第47卷第3期　　大连理工大学学报　　Vol. 47, No. 3
2007年5月　　Journal of Dalian University of Technology　　May 2007

文章编号: 1000-8608(2007)03-0465-04

离散加工时间单机多准则下可控排序问题

王吉波*[1,2], 郭爱霞[1], 夏尊铨[1]

(1.大连理工大学 应用数学系, 辽宁 大连 116024;
2.沈阳航空工业学院 理学系, 辽宁 沈阳 110136)

摘要: 讨论了工件具有离散可控加工时间的单机多准则下的排序问题.目标函数分别为极小化完工时间和与完工时间偏差和的线性组合,极小化等待时间和与等待时间偏差和的线性组合,极小化提前时间、延误时间、最早交货期及窗口长度的加权和,极小化提前时间、延误时间及公共工期的加权和.用数学规划的方法证明了四类多准则下的单机排序问题可以转化为指派问题,从而这四类问题都多项式时间可解.

关键词: 排序; 单机; 离散加工时间; 多准则
中图分类号: O223　　文献标识码: A

0 引　言

在经典排序中,工件的加工时间是一个常数.然而,在一些实际排序问题中,工件在机器上加工除了机器外还需要使用人工、资金等别的资源.改变或控制机器以外的资源可以使工件的加工时间或准备时间发生改变,这便是可控(controllable)排序问题.可控排序问题首先由Vickson[1,2]提出,后来得到了广泛的研究[3~15].对可控排序问题的综述,读者可参见文献[16].对于离散加工时间的可控排序问题,只有Chen等[6]进行了研究.

本文研究工件的加工时间为离散加工时间的单机可控排序问题,对四类多准则下的排序问题分别进行讨论.下面给出离散可控单机排序问题的一般描述:

设有n个工件$J_1, J_2, \cdots, J_n$,每个工件J_j有k个可能的加工时间$p_{j1}, p_{j2}, \cdots, p_{jk}$,满足$p_{j1} > p_{j2} > \cdots > p_{jk}$,其中$p_{j1}$称为工件$J_j$的正常加工时间,$p_{jk}$称为工件$J_j$的最小可能加工时间,工件$J_j$的每个可能加工时间$p_{ji}$ $(j = 1, 2, \cdots, n; i = 1, 2, \cdots, k)$对应的加工费用为$c_{ji}$.由于要求加工时间缩短,额外加工费用必然增加,假设$0 \leqslant c_{j1} < c_{j2} < \cdots < c_{jk}$,这时控制费用为$TPC = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} c_{ji} I_{ji}(x_j)$,其中$I_{ji}(x_j) = \begin{cases} 1, & x_j = p_{ji} \\ 0, & 其他 \end{cases}$.记工件$J_j$的完工时间为$C_j$,具有离散加工时间的单机可控排序问题记为$1|dc|f(C)$,其中$dc$代表离散可控(discrete controllable)排序问题,$f(C)$代表目标函数.

1 离散加工时间单机可控排序问题

1.1 问题 $1|dc|T\sum C_j + (1-T)\sum\sum|C_i - C_j| + TPC$

文献[17]讨论了一类双目标问题,其目标函数为极小化完工时间和与完工时间偏差和的线性组合,这一问题注重对工件完工时间的均衡.对于给定的排序c,完工时间和为$\sum_{j=1}^{n} C_j$,完工时间偏差和为$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}|C_i - C_j|$.目标函数为

$$f(c) = T\sum_{j=1}^{n} C_j + (1-T)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}|C_i - C_j| + TPC \tag{1}$$

文献[17]证明了

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}|C_i - C_j| = \sum_{j=1}^{n}(j-1)(n-j+1)p_{[j]}$$

收稿日期: 2005-03-17; 修回日期: 2007-02-20.
基金项目: 教育部博士学科点专项科研基金资助项目(20020141013);沈阳航空工业学院科研基金资助项目(05YB08).
作者简介: 王吉波*(1975-),男,博士,E-mail: wangjibo75@yahoo.com.cn.

所以

$$\alpha\sum_{j=1}^{n} C_j + (1-\alpha)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}|C_i - C_j| =$$
$$\alpha\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)p_{[j]} + (1-\alpha)\sum_{j=1}^{n}(j-1)(n-j+1)p_{[j]} = \sum_{j=1}^{n}\{(2\alpha-1)(n+1) + j[2-3\alpha+n(1-\alpha)] - j^2(1-\alpha)\}p_{[j]}$$

因此,在排序 π 中,若工件 J_j 放在第 r 个位置,则工件 J_j 对目标函数的贡献是

$$f_{jr}(x_j) = \{(2\alpha-1)(n+1) + r[2-3\alpha+n(1-\alpha)] - r^2(1-\alpha)\}x_j + \sum_{i=1}^{k} c_{ji}I_{ji}(x_j)$$

令

$$v_{jr} = \min\{f_{jr}(x_j)\mid x_j\in\{p_{j1},p_{j2},\cdots,p_{jk}\}\} = \min\{\{(2\alpha-1)(n+1) + r[2-3\alpha+n(1-\alpha)] - r^2(1-\alpha)\}p_{ji} + c_{ji}\mid i=1,2,\cdots,k\}$$

这时,工件 J_j 的实际加工时间 p_{ji} 只与工件 J_j 的位置 r 有关,而与其他工件的次序无关.因此可把排序问题 $1|dc|\alpha\sum C_j + (1-\alpha)\sum\sum|C_i - C_j| + TPC$ 转化为一个指派问题.设决策变量为 x_{jr},如果工件 J_j 排在第 r 个位置,则 $x_{jr}=1$,否则 $x_{jr}=0$. 极小化式(1)的指派问题为

$$\begin{aligned}\min\ & \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} v_{jr}x_{jr} \\ \text{s.t.}\ & \sum_{j=1}^{n} x_{jr} = 1, r = 1,2,\cdots,n \\ & \sum_{r=1}^{n} x_{jr} = 1,\ j = 1,2,\cdots,n \\ & x_{jr}\in\{0,1\}, j,r = 1,2,\cdots,n\end{aligned} \tag{2}$$

由于求解指派问题的算法复杂性为 $O(n^3)$(用匈牙利算法),问题 $1|dc|\alpha\sum C_j + (1-\alpha)\sum\sum|C_i - C_j| + TPC$ 多项式时间可解.

1.2 问题 $1|dc|\alpha\sum W_j + (1-\alpha)\sum\sum|W_i - W_j| + TPC$

文献[17]讨论了一类双目标问题,其目标函数为极小化等待时间和与等待时间偏差和的线性组合,这一问题注重对工件等待时间的均衡.对于给定的排序 π,等待时间和为 $\sum_{j=1}^{n} W_j$,其中 $W_j = C_j - p_j$,等待时间偏差和为 $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|W_i - W_j|$. 目标函数为

$$f(\pi) = \alpha\sum_{j=1}^{n} W_j + (1-\alpha)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|W_i - W_j| + TPC \tag{3}$$

文献[17]证明了

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|W_i - W_j| = \sum_{j=1}^{n} j(n-j)p_{[j]}$$

因此,在排序 π 中,若工件 J_j 放在第 r 个位置,则工件 J_j 对目标函数的贡献是

$$f_{jr}(x_j) = \{\alpha n + r[n-\alpha(1+n)] - r^2(1-\alpha)\}x_j + \sum_{i=1}^{k} c_{ji}I_{ji}(x_j)$$

令

$$v_{jr} = \min\{\{\alpha n + r[n-\alpha(1+n)] - r^2(1-\alpha)\}p_{ji} + c_{ji}\mid i = 1,2,\cdots,k\}$$

与前面讨论一样,问题 $1|dc|\alpha\sum W_j + (1-\alpha)\sum\sum|W_i - W_j| + TPC$ 同样可以转化为指派问题(2).

1.3 问题 $1|dc|\sum(\alpha E_j + \beta T_j + \gamma d + \delta D) + TPC$

考虑文献[18]提出的一类窗时(due window)排序问题.窗时排序问题是基于 JIT(just in time)工作环境提出的问题.在这类问题中,交货期(工期)是一个区间,在这个区间之前(提前)和之后(延误)交货都要受罚.这类问题可描述如下:

设有 n 个工件 $J_1,J_2,\cdots,J_n$,所有工件有一个共同的交货期窗口 $[d,d+D]$,其中 d 是最早交货期,D 是窗口的长度,工件在交货期窗口内完工不必支付费用.目标函数为极小化提前时间、延误时间、最早交货期及窗口长度的加权和.对于给定的排序 π,目标函数为

$$f(\pi,d,D) = \sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j + \beta T_j + \gamma d + \delta D) + TPC \tag{4}$$

式中: d、D 是待求变量; $E_j = \max\{0,d-C_j\}$; $T_j = \max\{0,C_j-d-D\}$.

令 n_e、n_w 和 n_t 分别表示提前的工件数、在窗口中的工件数和延误工件数,显然 $n_e\geqslant 0,n_w\geqslant 0,n_t\geqslant 0,n_e+n_w+n_t=n$. 由文献[18]知第 r 个位置的权值为

$$w_r = \min\{n\gamma + (r-1)\alpha, n\delta, (n-r-1)\beta\} \tag{5}$$

如果 $w_r = n\gamma + (r-1)\alpha$,则排在第 r 个位置的工件是提前工件,如果 $w_r = n\delta$,则排在第 r 个位置的工件是在窗口中的工件,如果 $w_r = (n-r-1)\beta$,则排在第 r 个位置的工件是延误工件,这样 d

$= \sum_{j=1}^{n_e} p_{[j]}, D = \sum_{j=n_e+1}^{n_e+n_w} p_{[j]}$.

在排序 c中,若工件 J_j 放在第 r 个位置,则工件 J_j 对目标函数的贡献是

$$f_{jr}(x_j) = w_r x_j + \sum_{i=1}^{k} c_{ji} I_{ji}(x_j)$$

令 $v_{jr} = \min\{w_r p_{ji} + c_{ji} \mid i = 1, 2, \cdots, k\}$,这样与前面讨论相同,可把排序问题 $1 \| dd \sum (\mathrm{T}E_j + \mathrm{U}T_j + \mathrm{V}d + \mathrm{W}D) + TPC$ 转化为一个指派问题(2).

1.4 问题 $1 \| dd \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in I_j} (\mathrm{T}D_j + \mathrm{U}E_i + \mathrm{V}T_i) + TPC$

考虑由文献[19]提出的一类准时排序问题.在这类问题中,设有 N 个工件 $J_1, J_2, \cdots, J_N$ 要在一台机器上加工,d_j 是工件 J_j 的工期.现有 m 个公共工期 $(1 \leqslant m \leqslant n)$ 要确定并且分配给这 m 个公共工期的工件数 $(n_1, n_2, \cdots, n_m)$ 已知,其中 n_i 表示分配给第 i 个公共工期的工件数,$\sum_{j=1}^{m} n_j = N$.目标是确定 $D = \{D_1, D_2, \cdots, D_m\}$, $I = \{I_1, I_2, \cdots, I_m\}$,其中 D_j 表示第 j 个公共工期,I_j 表示分配给第 j 个公共工期的工件集合,和排序 c使目标函数为极小化提前时间、延误时间及公共工期的加权和,即

$$TP(D, I, c) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in I_j} (\mathrm{T}D_j + \mathrm{U}E_i + \mathrm{V}T_i) + TPC$$

其中对 $i \in I_j$ 有 $d_i = D_j$, $E_j = \max\{0, d_j - C_j\}$, $T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$.

由文献[19]中关于经典问题的讨论可知,对于给定的一个排序 $[J_{[1]}, J_{[2]}, \cdots, J_{[n]}]$,最优的公共工期应为排在第 k_j 个位置的工件 $J_{[k_j]}$ 的完工时间 $C_{[k_j]}$,即 $D_j = C_{[k_j]}$,其中

$$k_j = N_{j-1} + \lceil (\mathrm{V} - \mathrm{T}) n_j / (\mathrm{U} + \mathrm{V}) \rceil,$$

$$N_j = \sum_{k=1}^{j} n_k, N_0 = 0 (j = 1, 2, \cdots, m)$$

第 r 个位置的权只与 T、U和 V的值有关,其值为

$$w_r = \begin{cases} \mathrm{U}(r - 1 - N_{j-1}) + \mathrm{T}(n - N_{j-1}); \\ \quad r = N_{j-1} + 1, N_{j-1} + 2, \cdots, k_j \\ \mathrm{V}(N_j - r + 1) + \mathrm{T}(n - N_j); \\ \quad r = k_j + 1, k_j + 2, \cdots, N_j \end{cases}$$

在排序 c中,若工件 J_j 放在第 r 个位置,则工件 J_j 对目标函数的贡献是

$$f_{jr}(x_j) = w_r x_j + \sum_{i=1}^{k} c_{ji} I_{ji}(x_j)$$

令 $v_{jr} = \min\{w_r p_{ji} + c_{ji} \mid i = 1, 2, \cdots, k\}$,与前面讨论一样,可把排序问题 $1 \| dd \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in I_j} (\mathrm{T}D_j + \mathrm{U}E_i + \mathrm{V}T_i) + TPC$ 转化为一个指派问题(2).

2 结 论

本文研究了工件的加工时间为离散加工时间的可控排序问题,对四类多准则下的排序问题分别进行了讨论,它们的经典问题都是多项式时间可解的(算法的复杂性都为 $O(n \log n)$),在工件的加工时间是离散可控加工时间时这些问题都可转化为指派问题,从而多项式时间可解.

参考文献:

[1] VICKSON R G. Two single-machine sequencing problems involving controllable job processing times [J]. **AIIE Trans**, 1980, **12**(3): 258-262

[2] VICKSON R G. Choosing the job sequence and processing times to minimize total processing plus flow cost on a single machine [J]. **Oper Res**, 1980, **28**(5): 1155-1167

[3] DANIELS R L, SARIN R K. Single machine scheduling with controllable processing times and number of jobs tardy [J]. **Oper Res**, 1989, **37**(6): 981-984

[4] ALIDANCE B, AHMADIAN A. Two parallel machine sequencing problems involving controllable job processing times [J]. **Eur J Oper Res**, 1993, **70**(3): 335-341

[5] NOWICKI E, ZDRALKA S. A survey of results for sequencing with controllable processing times [J]. **Discrete Appl Math**, 1990, **26**(2-3): 271-287

[6] CHEN Z L, LU Q, TANG G C. Single machine scheduling with discretely controllable processing times [J]. **Oper Res Lett**, 1997, **21**(2): 69-76

[7] CHENG T C E, CHEN Z L, LI C L. Parallel machine scheduling with controllable processing times [J]. **IIE Trans**, 1996, **28**(2): 177-180

[8] PANWALKER S S, RAJAGOPLAN R. Single-machine sequencing with controllable processing times [J]. **Eur J Oper Res**, 1992, **59**(2): 298-302

[9] ZDRZALKA S. Scheduling jobs on a single machine with release dates, delivery times and controllable processing times: worse-case analysis [J]. **Oper Res**

Lett, 1991, **10**(9): 519-524

[10] BISKUP D, CHENG T C E. Single machine scheduling with controllable processing times and earliness, tardiness and completion time penalties [J]. **Eng Optim**, 1999, **31**(3): 329-336

[11] SHABTAY D, KASPI M. Minimizing the total weighted flow time in a single machine with controllable processing times [J]. **Comput & Oper Res**, 2004, **31**(13): 2279-2289

[12] HOOGEVEEN H, WOEGINGER G J. Some comments on sequencing with controllable processing times [J]. **Computing**, 2002, **68**(2): 181-192

[13] WANG Ji-bo. Single machine scheduling with common due date and controllable processing times [J]. **Appl Math Comput**, 2006, **174**(2): 1245-1254

[14] WANG Ji-bo. Single machine common flow allowance scheduling with controllable processing times [J]. **J Appl Math Comput**, 2006, **21**(1-2): 249-257

[15] WANG Ji-bo, XIA Zun-quan. Single machine scheduling problems with controllable processing times and total absolute differences penalties [J]. **Eur J Oper Res**, 2007, **177**(1): 638-645

[16] 唐国春, 张 峰, 罗守成, 等. 现代排序论[M]. 上海: 上海科学普及出版社, 2003

[17] BAGCHI U B. Simultaneous minimization of mean and variation of flow-time and waiting time in single machine systems [J]. **Oper Res**, 1989, **37**(1): 118-125

[18] LIMAN S D, PANWALKAR S S, THONGMEE S. Common due window size and location determination in a single machine scheduling problem [J]. **J Oper Res Soc**, 1998, **49**(9): 1007-1010

[19] CHAND S, CHHAJED D. A single machine model for determination of optimal due dates and sequence [J]. **Oper Res**, 1992, **40**(3): 596-602

Multi-rule single machine scheduling with discretely controllable processing times

WANG Ji-bo*[1,2], GUO Ai-xia[1], XIA Zun-quan[1]

(1. Dept. of Appl. Math., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China;
2. Dept. of Sci., Shenyang Inst. of Aeronaut. Eng., Shenyang 110136, China)

Abstract Multi-rule single machine scheduling problems with discretely controllable processing times are considered. The objectives are to minimize a linear function of total completion time and total variation of completion time, a linear function of total waiting time and total variation of waiting time, a cost function based on earliness, tardiness, window size, window location, and a linear function of the due date, the earliness and tardiness for all jobs. It is shown that these four types of single machine scheduling problems can be modeled as an assignment problem by mathematical programming method, thus these four types of problems can be solved in polynomial time.

Key words scheduling; single machine; discretely controllable processing times; multi-rule