第47卷第3期 大连理工大学学报 Vol. 47, No. 3
2007年 5月 Journal of Dalian University of Technology May 2007

文章编号: 1000-8608(2007)03-0448-06

n人动态联盟博弈的值

孙 康* [1,2], 苏 艺 [3]

(1.东北财经大学 产业组织与企业组织研究中心, 辽宁 大连 116025;
2.辽宁师范大学 管理学院, 辽宁 大连 116029;
3.辽宁师范大学 计算机与信息技术学院, 辽宁 大连 116029)

摘要: 在具有可转让效用的 n人合作博弈理论中建立了一个动态联盟博弈模型. 首先用 Markov随机过程来描述联盟结构是如何随着时间的变化而变化的,定义了状态概率等概念. 然后将局中人在不同时期的策略选择归结为在时间序列集 $\mathscr{S} = \{0,1,\cdots,f\}$上的有序选择. 给出局中人在时间序列集 $\mathscr{S}$中每一点的 SK值(支付). 提出了动态联盟博弈的 SK公理,证明了每个博弈具有 SK公理意义下的惟一解. 该模型是对动态联盟博弈研究方法的一次新的探索,拓展了联盟博弈理论.

关键词: 动态联盟博弈; 状态概率; Shapley值
中图分类号: O225 文献标识码: A

0 引 言

最近的文献从方法论的角度将 n人合作博弈理论分为三个重要方向: 一从特征函数的定义,引出战略博弈方向;二从核心和讨价还价集的定义,引出连续解的方向;三从局中人是否有远见的角度,引出动态合作博弈方向[1]. 理论界对非合作博弈研究比较充分. 对动态合作博弈的研究,一直以来是一个重点和难点问题. 核心是合作博弈中出现最早的解概念,它在博弈论中占有非常重要的地位. 稳定集的概念是为了解决核心的非空性而提出的,曾有大量的文献讨论稳定集的非空性判定问题[2], 1968年 Lucas[3]给出了没有稳定集的具有 10个局中人的博弈,从而否定了稳定集的非空性. Shapley值[4]的出现从根本上解决了解的非空性问题,但没有解决解的动态性问题. 最近对动态联盟的研究[1,5-8]主要是用随机过程来定义联盟结构的变化;用 Markov链定义联盟结构之间的转移概率,没有针对解的动态性加以深入研究. 动态联盟是指联盟结构随时间不断演化的过程. 本文将时间作为离散变量引入到联盟博弈中,研究联盟在不同时间点上的解概念,并且采用标准的(公理的)方式描述该解的非空性和惟一性问题.

1 动态联盟博弈模型的建立

在具有可转让效用(transferable utility)的 n人合作博弈理论中,设 n个局中人的集合用 N表示, N的任意一个子集 S称为一个联盟. 局中人之间的合作可能性用一个特征函数 $v(S)$来表示,特征函数 $v(S)$表示 S中的成员无需求助于 S之外的局中人所能得到的可转让效用的总和. 特征函数代表了局中人之间的合作可能性,于是一个特征函数可以代表一个联盟博弈. 为了研究联盟博弈的动态性问题,本文首先需要定义状态集的概念.

定义 1 设 $X = \{S^{(0)}, S^{(1)}, \cdots, S^{(f)}\}$是联盟结构与时间序列集 $\mathscr{S} = \{0, 1, \cdots, f\}$相对应的状态集. 每一个时间点表示一个联盟结构的持续时

收稿日期: 2006-01-13; 修回日期: 2007-03-16.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70603004).
作者简介: 孙 康* (1963-), 女, 大连理工大学 2005届博士.

间间隔,在此时间间隔内,该联盟结构保持了 (至少) 一个协议 (局中人之间达成的具有约束力的合作协议). 在每个新的时间间隔的开始,标志着一个新协议的产生,该时间间隔持续到下一个新协议 (不总是达到一个均衡状态) 的产生为止 .

本文可以将联盟结构看成是一个系统,在每一次系统变化过程中,局中人 i的策略选择,主要考虑目前的支付及采用新的策略之后的支付 . 设联盟结构在 t点的状态向量 $\boldsymbol{S}^{(t)} = (S_1^{(t)}\quad S_2^{(t)}\quad \cdots\quad S_{(2^n-1)}^{(t)})$包含 $2^n - 1$个分量, $t\in\mathscr{S}$. 这是因为 n个局中人最多能形成 $2^n - 1$个联盟,其中每一个分量代表 t点的联盟结构可能包含此联盟的概率. 经过一次转移后,联盟结构在 $t+1$点所处系统状态向量为 $\boldsymbol{S}^{(t+1)}$. 若存在矩阵 $\boldsymbol{P}^{(t)}$,其中 P_{ij}是 t时刻的向量 $\boldsymbol{S}^{(t)}$的分量 $S_i^{(t)}$转移到 $t+1$时刻的向量 $\boldsymbol{S}^{(t+1)}$的分量 $S_j^{(t+1)}$的概率,且$\sum_{j=1}^{2^n-1} P_{ij} = 1$,使得 $\boldsymbol{S}^{(t+1)} = \boldsymbol{S}^{(t)}\boldsymbol{P}^{(t)}$,则称矩阵 $\boldsymbol{P}^{(t)}$为联盟结构从点 t转移到点 $t+1$的转移矩阵.

由于在 t点的系统状态概率 $\boldsymbol{S}^{(t)}$中的每个分量,正好代表在 t时刻系统中出现该联盟的可能性大小,本文可以利用其求出在 t时刻每个局中人的预期支付 . 这也是本文基于 Markov随机过程来研究 n人动态联盟的主要目的. 为了便于求出在 t时刻每个局中人的预期支付,本文给出如下定义.

定义 2　在 t点局中人集 N的子集 S_j的状态概率定义为动态联盟博弈 v在 t时刻所处系统状态向量 $\boldsymbol{S}^{(t)}$的分量 $S_j^{(t)}$ $(j = 1, 2,\cdots, 2^n - 1)$,记为 P_{S_j}. 于是有 $(P_{S_1}\quad P_{S_2}\quad \cdots\quad P_{S_{(2^n-1)}}) = (S_1^{(t)}\quad S_2^{(t)}\quad \cdots\quad S_{(2^n-1)}^{(t)})$,并且$\sum_{j=1}^{2^n-1} P_{S_j} = 1$.

有了动态联盟博弈局中人集 N的子集 S_j在 t时刻所处状态概率定义,还需要讨论联盟结构的性质 . 联盟结构的变化具有① 无后效性: 局中人在 t时刻进行策略选择时,只考虑其在 $t-1$时刻所得到的支付情况;② 稳定性: 当博弈结构不发生变化时 (本文是在同一个联盟结构下来讨论动态联盟博弈的),局中人一旦获得 Pareto最优支付时,便不再改变策略. 当所有局中人都获得 Pareto最优支付时,联盟结构便达到稳定状态 . 因此动态联盟即联盟结构的变化是一个渐进的过程,符合 Markov链预测模型的条件,可以利用 Markov链预测模型求解局中人在时间序列集 $\mathscr{S}$中每一点的预期支付值 .

2　动态联盟博弈的值

本文用一个值函数来表示动态联盟博弈的解概念. 这里所谓的值 (a payoff function) 概念是指在博弈过程中赋予每个局中人支付的支付函数. 例如在静态博弈中,有著名的 Shapley 值及 Bazhaf-Coleman值等. 在动态联盟博弈中,基于 Markov随机过程理论,本文提出了动态联盟博弈的值概念.

定义 3　设 n维向量 $\xi(v) = (\varphi_1(v)\quad \varphi_2(v)\quad \cdots\quad \varphi_n(v))$, $\varphi_i(v)$满足

$$\varphi_i(v) = \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} P_{T_i}(v(T) - v(T - \{i\})),$$

$$i = 1, 2,\cdots, n \tag{1}$$

P_{T_i}是 N的子集 T在 t时刻的状态概率,则称 $\xi(v)$为基于 Markov随机过程的动态联盟博弈的 SK值.

从式 (1) 可以看出, SK值是基于局中人加入某联盟边际贡献和形成该联盟的可能性大小得出的. $(v(T) - v(T - \{i\}))$表示局中人 i在 t时刻加入联盟 T的边际贡献;状态概率 P_{T_i}表示在 t时刻形成联盟 T的可能性的大小 . 根据式 (1) 可以求出局中人 i在动态联盟时间序列集 $\mathscr{S}$中每一点 t的预期支付,这是 SK值区别于 Shapley值的意义所在.

按照合作博弈的分析思路,提出一种新的解概念之后,需要对其性质进行理论分析: SK值应该满足一组“公正”的规则—— 公理体系,这组规则无论从局中人的角度还是从博弈理论的角度来看,都应该是合理的. 如果局中人都按照这组规则进行博弈,就能保证解的合理性.

在描述 SK值的公理体系之前,首先需要给出如下的引理和定理:

引理 1　对任何联盟 S,若博弈 w_S是由式

$$w_S(T) = \begin{cases} 0; & S\not\subset T \\ 1; & S\subset T \end{cases}$$

定义的截口博弈,则有如下结论:

$$\varphi_i(w_S)=\begin{cases}\dfrac{1}{|S|}; i\in S\\ 0; i\notin S\end{cases}$$

其中$|S|$表示联盟S中所含局中人的个数.

推论 1 如果$c>0$,那么

$$\varphi_i(cw_S)=\begin{cases}\dfrac{c}{|S|}; i\in S\\ 0; i\notin S\end{cases}$$

定理 1 对任何n人博弈v,存在2^n-1个实数$c_S, S\subset N$,使$v=\sum_{S\subset N}c_S w_S$,其中$w_S$的定义同引理 1.

上述引理和定理最早由 Shapley 为了证明 Shapley 值的非空性而提出并加以证明(见文献[4]),后来被广泛引用.

3 动态联盟博弈的公理

为了证明 SK值的非空性,本文可以用一组动态联盟博弈的公理来描述值函数$\varphi(v)$应具有的性质.

公理 S1(有效性) 如果S是博弈v的任意一个载体,那么$\sum_{i\in S}\varphi_i(v)=v(S)$.

公理 S2(动态性) $\sum_{i\in T\subset S\subset N}[(-1)^{|S|-|T|}\times\varphi_i(w_S)]=P_{S_i}$,其中$\varphi_i(w_S)=0$,当$i\notin S$时.

公理 S3(可加性) 如果u和v为任意两个博弈,那么$\varphi_i(u+v)=\varphi_i(u)+\varphi_i(v)$.

上述这三条公理实际上是一组社会选择公理,它们不仅具有严格的数学定义,而且具有直观的经济和物理意义.有效性规定联盟S所带来的效用只能在其内部进行分配,而对联盟S没有贡献的局中人不予分配;动态性规定局中人集N的子集S_i在τ时刻所处状态概率P_{S_i}是由所有局中人$(i=1,2,\cdots,n)$从$\tau-1$时刻的角度来预测,在τ时刻能够形成S_i子集的可能性决定的;可加性由于涉及两个博弈之和的内容比较复杂,难以理解,简单讲即局中人i参加两个博弈u和v之和所得到的支付等于分别参加u和v所得到的支付之和.

下面给出的定理可以看成是证明值函数$\varphi(v)$惟一性的引理.

定理 2 对任意的$i\in T\subset N$,有

$$\sum_{i\in T\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|T|}x_{i,S}=P_{S_i}, i\notin S \qquad (2)$$

式(2)是个以$x_{i,S}$为未知量的$\sum_{s=t}^{n}\begin{pmatrix}n-t\\ s-t\end{pmatrix}=2^{n-t}$($t=|T|, s=|S|$)元线性方程.此方程构成的方程组有惟一解.其中未知量$x_{i,S}$的下标是由局中人i和包含局中人i的联盟T所决定的.若$i\neq j$或$T\neq T'$只要有一种情况成立,本文便认为$x_{i,T}$与$x_{j,T'}$是不同的未知量.当且仅当$i=j$与$T=T'$同时成立,$x_{i,T}$与$x_{j,T'}$是相同的未知量.给定一个局中人i和一个包含局中人i的联盟T,便得到一个形如式(2)的方程.当i取遍所有局中人集合的元素,T取遍所有包含i的联盟的时候,便得到一个2^n-1元的线性方程组,此方程组所含方程的个数为2^n-1.

证明 首先将方程组中的方程按照一定的顺序进行排列.

一个确定的i和T便决定了一个方程,因此,将序列对集合$A=\{(i,T)|i\in T\subset N\}$中的元素按照一个规则,排出了一个先后顺序,也就相当于把方程组中的方程排出一个先后顺序.下面给出A中元素的一个排序方法.

对于$(i,T),(j,T')\in A$且$(i,T)\neq(j,T')$,(i,T)与(j,T')的前后关系由下列规则确定:

(1)若$|T|>|T'|$,则(i,T)排在(j,T')前面;反之,则(i,T)排在(j,T')的后面.

(2)若$|T|=|T'|$,则i与j中较小者所在的序对排在前面,即若$i<j$,则(i,T)排在(j,T')之前;反之,(i,T)排在(j,T')之后.

(3)若$i=j$且$|T|=|T'|$,则将$N-T$及$N-T'$中的元素分别由小到大排列起来,记为

$N-T=\{i_1,i_2,\cdots,i_{n-t}\}$, $i_1<i_2<\cdots<i_{n-t}$

$N-T'=\{j_1,j_2,\cdots,j_{n-t'}\}$, $j_1<j_2<\cdots<j_{n-t'}$

这里$t=|T|$,$t'=|T'|$.因为$|T|=|T'|$,所以$t=t'$,因此$n-t=n-t'$.此时,按以下规则排定(i,T)与(j,T')的前后顺序.

若$i_1<j_1$,则(j,T')排在(i,T)的后面,否则(i,T)排在(j,T')的后面;若$i_1=j_1$,则比较i_2与j_2的大小,若$i_2<j_2$,则(i,T)排在(j,T')的前面,否则,(j,T')排在(i,T)的前面;若$i_2=j_2$,则比较i_3与j_3的大小,依此类推,总可以确定出(i,T)

与 (j, T') 的前后顺序.

于是按上述规则可以将 A中的元素排出一个先后顺序. 令序对 (i, T) 对应方程

$$\sum_{i\in T\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|T|}x_{i,S}=P_{S_i}$$

便可以将方程组中的方程与 A中的元素建立一一对应关系,故也可以按以上规则将方程组中的方程排出一个先后顺序,具体定出如下:

$$\sum_{1\in N\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N|}x_{1,S}=P_{N_1}\qquad(1,N)$$

$$\sum_{2\in N\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N|}x_{2,S}=P_{N_2}\qquad(2,N)$$

…

$$\sum_{n\in N\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N|}x_{n,S}=P_{N_n}\qquad(n,N)$$

$$\sum_{1\in N-\{2\}\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N-\{2\}|}x_{1,S}=P_{(N-\{2\})_1}\qquad(1,N-\{2\})$$

$$\sum_{1\in N-\{3\}\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N-\{3\}|}x_{1,S}=P_{(N-\{3\})_1}\qquad(1,N-\{3\})$$

…

$$\sum_{1\in N-\{n\}\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N-\{n\}|}x_{1,S}=P_{(N-\{n\})_1}\qquad(1,N-\{n\})$$

$$\sum_{2\in N-\{1\}\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N-\{1\}|}x_{1,S}=P_{(N-\{1\})_2}\qquad(2,N-\{1\})$$

$$\sum_{2\in N-\{3\}\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N-\{3\}|}x_{2,S}=P_{(N-\{3\})_2}\qquad(2,N-\{3\})$$

…

$$\sum_{2\in N-\{n\}\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N-\{n\}|}x_{2,S}=P_{(N-\{n\})_2}\qquad(2,N-\{n\})$$

…

$$\sum_{n\in N-\{1\}\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N-\{1\}|}x_{n,S}=P_{(N-\{1\})_n},\qquad(n,N-\{1\})$$

$$\sum_{n\in N-\{2\}\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N-\{2\}|}x_{n,S}=P_{(N-\{2\})_n},\qquad(n,N-\{2\})$$

…

$$\sum_{n\in N-\{n-1\}\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N-\{n-1\}|}x_{n,S}=P_{(N-\{n-1\})_n},\qquad(n,N-\{n-1\})$$

$$\sum_{1\in N-\{2,3\}\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N-\{2,3\}|}x_{1,S}=P_{(N-\{2,3\})_1},\qquad(1,N-\{2,3\})$$

$$\sum_{1\in N-\{2,4\}\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N-\{2,4\}|}x_{1,S}=P_{(N-\{2,4\})_1},\qquad(1,N-\{2,4\})$$

…

$$\sum_{1\in N-\{2,n\}\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N-\{2,n\}|}x_{1,S}=P_{(N-\{2,n\})_1},\qquad(1,N-\{2,n\})$$

$$\sum_{1\in N-\{3,4\}\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N-\{3,4\}|}x_{1,S}=P_{(N-\{3,4\})_1},\qquad(1,N-\{3,4\})$$

…

$$\sum_{1\in N-\{3,n\}\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N-\{3,n\}|}x_{1,S}=P_{(N-\{3,n\})_1},\qquad(1,N-\{3,n\})$$

$$\sum_{1\in N-\{4,5\}\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N-\{4,5\}|}x_{1,S}=P_{(N-\{4,5\})_1},\qquad(1,N-\{4,5\})$$

…

$$\sum_{n\in N-\{n-1\}\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|N-\{n-1\}|}x_{n,S}=P_{(N-\{n-1\})_n},\qquad(n,N-\{n-1\})$$

(3)

经过计算,将以上的方程组中每一个方程进行整理,又可以得到与其等价的方程组如下:

$$x_{1,N}=P_{N_1}\qquad(1,N)$$

$$x_{2,N}=P_{N_2}\qquad(2,N)$$

…

$$x_{n,N}=P_{N_n}\qquad(n,N)$$

$$-x_{1,N}+x_{1,N-\{2\}}=P_{(N-\{2\})_1}\qquad(1,N-\{2\})$$

$$-x_{1,N}+x_{1,N-\{3\}}=P_{(N-\{3\})_1}\qquad(1,N-\{3\})$$

…

$$-x_{1,N}+x_{1,N-\{n\}}=P_{(N-\{n\})_1}\qquad(1,N-\{n\})$$

$$-x_{2,N}+x_{2,N-\{1\}}=P_{(N-\{1\})_2}\qquad(2,N-\{1\})$$

$$-x_{2,N}+x_{2,N-\{3\}}=P_{(N-\{3\})_2}\qquad(2,N-\{3\})$$

…

$$-x_{2,N}+x_{2,N-\{n\}}=P_{(N-\{n\})_2}\qquad(2,N-\{n\})$$

…

$$-x_{n,N}+x_{n,N-\{1\}}=P_{(N-\{1\})_n}\qquad(n,N-\{1\})$$

$$-x_{n,N}+x_{n,N-\{2\}}=P_{(N-\{2\})_n}\qquad(n,N-\{2\})$$

…

$$-x_{n,N}+x_{n,N-\{n-1\}}=P_{(N-\{n-1\})_n}\qquad (n,N-\{n-1\})$$

$$\sum_{\substack{1\in N-\{2,3\}\subset S\subset N\\ S\neq N-\{2,3\}}}(-1)^{|S|-n+2}x_{1,S}+x_{1,N-\{2,3\}}=P_{(N-\{2,3\})_1}\qquad (1,N-\{2,3\})$$

$$\sum_{\substack{1\in N-\{2,4\}\subset S\subset N\\ S\neq N-\{2,4\}}}(-1)^{|S|-n+2}x_{1,S}+x_{1,N-\{2,4\}}=P_{(N-\{2,4\})_1}\qquad (1,N-\{2,4\})$$

$$\cdots$$

$$\sum_{\substack{1\in N-\{2,n\}\subset S\subset N\\ S\neq N-\{2,n\}}}(-1)^{|S|-n+2}x_{1,S}+x_{1,N-\{2,n\}}=P_{(N-\{2,n\})_1}\qquad (1,N-\{2,n\})$$

$$\sum_{\substack{1\in N-\{3,4\}\subset S\subset N\\ S\neq N-\{3,4\}}}(-1)^{|S|-n+2}x_{1,S}+x_{1,N-\{3,4\}}=P_{(N-\{3,4\})_1}\qquad (1,N-\{3,4\})$$

$$\cdots$$

$$\sum_{\substack{1\in N-\{3,n\}\subset S\subset N\\ S\neq N-\{3,n\}}}(-1)^{|S|-n+2}x_{1,S}+x_{1,N-\{3,n\}}=P_{(N-\{3,n\})_1}\qquad (1,N-\{3,n\})$$

$$\sum_{\substack{1\in N-\{4,5\}\subset S\subset N\\ S\neq N-\{4,5\}}}(-1)^{|S|-n+2}x_{1,S}+x_{1,N-\{4,5\}}=P_{(N-\{4,5\})_1}\qquad (1,N-\{4,5\})$$

$$\cdots$$

$$\sum_{\substack{n\in N-\{n-1\}\subset S\subset N\\ S\neq \{n\}}}(-1)^{|S|-n+2}x_{n,S}+x_{n,N-\{n-1\}}=P_{(N-\{n-1\})_1}\qquad (n,N-\{n-1\})$$

$$(4)$$

设以上方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{D}$,现在计算 $\boldsymbol{D}$ 的行列式,从方程组(4)中取第 (i,T) 个方程

$$\sum_{\substack{i\in T\subset S\subset N\\ S\neq T}}(-1)^{|S|-|T|}x_{i,S}+x_{i,T}=P_{T_i}\qquad(5)$$

上式左端第一项中所含的所有未知量下标的序号按照排序规则均在 (i,T) 的前面(由于 $S\supset T$ 且 $S\neq T$,$|S|>|T|$). 未知量 $x_{i,T}$ 的系数为 1,一切下标序号排在 (i,T) 之后的未知量的系数全为 0. 所以,在矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的第 (i,T) 行上,处于主对角线位置上的元素为 1,该行与主对角线相交处的元素以后的所有元素全为 0. 由于式(5)是方程组中任取的方程之一,矩阵 $\boldsymbol{D}$ 是一个下三角形矩阵,且其对角线元素全是 1. 因此,$\boldsymbol{D}$ 是一个非奇异矩阵,并且 $\boldsymbol{D}$ 的行列式的值为 1,故所述的方程组有惟一的解. 定理证毕.

定理 3 惟一地存在一个以全体 n 人博弈为定义域且满足公理 S1~S3的函数 φ,使得

$$\varphi_i(v)=\sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}P_{T_i}(v(T)-v(T-\{i\}))$$

其中 P_{T_i} 是 N 的子集 T 在 t 时刻的状态概率.

证明 由定理 1,对任意的 $v\in G(N)$ 有

$$v=\sum_{S\subset N}c_S w_S$$

由公理 S2得

$$\begin{aligned}
\varphi_i(v)=&\sum_{S\subset N}c_S\varphi_i(w_S)=\\
&\sum_{S\subset N}\left[\sum_{T\subset S}(-1)^{|S|-|T|}v(T)\right]\varphi_i(w_S)=\\
&\sum_{T\subset N}\Big[\sum_{\substack{S\subset N\\ T\cup\{i\}\subset S}}(-1)^{|S|-|T|}\varphi_i(w_S)v(T)\Big]=\\
&\sum_{T\subset N}\Big[\sum_{\substack{S\subset N\\ i\in T\subset S}}(-1)^{|S|-|T|}\varphi_i(w_S)v(T)+\\
&\sum_{\substack{S\subset N\\ T'=T\cup\{i\}\subset S\\ i\notin T}}(-1)^{|S|-|T|}\varphi_i(w_S)v(T')\Big]=\\
&\sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}\Big[\sum_{\substack{S\subset N\\ i\in T\subset S}}(-1)^{|S|-|T|}\varphi_i(w_S)v(T)+\\
&\sum_{\substack{S\subset N\\ i\in T\subset S}}(-1)^{|S|-|T|}\varphi_i(w_S)v(T-\{i\})\Big]=\\
&\sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}\Big[\sum_{i\in T\subset S\subset N}(-1)^{|S|-|T|}\varphi_i(w_S)v(T)\Big]\times\\
&(v(T)-v(T-\{i\}))
\end{aligned}\qquad(6)$$

由公理 S1有

$$\varphi_i(v)=\sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}P_{T_i}(v(T)-v(T-\{i\}))\qquad(7)$$

由定理 2知,满足公理 S1~S3的映射 φ 是惟一的. 所以式(7)的 $\varphi_i(v)$ 在公理意义下是惟一的. 于是得到了动态联盟博弈值的具体表达形式,称此值为动态联盟博弈的 SK值,其中 P_{T_i} 是在 t 时刻局中人集 N 的子集 T 的状态概率. 定理证毕.

综上所述,引理 1,推论 1以及定理 1是为了证明定理 3而引入的,定理 2的内容是具体论证 φ 的惟一性,定理 3证明了每个博弈具有 SK公理意义下的惟一解. 同时定理 3给出了局中人 i 在时间序列集 $\mathscr{S}$ 中每一点的 SK值. 即局中人 i 在动态联盟的每一点 t 的预期支付,都可以通过式(7)求得.

4 结 语

本文以 Markov随机过程为基础,将动态联

盟博弈看成是具有 Markov随机过程某些性质的动态过程加以研究. 将 n 人合作博弈中的局中人在不同时刻的策略选择归结为在时间序列集 $\mathscr{S}=\{0, 1,\cdots, f\}$上的有序选择. 定义了在某一时刻局中人集 N 的子集的状态概率,并给出局中人在时间序列集 $\mathscr{S}$ 中每一点的 SK值. 本文是对动态联盟博弈研究方法的一次新的探索,初步建立了随机动态联盟博弈理论框架. 下一步可以利用 Markov随机过程基本理论对 n 人动态联盟博弈进行深入研究,例如利用正则链定理求得动态联盟博弈的稳定集等.

参考文献:

[1] HIDEO K, DEBRAJ R. Coalition formation as a dynamic process [J]. **J Econ Theory**, 2003, **110**: 1-41

[2] SHAPLEY L S, SHUBIK M. The assignment game I: The core [J]. **Int J Game Theory**, 1972(2): 111-130

[3] LUCAS W. A game with no solution [J]. **Bull Amer Math Soc**, 1968, **74**: 237-239

[4] SHAPLEY L S, SHUBIK M. A method for evaluating the distribution of power in committee system [J]. **Amer Pol Sci Rev**, 1954, **48**: 787-792

[5] PACKEL E W. A stochastic solution concept for n-person games [J]. **Math Oper Res**, 1981, **6**: 349-363

[6] TONE A, ULRICH S. Dynamic coalition formation and the core [J]. **J Econ Behavior & Organ**, 2002, **49**: 363-380

[7] ZHANG Sheng-kai, GONG Xing-long. ZS-value for random coalition games [J]. **Chin Sci Bull**, 1989, **15**: 1236-1242

[8] BELENKY A S. Cooperative games of choosing partners and forming coalitions in the marketplace [J]. **Math and Comput Modeling**, 2002, **36**: 1279-1291

Value of n-person dynamic coalition games

SUN Kang* [1,2], SU Yi [3]

(1. Cent. for Ind. and Bus. Organ., Dongbei Univ. of Financ. and Econ., Dalian 116025, China;
2. School of Manage., Liaoning Norm. Univ., Dalian 116029, China;
3. School of Comput. Sci. and Inf. Technol., Liaoning Norm. Univ., Dalian 116029, China)

Abstract In order to set a dynamic model of endogenous coalition formation in cooperative games with transferable utility, the process of the dynamic coalition formation (DCF) can be regarded as a Markov chain. The status probability is defined under the process of DCF, the strategic selections (determined by a best-reply rule) of each player at different time periods up to the selections at time serial set $\mathscr{S}=\{0, 1,\cdots, f\}$ are summed. The SK value of player i at each dot in time serial T is given. The SK axiom of dynamic cooperative games is set. The SK value is proved to be the only solution in dynamic cooperative games with SK axiom. This model is a new exploration of methodology, and in the meantime, it enriches the dynamic coalition games.

Key words dynamic coalition games; status probability; Shapley value