right)_i^n \cdot B_i^n - g(A_i^n + A_{i+1}^n) + \right. \\ &\quad \left. g(h_{i+1}^n - h_i^n) \cdot B_i^n \right] \cdot \left[\frac{1}{c \left[1 + 4 \left(\frac{Q}{A} \right)_{i+1}^n \right]} \right]; \\ N_i &= g\Delta t \cdot A_i^n \cdot i - g\Delta t Q_i^n | Q_i^n | n_i n_i^{4/3} / (A_i)^{7/3}; \\ N_{i+1} &= g\Delta t \cdot A_{i+1}^n \cdot i - \\ &\quad g\Delta t Q_{i+1}^n | Q_{i+1}^n | n_{i+1} n_{i+1}^{4/3} / (A_{i+1})^{7/3} \end{aligned}$$

把式 (7) 写成式 (8), 即计算节点扩展到 $i - 1, i, i + 1$ 三个点上, 其中 $A_{i,j}$ 由式 (7) 获得.

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_{i-1}^{n+1} &= A_{1,i-1} \Delta h_{i-1}^{n+1} + A_{2,i-1} \Delta h_i^{n+1} + A_{3,i-1} \\ \Delta Q_i^{n+1} &= B_{1,i-1} \Delta h_{i-1}^{n+1} + B_{2,i-1} \Delta h_i^{n+1} + B_{3,i-1} \\ \Delta Q_i^{n+1} &= A_{1,i} \Delta h_{i+1}^{n+1} + A_{2,i} \Delta h_i^{n+1} + A_{3,i} \\ \Delta Q_{i+1}^{n+1} &= B_{1,i} \Delta h_{i+1}^{n+1} + B_{2,i} \Delta h_i^{n+1} + B_{3,i} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

因为各点上的流量增量平衡, 所以 i 点的流量无论是用 $(i - 1)$ 还是 $i - (i + 1)$ 的水深变化值来线性表示都是相等的, 因而在任意 i 点可给出关系式:

$$\begin{aligned} A_{1,i} \Delta h_{i+1}^{n+1} + (A_{2,i} - B_{1,i-1}) \Delta h_i^{n+1} - B_{2,i-1} \Delta h_{i-1}^{n+1} &= \\ B_{3,i-1} - A_{3,i} \end{aligned} \quad (9)$$

由式 (9) 构造追赶法系数矩阵, 假设已知上游流量下游水深, 得到方程组 (10):

$$\begin{pmatrix} A_{2,1} & A_{1,1} & & & \\ & \vdots & & & \\ & A_{1,i} & A_{2,i} - B_{1,i-1} & B_{2,i-1} & \\ & & \vdots & \vdots & \\ & & 0 & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta h_1^{n+1} \\ \vdots \\ \Delta h_i^{n+1} \\ \vdots \\ \Delta h_m^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{3,1} \\ \vdots \\ B_{3,i-1} - A_{3,i} \\ \vdots \\ h_m^{n+1} \end{pmatrix} \quad (10)$$

求解方程 (10) 得到各点水深 Δh , 再由式 (8) 得到各点流量增量, 最后求得各点水深和流量.

2.2 使用连续方程的求解法

式 (6) 可改写成式 (11) 的情况, 把增量形式改为 $n + 1$ 时刻的流量和水深关系:

$$\left. \begin{aligned} Q_{i+1}^{n+1} + h_{i+1}^{n+1} k'_1 &= Q_i^{n+1} - h_i^{n+1} k'_2 + k'_3 \\ Q_{i+1}^{n+1} + h_{i+1}^{n+1} k'_4 &= Q_i^{n+1} (-k'_5) + h_i^{n+1} k'_7 + k'_6 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

这里的系数在前面的基础上容易得到,不再赘述, 同样有

$$\left. \begin{aligned} Q^{n+1}_+ &= \frac{k'_1 - k'_4}{k'_5 + 1} h^{n+1}_{i+1} + \frac{k'_7 + k'_2}{k'_5 + 1} h^{n+1}_i + \frac{k'_6 - k'_3}{k'_5 + 1} h^{n+1}_{i-1} \\ Q^{n+1}_- &= -\frac{k'_4 + k'_1 k'_5}{k'_5 + 1} h^{n+1}_{i+1} + \frac{k'_7 - k'_5 k'_2}{k'_5 + 1} h^{n+1}_i + \frac{k'_3 k'_5 + k'_6}{k'_5 + 1} h^{n+1}_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

这样实际上通过四点时空偏心隐格式离散一维圣维南方程得到了 $n + 1$ 层上水深与流量的关系, 而这个关系很容易让人联想到连续方程的隐式离散形式; 因此重新引入连续方程 (1), 并对其进行有限体积离散来辅助求解式 (12), 式 (1) 取图 2 中阴影部分为计算单元, M 点为计算中心, 空间为 i 层, 时间为 $n + \theta \Delta t$ 层. 其中 P, E 点流量分别为

$$\left\{ \begin{aligned} Q_P &= \theta \frac{Q^{n+1}_{i+1} + Q^{n+1}_i}{2} + (1 - \theta) \frac{Q^n_{i+1} + Q^n_i}{2} \\ Q_E &= \theta \frac{Q^{n+1}_i + Q^{n+1}_{i-1}}{2} + (1 - \theta) \frac{Q^n_i + Q^n_{i-1}}{2} \end{aligned} \right. \quad (13)$$

$$\left[\begin{array}{cccc} A_{2,1} & A_{1,1} & & \\ & \vdots & & \\ & \frac{B^n_i \cdot c}{2} - \theta \cdot A_{2,i-1} & c B^n_i + \theta (B_{2,i} - A_{1,i-1}) & \frac{B^n_i \cdot c}{2} + \theta \cdot B_{1,i} \\ & & \vdots & \vdots \\ & & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} h^{n+1}_1 \\ \vdots \\ h^{n+1}_i \\ \vdots \\ h^{n+1}_m \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} Q^{n+1}_+ - A_{3,1} \\ \vdots \\ \theta (A_{3,i-1} - B_{3,i}) + \frac{B^n_i \cdot c \cdot (h^{n+1}_{i+1} + 2h^n_i + h^{n+1}_{i-1})}{2} - (1 - \theta) (Q^{n+1}_+ - Q^{n+1}_{i-1}) \\ \vdots \\ h^{n+1}_m \end{array} \right] \quad (15)$$

求解式 (15)、(12), 各点流量、水深可得. 式 (15) 中 $A_{i,j}, B_{i,j}$ 的计算参照式 (8), 通过式 (12) 求解.

2.3 溃坝波的数值算例

对两个改进解法做溃坝波数值算例如图 3, 并为了和传统的追赶法求解结果^[1 2] 进行比较, 把它们放到了一起. 由于 3 种算法的结果非常接近, 把溃坝中心分别放在了相邻的几个位置上进

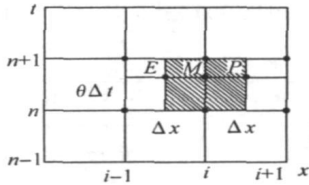


图 2 有限体积单元示意图
Fig. 2 Control volume unit for discretizing

式 (1) 中 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q_P - Q_E}{\Delta x}$ 由式 (12)、(13) 代入, 同理参考式 (4) 可得

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h^{i+1}_{i+1} + 2h^{i+1}_i + h^{i+1}_{i-1} - h^{i+1}_{i-1} - 2h^i_i - h^i_{i-1}}{2} \quad (14)$$

借助式 (13)、(14) 把图 2 阴影计算单元的连续方程条件引入进来, 最后和 2.1 节一样构造追赶法系数矩阵, 同样假设边界条件为已知上游流量和下游水位, 加入两个边界方程后得到式 (15):

行比较. 图 3(a) 为初始时刻上游水深 $h_0 = 5$ m 下游水深 $h_1 = 1$ m, 渠道长 20 m, 溃坝中心对应传统解法、流量平衡算法以及两次连续方程法, 分别在 9、10 和 11 m 处; 图 3(b) 为初始时刻上游水深 $h_0 = 10$ m 下游水深 $h_1 = 4$ m, 渠道长 800 m, 溃坝中心相应地在 350、400 和 450 m 处; 两算例都是在无糙、平底的情况下进行的计算, 各种解法

和理论值的比较列于表 1. 从图 3 和表 1 可以看出, 由于采用相同的格式, 本文所建议的改进解法

和传统解法的结果的差别很小; 和理论值相比较, 符合较好, 验证了本文所述改进解法的正确性.

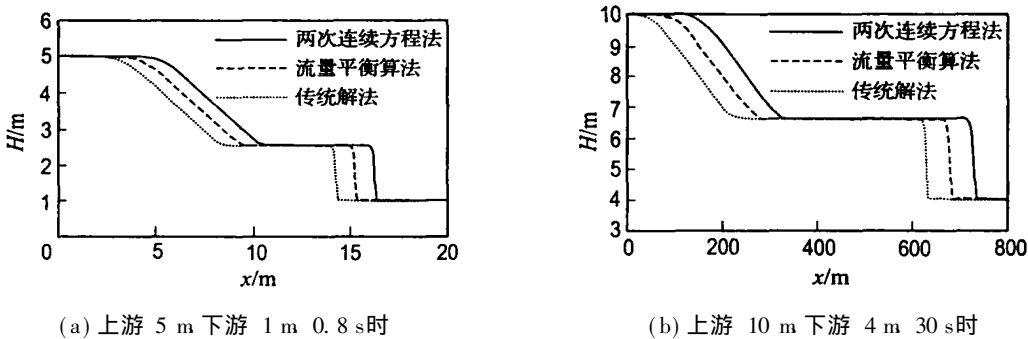


图 3 水面曲线
Fig. 3 Water surface profile

表 1 各种解法和理论值的比较

Tab. 1 Results of various calculations for comparison with theoretical solution

解法	H / m	误差 $/\text{m}$	H / m	误差 $/\text{m}$
	$(h_0 = 5 \text{ m}, h_1 = 1 \text{ m})$		$(h_0 = 10 \text{ m}, h_1 = 4 \text{ m})$	
理论解	2.54	0	6.627	0
传统解法	2.538	0.002	6.626	0.001
解法一	2.538	0.002	6.626	0.001
解法二	2.538	0.002	6.626	0.001

2.4 洪水历时曲线算例

计算在长 10 km 宽 100 m 的矩形明渠进行, 中间 4 km 以后有长 1 000 1 500 2 000 2 500 m 的芦苇段, 糙率系数参考文献 [5] 中芦苇情况下的糙率取值, 以模拟湿地洪水流经芦苇时的洪峰及流量历时曲线情况. 上游流量历时曲线如图 4 中梯形曲线, 其余 4 条分别为不同芦苇长度情况下的下游洪水历时曲线.

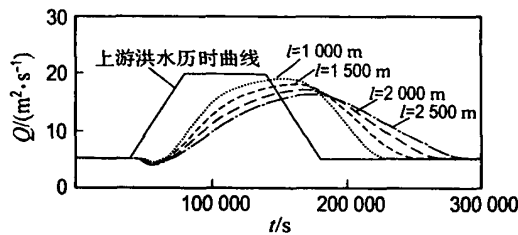


图 4 湿地洪水历时曲线
Fig. 4 Profile of flow depth and time for wet land

3 稳定性条件

取不同的 θ 和不同的时间步长 Δt 计算上面两个工况, 解法一、二所得水深相差几乎都小于 10^{-3} , 可知上述两算法基本特性和传统解法求解基本相似且又采用相同的格式, 所以稳定性分析可参考文献 [4 5] 中对四点偏心时空格式的分析, 要求满足关系式 (16):

$$\frac{h}{\lambda V^2} + \left[\theta - \frac{1}{2} \right] \geq 0 \tag{16}$$

θ 分别为空间、时间方向权重, λ 为特征向量, $\lambda_{1,2} = \frac{Q}{A} \pm g \frac{A}{B}$, 系数含义如式 (1) (2), $V = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, 这里 $h = \frac{1}{2}$ 时, 稳定性条件为 $\theta \geq \frac{1}{2}$; 但实践表明, 计算中容易出现数值扰动现象, 为了使计算结果令人满意, 实际取值需要考虑时间、空间等具体因素.

4 结 论

- (1) 本文介绍了两种新的对传统 Preissmann 格式进行求解的解法,理论分析和计算结果比较可知这两个算法物理意义更明确,并且保持了原来传统算法计算快、精度高和稳定性较好的特性.
- (2) 本文的算法和传统的双扫描法最大的不同是改进的算法求解时解耦了两个变量,分别对单独的变量进行追赶法求解.
- (3) 2.2节解法二提供了不同的解题思路,利用相互重叠的计算单元,并分别在不同的计算单元用不同的格式合并求解.
- (4) 由于计算模板的扩展,原来的四点格式

扩展到了 6个节点上.

参考文献:

[1] 汪德焕. 计算水力学理论与应用 [M]. 南京: 河海大学出版社, 1996

[2] 麦赫默德 K,叶夫耶维奇 V. 明渠 不恒定流: 第一卷 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1987

[3] LYN D A, GOODWIN P. Stability of a general Preissmann scheme [J]. *J Hydraul Eng*, 1987, 113(1): 16-28

[5] 倪汉根, 顾峰峰. 湿地非淹没芦苇水流阻力的试验研究 [J]. 水动力学研究与进展, 2005, 20(2): 167-173

[4] 杨国录. 四点时空偏心 Preissmann 格式的应用问题 [J]. 泥沙研究, 1991, 12(4): 88-98

Two improved calculation methods of Preissmann four-point linear implicit scheme

GU Feng feng^{*}, NI Han-gen

(School of Civil and Hydraul. Eng., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China)

Abstract Based on the Preissmann four-point linear implicit finite-difference scheme, two new improved calculation methods are analyzed to resolve the one-dimension shallow-water equations. Firstly, based on the conservation of flux at the point between two adjacent control volumes, the governing equations discretized by Preissmann scheme are reconstructed by a new way. Secondly, the continuum equation is discretized by a classical finite difference method in a new control volume which includes a part of two adjacent control volumes. Based on the relationship built in the new control volume, the governing equations discretized by Preissmann scheme are reconstructed too. The two improved calculation methods both can make the flux and flow depth or their varieties of amount be calculated respectively. Moreover, these equations reconstructed by these two improved methods, whose coefficients are tridiagonal matrixes, all can be resolved by the method of forward elimination and backward substitution. These new methods are well confirmed by theoretical and classical results.

Key words Preissmann scheme; shallow-water equations; improved calculation methods