

弹性近不可压缩问题的精化元法

陈万吉*, 冀 宾, 赵 杰

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 对于弹性问题,材料近不可压缩可引起有限元法的体积闭锁.为解决此问题,以精化元法为基础,将单元应变正交分解为常应变和高阶应变,其中常应变可以保证收敛,对于近不可压缩问题只需忽略高阶应变中的体应变,从而避免单元体积不可压缩闭锁.按照上述方法修改了平面八节点等参元(IQ8),并用于平面应变厚壁筒计算,通过与ABAQUS系统软件的八节点等参元计算结果对比,表明IQ8单元用于可压和近不可压缩问题都有效.

关键词: 不可压缩;精化元;厚壁筒;平面八节点等参元
中图分类号: O343 **文献标识码:** A

0 引言

用有限元法解弹性不可压缩问题,在材料不可压缩或近不可压缩情况下, $\nu \rightarrow 0.5, \lambda \rightarrow \infty$,体积应变 ϵ 必应当为零,但是常规有限元法不保证体积应变 ϵ 为零,这时将会出现体积闭锁现象,求解所得位移偏小,甚至趋向于0.

目前,国内外已提出不少解决体积闭锁问题的方法,例如减缩积分或减缩/选择积分法^[1-2]、罚函数法^[3]、混合/杂交法^[4]等,前者应用较多.但减缩积分会使单元刚度矩阵降低,常引起多余零能模式.为此,Belytschko等提出B-bar方法^[5],可以避免多余零能模式,但这种方法常常不能保证通过分片检验.以上解决体积闭锁的方法都是以 $\epsilon = 0$ 为约束条件.本文采用一种新的精化元法,将应变分解为高阶和低阶部分,并在计算高阶应变的应变能时不计体应变部分,以解决材料近不可压缩带来的体积闭锁问题.

1 解除弹性体积闭锁的应变和本构矩阵分离法(BD分离法)

1.1 精化元法基础

1973年,Wilson等提出的不协调元大大提高了单元精度,国内外有很多关于不协调元的研究

工作,其中精化不协调元可以直接用于改进任何协调和不协调元^[6-8].

按精化元法,先假定单元位移函数为

$$\bar{u}^* = u + P\alpha_c \tag{1}$$

式中: u 为任意已知的协调元或不协调的单元函数; P 满足 $D^T P = I$,设 D 为微分算子向量,对于二维问题, $D^T = \left[\frac{\partial}{\partial x^2} \quad \frac{\partial}{\partial y^2} \quad \frac{\partial}{\partial x \partial y} \right]; \alpha_c$ 为待定常数.

精化不协调元法基于如下泛函:

$$C_{mp}^* = \sum_e \left[\int_{V_e} \left[\frac{1}{2} (D^T \bar{u}^*)^T A (D^T \bar{u}^*) \right] dV - \int_{\gamma_e} T_c^T (\bar{u}^* - \tilde{u}) ds \right] - W \tag{2}$$

代入分部积分公式

$$\int_{\gamma_e} T_c^T \bar{u}^* ds = \int_{V_e} (\beta_c^T (D^T \bar{u}^*)) dV$$

得

$$C_{mp}^* = \sum_e \left[\int_{V_e} \left[\frac{1}{2} (D^T u + \alpha_c)^T A (D^T u + \alpha_c) \right] dV + \int_{\gamma_e} T_c^T \tilde{u} ds \right] - W$$

式中: α_c 和 β_c 分别为常应变和常应力;边界力 $T_c = R\beta_c$, R 为单元边界的方向余弦矩阵; $\tilde{u}$ 为用单元

边界节点参数插值的公共位移.

由 $\frac{\partial \mathbf{c}_{mp}^*}{\partial \mathbf{c}_c^T} = 0$ 得

$$\alpha_c = \frac{1}{\Delta} \left[- \int_{V_e} \mathbf{D}^T \mathbf{u} dV + \int_{\mathcal{N}_e} \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{u}} ds \right] \quad (3)$$

将式 (3) 代入式 (1) 得

$$\mathbf{D}^T \mathbf{u}^* = \mathbf{D}^T \mathbf{u} + \frac{1}{\Delta} \left[- \int_{V_e} \mathbf{D}^T \mathbf{u} dV + \int_{\partial V_e} \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{u}} ds \right] \quad (4)$$

其中 $\Delta = \int_{V_e} dV$.

式 (4) 就是精化不协调元的精化应变表达式. 相应的应变矩阵为

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B}_h + \mathbf{B}_c \quad (5)$$

其中 $\mathbf{B}_h = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0, \mathbf{B} \mathbf{q} = \mathbf{D}^T \mathbf{u}, \mathbf{B}_0 \mathbf{q} = \frac{1}{\Delta} \int_{V_e} \mathbf{D}^T \mathbf{u} dV$,

$$\mathbf{B}_c \mathbf{q} = \frac{1}{\Delta} \int_{\mathcal{N}_e} \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{u}} ds.$$

精化不协调元法同样可以处理协调元, 这时有

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{B}_0 \quad (6)$$

另外, 式 (5) 和 (6) 中的 $\mathbf{B}_c$ 还可以引入优化参数^[6], 本文不讨论这种方法.

下面详细讨论精化元的正交性和收敛性.

(1) $\mathbf{B}$ 阵的正交性

精化元修正了常规协调元的常应变部分, 这一点可以在式 (5) (6) 中看出, 修正后的应变分解为高阶应变阵 $\mathbf{B}_h = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0$ 和低阶应变阵 $\mathbf{B}_c$. 注意到 $\mathbf{B}_h, \mathbf{B}_c$ 阵均为常数阵, 便可以得出精化元 $\mathbf{B}$ 阵的高阶项 $\mathbf{B}_h$ 和低阶项 $\mathbf{B}_c$ 正交的结论, 证明如下:

$$\int_{V_e} \mathbf{B}_h^T \mathbf{B}_c dV = \left[\int_{V_e} \mathbf{B}_h^T dV \right] \mathbf{B}_c = \left[\int_{V_e} \mathbf{B}^T dV - \int_{V_e} \mathbf{B}_0^T dV \right] \mathbf{B}_c = \Delta \mathbf{B}_0^T \mathbf{B}_c = \mathbf{0} \quad (7)$$

注意到单元内本构阵 $\mathbf{C}$ 是常数, 故同样满足

$$\int_{V_e} \mathbf{B}_h^T \mathbf{A} \mathbf{B}_c dV = \mathbf{0} \quad (8)$$

从而, 刚度阵实现正交分解

$$\mathbf{K} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} dV =$$

$$\int_{V_e} (\mathbf{B}_h^T \mathbf{A} \mathbf{B}_h + \mathbf{B}_c^T \mathbf{A} \mathbf{B}_c + 2 \mathbf{B}_h^T \mathbf{A} \mathbf{B}_c) dV = \int_{V_e} \mathbf{B}_h^T \mathbf{A} \mathbf{B}_h dV + \Delta \mathbf{B}_c^T \mathbf{A} \mathbf{B}_c \quad (9)$$

(2) 收敛性

对式 (4) 两边积分可得

$$\int_{V_e} \mathbf{D}^T \mathbf{u}^* dV = \int_{V_e} \left[\mathbf{D}^T \mathbf{u} + \frac{1}{\Delta} \left(- \int_{V_e} \mathbf{D}^T \mathbf{u} dV + \int_{\mathcal{N}_e} \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{u}} ds \right) \right] dV = \int_{\mathcal{N}_e} \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{u}} ds \quad (10)$$

式 (10) 被称为单体条件, 是通过分片检验的充分条件^[9].

由分部积分公式得

$$\int_{V_e} \mathbf{D}^T \mathbf{u}^* dV = \int_{\mathcal{N}_e} \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{u}}^* ds \quad (11)$$

代入式 (10), 可得到精化不协调元的弱连续条件

$$\int_{\mathcal{N}_e} \mathbf{R}^T (\mathbf{u}^* - \tilde{\mathbf{u}}) ds = \mathbf{0} \quad (12)$$

1.2 BD 分离法

上述精化元法将应变分解, 用于近不可压缩问题, 还要进一步将本构方程分离. 以平面应变问题为例.

平面应变问题的本构方程

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (14)$$

λ 和 G 为 Lamé 常数, 其表达式为

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (15)$$

不计高阶应变中的体应变部分, 平面应变近不可压缩问题的刚度矩阵为

$$\mathbf{K}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}_h^T \mathbf{G} \mathbf{B}_h dV + V \mathbf{B}_c^T \mathbf{A} \mathbf{B}_c \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{G} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

方程 (16) 右边的第二项保证单元收敛,其中体应变对刚度阵的贡献,由于缺秩,不会产生闭锁;第一项计入偏斜应变,不会产生闭锁并保证单元不缺秩.

在应力的计算中,本文做同样处理

$$\sigma = AB_c q + \bar{GB}_b q$$

(18)

2 数值算例

平面应变各向同性材料的厚壁圆筒,其内径为 5 m,外径为 10 m,弹性模量 $E=1.0\times 10^7$ Pa,内压 $p=5\,000$ Pa. 计算采用 3×3 Gauss 数值积分,分别用 ABAQUS 的八节点等参元 Q8 和本文改进的八节点等参元 IQ8 完成. 网格划分如图 1 所示,不同泊松比的计算结果见表 1.

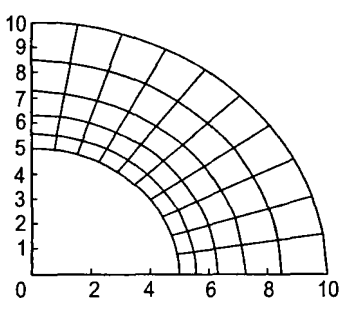


图 1 厚壁圆筒网格划分

Fig. 1 Finite element mesh for the thick-walled cylinder

表 1 近不可压缩材料的内径径向位移 $u_r(10^{-3})$

Tab. 1 Radial displacement $u_r(10^{-3})$ in internal radius for incompressible problem

ν	解析解	Q8	IQ8
0.48	4.982 7	4.966 0	4.924 9
0.499	4.999 2	4.977 9	4.977 4
0.49999	5.000 0	4.066 0	4.978 2
0.499999	5.000 0	1.524 1	4.978 2
0.4999999	5.000 0	0.209 9	4.978 2
0.49999999	5.000 0	0.021 8	4.978 2

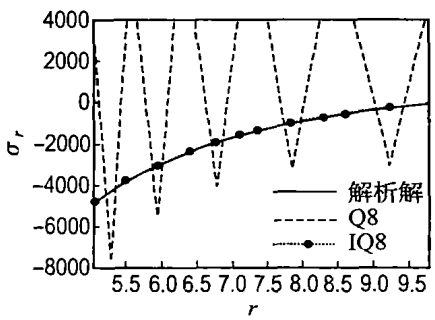
从表 1 中看出, IQ8 单元对近不可压缩问题的计算结果理想. 本文将 IQ8 单元用于可压缩材料, 结果同样精确, 如表 2 所示.

表 2 可压缩材料的内径径向位移 $u_r(10^{-3})$

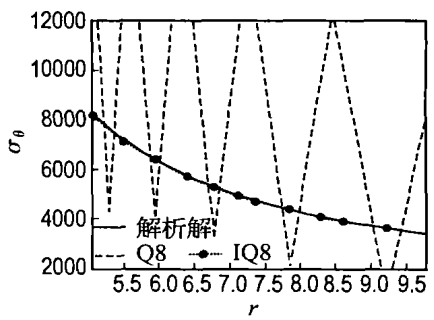
Tab. 2 Radial displacement $u_r(10^{-3})$ in internal radius for compressible problem

ν	解析解	Q8	IQ8
0	4.166 7	4.152 5	4.152 2
0.1	4.400 0	4.384 5	4.384 0
0.2	4.600 0	4.583 3	4.582 6
0.3	4.766 7	4.748 9	4.747 8
0.4	4.900 0	4.881 7	4.879 7

再以 $\nu=0.499$ 为例, 比较应力结果 (见图 2), 单元 Q8 的应力发生不正常的跳动现象, 当 $\nu<0.4$ 单元 Q8 的应力则无此现象.



(a) 径向应力 σ_r



(b) 切向应力 σ_θ

图 2 厚壁圆筒应力计算结果($\nu=0.499$)

Fig. 2 The stresses versus the radial coordinate for the thick-walled cylinder ($\nu=0.499$)

3 结 论

BD 分离法处理不可压缩问题很简便, 在标准的有限元程序中, 只需要将应变 B 阵、本构 A 阵作

一下简单的分解. 对于 B 阵的分解只需要计算 $B_0 = \frac{1}{\Delta} \int_{V_e} B dV$, 对于 A 阵的分解更加简便. 本文基于精化元法的应变正交分解建立的 IQ8 单元可以统

一用于近不可压缩和可压缩问题,对于近不可压缩问题,相当于罚函数法,但是,只对常应变的体应变加罚,罚因子为对应体应变的弹性常数,这项因为缺秩不会产生体积不可压缩闭锁;对于常规泊松比问题,常应变部分保证收敛,斜应变部分起稳定作用.这种方法还可以推广到不可压缩流场计算.

参考文献:

[1] HUGHES T J R. Equivalence of finite elements for nearly incompressible elasticity [J]. **J Appl Mech**, 1977, **44**: 181-183

[2] MALKUS D S, HUGHES T J R. Mixed finite element methods—reduced and selective integration techniques a unification of concepts [J]. **Comput Meths Appl Mech Eng**, 1978, **15**(1): 63-81

[3] ODEN J T, CAREY G F. **Finite Elements (Vol V)** [M]. NJ Prentice-Hall, 1981

[4] CHEUNG Y K, CHEN Wan-ji. Hybrid element

method for incompressible and nearly incompressible materials [J]. **Int J Solids Struct**, 1989, **25**(5): 483-495

[5] BELYTSCHKO T, BACHRACH W E. Efficient implementation of quadrilaterals with high coarse-mesh accuracy [J]. **Comput Meth Appl Mech Eng**, 1986, **54**(3): 279-301

[6] 陈万吉. 精化直接刚度法及九参数三角形薄板单元 [J]. 大连理工大学学报, 1993, **33**(3): 289-296 (CHEN Wan-ji. Refines direct stiffness method and refined nine parameters triangular thin bending elements [J]. **J Dalian Univ Technol**, 1993, **33**(3): 289-296)

[7] 陈万吉. 精化直接刚度法与不协调模式 [J]. 计算结构力学及其应用, 1995, **12**(2): 127-132

[8] CHEN Wan-ji. Variational principles for non-conforming element methods [J]. **Int J Numer Methods Eng**, 2002, **53**(3): 603-619

[9] 陈万吉. 有限元增强型分片检验 [J]. 中国科学: G 辑, 2006, **36**(2): 199-212

Refined-element methods to solve elastic incompressible problems

CHEN Wan-ji^{*}, JI Bin, ZHAO Jie

(State Key Lab. of Struct. Anal. for Ind. Equip., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China)

Abstract For elastic problem, volumetric locking may occur when the material response is incompressible. To solve this problem, a new method based on the refined-element technique is proposed. The strain in the present method can be decomposed into two parts one is the constant strain that ensures the convergence, and the other is the higher-order strain that the volumetric strain can be ignored to avoid volumetric locking for incompressible problem. At the same time, the improved 8-node isoparametric element (IQ8) is also proposed and applied to analyzing the problem of thick-walled cylinder. Compared with the element Q8 in ABAQUS, numerical results show that the present IQ8 possesses the ability to solve compressible and incompressible problems.

Key words incompressible; refined-element; thick-walled cylinder; 8-node isoparametric element