

# 小阻尼空间声学特征频率灵敏度分析与优化设计

陈 钢\*, 赵国忠, 顾元宪

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 小阻尼声空间的优化设计可以使声空间布局更为合理, 从而改进空腔声学性能. 根据三维空间声学波动方程及其边界条件, 给出了声学有限元方程, 在此基础上建立小阻尼空间声学问题的优化模型, 重点推导声场特征频率对声空间边界形状控制参数的灵敏度分析公式, 同时给出了优化求解算法. 在 JIFEX 软件中进行了程序实现, 数值算例分别验证了有限元计算、灵敏度分析和优化算法的有效性.

**关键词:** 灵敏度分析; 优化; 小阻尼空间

**中图分类号:** TB533 **文献标识码:** A

## 0 引 言

自从 20 世纪 60 年代 Gladwell 和 Zimmerman 首次把有限元法应用到声学领域, 有限元法在声学中的应用有了很大的发展. 六七十年代, 声学有限元法被用于解决车辆的降噪问题. 80 年代, 国内外学者对声学有限元法进行了深入的研究, 并将其广泛应用于工程实际中. Craggs 推导了小阻尼界面声空间有限元计算模型, 并给出了固有频率、声衰变系数和混响时间等有限元计算方法<sup>[1, 2]</sup>. Easwaran 在 Craggs 工作的基础上研究了瞬态响应的声学有限元模型<sup>[3]</sup>. 赵越 等<sup>[4]</sup>在 Craggs 的基础上计算了房间内两点之间的声传输函数和声脉冲响应. 但是目前关于小尺度阻尼空间声学问题优化理论的研究比较缺乏, 而优化设计可以使声场的边界布局更为合理, 从而改进系统的声学性能, 例如避开共振、降低噪声等. 因此研究小尺度阻尼空间声学问题的优化设计方法是一项有意义的工作.

本文的工作是在文献 [1 2 4] 的基础上, 建立小尺度阻尼界面封闭空间声场的优化模型, 导

出声场特征频率对声场形状控制参数的灵敏度分析公式, 并引进结构优化的半解析技术, 在大型有限元分析与优化设计软件 JIFEX<sup>[5]</sup> 中, 实现小尺度阻尼界面封闭空间声场的特征频率灵敏度分析及其优化设计, 并通过数值算例验证本文方法的正确性.

## 1 声学有限元方程

考虑如图 1 所示的声学空间, 体积为  $V$ , 表面积为  $A$ ,  $n$  为外法线方向.

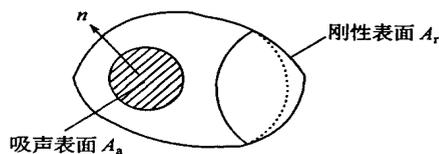


图 1 封闭声学空腔

Fig. 1 An enclosed acoustic cavity

此处只考虑能量在边界上的损失, 不考虑空气本身所固有的黏滞性质, 声压有限元方程为

$$Mp + Cp + Kp = 0 \quad (1)$$

收稿日期: 2006-08-12 修回日期: 2007-06-10.

作者简介: 陈 钢\* (1977-), 男, 博士生, E-mail: lncg78@ student. dlut. edu. cn

式中: 列阵  $p$  为单元节点处的声压向量;  $M$   $C$  和  $K$  分别为声学质量矩阵、声学阻尼矩阵和声学刚度矩阵.

在小阻尼界面条件下, 例如  $|Z|/k_0c \gg 1$ ,  $Z$  为声阻抗, 假设声压向量  $\Psi$  为实数, 对于简谐运动, 方程 (1) 被分解成如下两个方程<sup>[14]</sup>:

$$\left[ K - \frac{1}{4}CM^{-1}C \right] \Psi = \lambda M \Psi \quad (2)$$

$$C^* \Psi - 2mM \Psi = 0 \quad (3)$$

其中

$$C^* = X^T c X, c = X^T C X \quad (4)$$

$X$  为系统的正则振型矩阵, 有

$$X^T M X = I \quad (5)$$

式中:  $I$  为单位阵;  $c$  为对角化的模态阻尼矩阵, 由式 (4) 右端的对角元组成. 从方程 (3) ~ (5) 可以得到

$$m_i = \frac{1}{2} \Psi^T C^* \Psi \quad (6)$$

在文献 [2] 中, Craggs 证明了在  $|m_i \lambda_i| \leq 0.2$  的情况下, 上式成立.  $m_i$  可称为声衰变系数. 由方程 (2) 和 (6) 就可以计算出空腔的特征频率、声衰变系数和混响时间  $t_i$

$$t_i = \frac{\ln 1000}{m_i} \quad (7)$$

## 2 小阻尼空间声学特征频率灵敏度分析及优化

灵敏度分析的目的在于确定系统参数的改变对响应产生的影响, 它是基于梯度的优化设计方法的关键一环. 特征值灵敏度分析就是特征频率对设计变量求导数, 假设用  $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 表示设计变量, 特征值灵敏度可表示为  $\partial \lambda / \partial d_i$ , 为了方便起见, 写成  $\lambda'$ .

将方程 (2) 写成如下标准特征值问题:

$$A \Psi = \lambda B \Psi \quad (8)$$

其中

$$A = K - \frac{1}{4}CM^{-1}C, B = M \quad (9)$$

因此, 可以得到特征值灵敏度

$$\lambda' = \Psi^T (A' - \lambda B') \Psi \quad (10)$$

其中

$$A' = K' - \frac{1}{4}C(M^{-1})'C - \frac{1}{2}C'M^{-1}C,$$

$$B' = M', \lambda = 4\pi^2 f^2 \quad (11)$$

$f$  是特征频率, 把式 (11) 代入式 (10) 后, 就可以求得小阻尼空间声学特征频率灵敏度

$$f' = \frac{1}{8\pi f} \Psi^T \left[ K' - \frac{1}{4}C(M^{-1})'C - \frac{1}{2}C'M^{-1}C - \lambda M' \right] \Psi \quad (12)$$

由于本文的设计变量取的是声空间的形状设计参数, 而声学刚度阵  $K$ 、质量阵  $M$  和阻尼阵  $C$  不使用设计变量显式表示, 借鉴结构优化中的半解析灵敏度分析方法<sup>[6-7]</sup>, 采用局部差分法来计算式 (12) 中等号右端各矩阵的导数. 以刚度阵为例, 在单元一级采用差分法计算各单元对应项的导数, 用该方法计算灵敏度时, 设当前设计点为  $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ , 给其一个扰动, 有  $d + \Delta d = \{d_1, d_2, \dots, d_i + \Delta d_i, \dots, d_n\}$ , 则由局部差分法得

$$\frac{\partial K^e}{\partial d_i} = \frac{K^e(d + \Delta d) - K^e(d)}{\Delta d_i} \quad (13)$$

为了提高计算效率, 上述矩阵导数不需要集成到整体矩阵导数中去, 而是在单元一级直接完成相应的乘积运算后, 累加形成整体向量即可, 然后代入整体频率灵敏度方程. 形状控制变量摄动后, 有限元模型自动修改的技术可见文献 [7].

优化设计问题可表示为如下的一般数学形式:

$$\begin{cases} \min F(d) \\ \text{s. t. } g_j(d) \leq g_{ju} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \\ d_i \leq d_i \leq d_{iu} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (14)$$

式中:  $F(d)$  为目标函数;  $g_j(d)$  为约束函数;  $g_{ju}$  是约束界限值;  $m$  和  $n$  为约束和设计变量个数;  $d_{iu}$  和  $d_i$  分别为设计变量  $d_i$  的上界和下界. 在本文的小阻尼空间声场的优化模型中以某关键阶特征频率为目标函数, 其他阶的频率为约束条件, 设计变量是声场的边界形状控制参数. 采用序列线性规划法对上述优化模型进行了优化求解<sup>[8]</sup>.

## 3 数值算例

例 1 铺有吸声材料的封闭房间的有限元计算. 准确的有限元计算是灵敏度分析和优化设计的前提, 为了便于比较, 本文采用了文献 [3] 中的算例. 如图 2 所示矩形房间,  $x$  向为 6 m,  $y$  向为 5

$m, z$  向为 4 m, 顶面铺设吸声材料, 阻抗为  $|Z|/d_0c_0 = 37$ , 其他墙面为刚性壁. 声速  $c_0 = 340$  m/s, 房间内空气密度  $d_0 = 1.21$  kg/m<sup>3</sup>. 整个房间被划分为 960 个空间六面体八节点单元, 共有 1 287 个节点.

表 1 给出了本文计算结果与文献 [3] 的比较. 从表中可以看出, 一直算到十阶模态, 特征频率差异的最大值不到 5%, 衰变系数和混响时间差异的最大值也不到 8%, 表明了本文有限元计算的准确性.

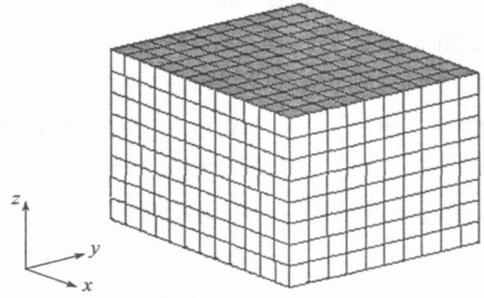


图 2 封闭矩形房间

Fig. 2 Rectangular room with an absorptive roof

表 1 特征频率、声衰变系数和混响时间

Tab. 1 Eigenfrequencies, decay constant and reverberation time

$n_x, n_y, n_z$	$f / \text{Hz}$		$m / s^{-1}$		$t / s$	
	本文	文献 [3]	本文	文献 [3]	本文	文献 [3]
0, 0, 0	0	0	1.16	1.16	5.95	5.95
1, 0, 0	28.5	28.6	1.15	1.16	6.00	5.95
0, 1, 0	34.2	34.4	1.14	1.16	6.06	5.95
0, 0, 1	42.6	43.1	2.24	2.38	3.08	2.90
1, 1, 0	44.2	44.9	1.14	1.16	6.06	5.95
1, 0, 1	50.9	51.7	2.23	2.38	3.10	2.90
0, 1, 1	54.1	55.2	2.22	2.38	3.11	2.90
2, 0, 0	56.5	57.8	1.12	1.16	6.17	5.95
1, 1, 1	60.6	62.2	2.20	2.38	3.14	2.90
2, 1, 0	65.2	67.3	1.10	1.16	6.28	5.95

例 2 特征频率的灵敏度分析. 在例 1 的基础上, 进一步对前十阶模态的特征频率进行了灵敏度分析. 设计变量  $d_1$  和  $d_2$  分别为房间顶面上  $x = 0$  和  $x = 6$  m 处边线的  $x$  坐标值. 表 2 给出了本文灵敏度分析方法得到的计算结果, 并用全局差分方法进行了校核, 差分步长为 0.002 m. 从表

中可以看出, 两者吻合很好, 表明本文灵敏度分析的精度是非常高的. 由于几何模型的对称性, 设计变量的选取也是对称的, 表中对设计变量  $d_1$  和  $d_2$  的灵敏度计算值只相差一个负号, 仍然保持了这种对称性.

表 2 特征频率灵敏度

Tab. 2 Sensitivities of eigenfrequencies

$n_x, n_y, n_z$	$f / \text{Hz}$	$d_1$		$d_2$	
		灵敏度分析	全局差分	灵敏度分析	全局差分
0, 0, 0	0	0.292	0.292	- 0.292	- 0.292
1, 0, 0	28.5	0	0	0	0
0, 1, 0	34.2	0.394	0.394	- 0.394	- 0.394
0, 0, 1	42.6	0.182	0.182	- 0.182	- 0.182
1, 1, 0	44.2	0.950	0.951	- 0.951	- 0.951
1, 0, 1	50.9	0.295	0.295	- 0.295	- 0.295
0, 1, 1	54.1	0.554	0.554	- 0.555	- 0.554
2, 0, 0	56.5	0.763	0.763	- 0.764	- 0.763
1, 1, 1	60.6	0.466	0.465	- 0.467	- 0.465
2, 1, 0	65.2	0	0	0	0

例 3 三维汽车模型的灵敏度分析和优化设计. 如图 3 所示的汽车模型, 在顶部阴影部分铺有吸声材料, 声阻抗为  $|Z|/\rho_0 c_0 = 37$ , 其他墙面为刚性壁. 声速  $c_0 = 340 \text{ m/s}$ , 空气密度  $\rho_0 = 1.21 \text{ kg/m}^3$ . 选取 4 个设计变量, 分别为  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  和  $d_4$ , 如图 4 所示, 其中  $d_1$  为所有顶面  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$

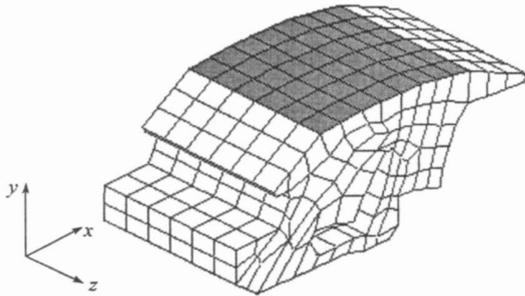


图 3 三维汽车模型

Fig. 3 3-D car model

和  $A_4$  上所有节点的  $y$  坐标值, 采用主从关系定义, 取  $A_2$  上的某点作为主节点, 其他面上的节点作为从节点, 从节点跟随主节点的变化而变化;  $d_2$  为侧面  $A_5$  上所有节点的  $z$  坐标值;  $d_3$  为侧面  $A_6$  上所有节点的  $z$  坐标值;  $d_4$  为面  $A_7$  上所有节点的  $x$  坐标值. 表 3 给出了前十阶特征频率相对于各设计变量的灵敏度计算结果.

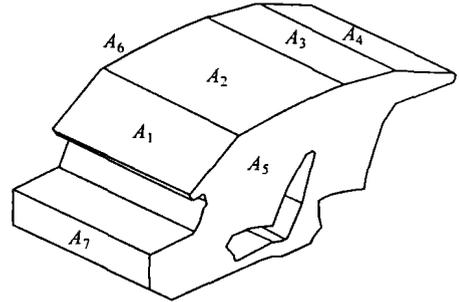


图 4 设计变量分布

Fig. 4 Distribution of design variables

表 3 特征频率及其灵敏度

Tab. 3 Eigenfrequencies and their sensitivities

模态阶数	$f / \text{Hz}$	特征频率灵敏度			
		$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
1	0	0	0	0	0
2	75.6	2.56	- 7.12	7.12	22.2
3	125.4	- 38.2	- 7.55	7.55	33.5
4	133.0	- 29.6	- 9.23	9.23	29.4
5	140.0	$2.16 \times 10^{-2}$	- 35.1	35.1	$2.14 \times 10^{-2}$
6	157.6	$7.20 \times 10^{-1}$	- 50.1	50.1	10.4
7	176.3	- 3.31	- 2.35	2.35	40.2
8	184.2	- 23.1	- 36.5	36.5	26.7
9	189.2	- 19.7	- 61.2	61.2	15.0
10	218.9	- 3.93	- 36.1	36.1	32.8

假设引起共振的频率为 140 Hz, 所以选取使第 5 阶频率  $f_5$  最大化作为目标函数, 同时又对第 2 第 4 和第 8 阶频率有严格的约束限制, 要求  $f_2$  不大于 75.0 Hz,  $f_4$  不大于 135.0 Hz,  $f_8$  不大于 185.0 Hz. 设计变量的上限和下限如表 4 所示.

优化结果见表 4, 第 5 阶频率从 140.0 Hz 升高到 146.0 Hz, 避开了共振频率, 达到了预期目的. 而约束条件也完全满足, 其中第 8 阶频率是作为紧约束. 设计变量中  $d_1$  和  $d_3$  增加了,  $d_2$  减小了, 而  $d_4$  则降到了下限.

表 4 优化数据和结果

Tab. 4 Results of design variables optimization

	$d_1 / \text{m}$	$d_2 / \text{m}$	$d_3 / \text{m}$	$d_4 / \text{m}$	$f_2 / \text{Hz}$	$f_4 / \text{Hz}$	$f_8 / \text{Hz}$	$f_5 / \text{Hz}$
初始值	0.15	1.20	0	3.62	75.59	133.0	184.2	140.0
上限值	0.30	1.30	0.10	3.80	75.0	135.0	185.0	
下限值	0	1.10	- 0.10	3.50				
优化值	0.27	1.12	0.08	3.50	74.25	128.4	185.0	146.0

## 4 结 论

本文给出了小阻尼界面封闭声场的有限元方程,计算结果与文献[3]相吻合.在求解特征频率灵敏度时,利用半解析方法计算了刚度阵、质量阵和阻尼阵的导数,并且用全局差分方法进行了校核,结果表明灵敏度分析具有很好的精度.最后对三维汽车模型的声场特性进行了边界形状优化,得到了满意的优化结果.

## 参考文献:

- [1] CRAGGS A. A finite element method for free vibration of air in ducts and rooms with absorbing walls [J]. *J Sound Vib*, 1994, **173**(4): 568-576
- [2] CRAGGS A. The free vibration of systems with proportional or light damping [J]. *J Sound Vib*, 1994, **170**(1): 130-139

- [3] EASWARAN V, CRAGGS A. On further validation and use of the finite element method to room acoustics [J]. *J Sound Vib*, 1995, **187**(2): 195-212
- [4] 赵越喆, 吴硕贤. 小阻尼界面房间声传输函数和声脉冲响应函数的有限元素法 [J]. *应用声学*, 2000, **19**(2): 24-30
- [5] GU Y X, ZHANG H W, GUAN Z Q. New generation software of structural analysis and design optimization—JIFEX [J]. *Struct Eng Mech*, 1999, **7**(6): 589-599
- [6] 张传立, 张系斌, 宋天霞. 结构动力形状优化中灵敏度分析的两种方法 [J]. *江汉石油学院学报*, 1994, **16**(4): 83-89
- [7] 顾元宪, 程耿东. 结构形状优化设计数值方法的研究和应用 [J]. *计算结构力学及其应用*, 1993, **10**(3): 321-335
- [8] 程耿东. *工程结构优化设计基础* [M]. 北京: 水利电力出版社, 1984

## Sensitivity analysis and design optimization of acoustic eigenfrequency for lightly damped cavities

CHEN Gang<sup>\*</sup>, ZHAO Guo zhong, GU Yuan xian

(State Key Lab. of Struct. Anal. for Ind. Equip., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China)

**Abstract** The design optimization of lightly damped cavities makes the more reasonable layout and improves the acoustic capability of the cavities. Based on the control differential equation and boundary conditions of three dimensional cavity acoustics, the numerical methods of finite element analysis, sensitivity calculation, and design optimization of the lightly damped cavity acoustic problems are studied. The sensitivity analysis and design optimization methods of eigenfrequencies with respect to shape parameters are applied to the interior noise problem for lightly damped cavities. The numerical methods have been implemented in the large-scale engineering finite element analysis and optimization software system—JIFEX. The examples verify the accuracy and efficiency of the finite element analysis, sensitivity analysis and design optimization method.

**Key words** sensitivity analysis; optimization; lightly damped cavities