

广义切线体积模量研究

李培勇, 杨庆*, 栾茂田

(大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 对三轴应力状态下的土体切线体积模量进行了研究. 考虑了常规三轴试验和各向同性压缩试验对切线体积模量的影响. 在胡克定律的基础上, 将体积功分为塑性体积功和弹性体积功, 并由此确定了常规三轴试验和各向同性压缩试验对切线体积模量的影响系数. 采用由两种试验得到的切线体积模量的值和影响系数, 就可以得到广义切线体积模量. 验算的结果表明广义切线体积模量的表达式更具代表性.

关键词: 广义切线体积模量; 体积功; 常规三轴试验; 各向同性压缩试验
中图分类号: TU411.3 **文献标识码:** A

0 引言

土的非线性弹性模型中比较具有代表性的为邓肯-张 (Duncan-Chang) 双曲线模型. 它能较好地反映土体的主要变形特性, 所采用参数具有比较明确的物理意义, 可由常规的三轴试验直接测定, 概念清楚, 易于理解, 因而在实际工程中得到了广泛的应用. 邓肯等于 1980 年在 $E-v$ 模型 (1970 年) 的基础上加以修改, 提出 $E-B$ 模型, 即以体积模量 B 代替泊松比 ν , 而保留原来的切线弹性模量 E_t . 其中假定体积模量 B 只与最小主应力 ϵ_3 有关, 从而使得参数整理变得简单、方便. 但大量试验资料显示, $E-B$ 模型中 $\log(B/p_a) - \log(\epsilon_3/p_a)$ 之间线性关系差, 参数 K, m 较难确定^[1]. Boscardin^[2] 于 1990 年对 $E-B$ 模型中存在的问题提出了修正方法, 即将由各向同性压缩试验得到的净侧限应力 ϵ_m 与体积应变 X 之间的关系, 用双曲线近似表示, 从而建立切线体积模量 B_t 与净侧限应力 ϵ_m 之间的方程式, 建议以 B_t 值代替 $E-B$ 模型中的体积模量. 一些学者还就邓肯-张模型存在的其他一些问题提出了相应的修正方法. 针对邓肯-张模型中没有考虑中主应力影响的缺陷, 目前主要提出了修正弹性模量、泊松比和修正摩尔-库仑准则这两大类方法^[3], 并有研究者采用真三轴试验弥补常规三轴试验的不足^[4].

针对邓肯-张模型无法反映土的剪胀性的局限, 出现了罗刚等^[5] 提出的将沈珠江双屈服面模型与邓肯-张模型相结合的能较好拟合粗粒土应力-应变关系的本构模型, 以及田树玉等^[11] 提出的简化双曲线模型等. 并有学者就多重势面模型与邓肯-张模型作了比较研究^[6-7].

本文在以往研究的基础上, 主要对邓肯-张 $E-B$ 模型中的切线体积模量进行研究, 综合考虑常规三轴试验和各向同性压缩试验对体积模量的影响, 提出广义切线体积模量, 以体现不同应力状态对切线体积模量的交叉影响.

1 $E-B$ 模型

Kondner 等认为大多数的应力应变曲线, 可以用双曲线近似地表示, 并具有可靠的精度. 切线弹性模量 E_t 随应力变化关系可表示为

$$E_t = \left[1 - \frac{R_f(1 - \sin \phi)(\epsilon_1 - \epsilon_3)}{2c \cos \phi + 2\epsilon_3 \sin \phi} \right]^2 K p_a \left(\frac{\epsilon_3}{p_a} \right)^n \quad (1)$$

式中: ϵ_1 和 ϵ_3 分别为大小主应力; c 为粘聚力; ϕ 为内摩擦角; K, n 为弹性模量参数; $R_f = (\epsilon_1 - \epsilon_3)_f / (\epsilon_1 - \epsilon_3)_{\lim}$, 为小于 1 的破坏应力比, 其中 $(\epsilon_1 - \epsilon_3)_f$ 为破坏应力差, $(\epsilon_1 - \epsilon_3)_{\lim}$ 为极限应力差; p_a 为大气压力. 通过式 (1) 可以计算任一应力 ϵ_3 和主应力差 $(\epsilon_1 - \epsilon_3)$ 条件下的切线模量 E_t 的近

似值.

常规三轴试验在保持 ϵ_3 不变的情况下,逐渐增加 $(\epsilon_1 - \epsilon_3)$,其平均法向应力的变化为 $\Delta p = (\epsilon_1 - \epsilon_3) / 3$,所以体积模量 B 可以表示为

$$B = \frac{\partial(\epsilon_1 - \epsilon_3)}{3\partial X} \tag{2}$$

邓肯等假定, B 与应力水平 $s = (\epsilon_1 - \epsilon_3) / (\epsilon_1 - \epsilon_3)_s$ 无关,即与 $(\epsilon_1 - \epsilon_3)$ 无关,它仅随 ϵ_3 而变化,对于相同的 ϵ_3 , B 为一常量. 根据这种假定,对于同一 ϵ_3 , 绘出的 $(\epsilon_1 - \epsilon_3) / 3 - X$ 关系曲线为一直线. 邓肯等取与应力水平 $s = 0.7$ 相应的点与原点连线的斜率作为平均斜率,即

$$B = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_3)_{s=0.7}}{3(X)_{s=0.7}} \tag{3}$$

对于不同的 ϵ_3 , B 也不同, 绘出 $\log(B / p_a)$ 与 $\log(\epsilon_3 / p_a)$ 的关系曲线,取直线,令其截距为 K_b , 斜率为 m , 则 B 与 ϵ_3 的关系可近似表示为

$$B = K_b p_a (\epsilon_3 / p_a)^m \tag{4}$$

2 B 值的修正

Marco 等为了克服 $E-B$ 模型中 B 值的一些限制,采用各向同性压缩试验来建立净侧限应力 ϵ_m 与体积应变 X 之间的双曲线方程式

$$\epsilon_m = \frac{B_i X}{1 - (X / X_i)} \tag{5}$$

式中: B_i 为初始切线体积模量; X_i 为极限体应变,即 X 的渐进线所对应值; ϵ_m 为净侧限应力^[2].

对于各向同性压缩试验,因为 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_m$,其体积应力为 $p = \epsilon_m$,所以其切线体积模量可表示为

$$B_t = \partial \epsilon_m / \partial X \tag{6}$$

对式 (5) 进行 X 的积分,可得切线体积模量的表达式

$$B_t = B_i \left[1 + \frac{\epsilon_m}{B_i X_i} \right]^2 \tag{7}$$

绘出 $\epsilon_m / X - \epsilon_m$ 的直线,其截距即为 B_i ,斜率的倒数为 X_i .

3 广义切线体积模量的建立

切线体积模量为体积应力 p 与体积应变 X 之比,其中 $p = (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) / 3$,对于三轴状态有 $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 = \epsilon_3$,因此可得

$$p = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_3) + 3\epsilon_3}{3} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{3} + \epsilon_3 \tag{8}$$

则有

$$B = \frac{\partial p}{\partial X} = \frac{\partial(\epsilon_1 - \epsilon_3)}{3\partial X} + \frac{\partial \epsilon_3}{\partial X} \tag{9}$$

对于式 (9) 存在两种特殊情况:

(1) 常规三轴试验情况,即 ϵ_1 变化, ϵ_3 不变,且 $(\epsilon_1 - \epsilon_3) > 0$. 有 $\partial \epsilon_3 / \partial X = 0$,则式 (9) 可变为

$$B = \frac{\partial(\epsilon_1 - \epsilon_3)}{3\partial X} \tag{10}$$

与式 (2) 相同,为常规三轴试验确定的切线体积模量.

(2) 各向同性压缩试验,即 $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_m$. 有 $\frac{\partial(\epsilon_1 - \epsilon_3)}{3\partial X} = 0$,则式 (9) 可变为

$$B = \frac{\partial \epsilon_3}{\partial X} = \frac{\partial \epsilon_m}{\partial X} \tag{11}$$

与式 (6) 相同,为各向同性压缩试验确定的切线体积模量.

可见由常规三轴试验和各向同性压缩试验确定的切线体积模量只是由式 (9) 确定的切线体积模量在不同应力状态下的特殊值,因此可将由式 (9) 确定的切线体积模量定义为土体的广义切线体积模量,即

$$B = \frac{\partial(\epsilon_1 - \epsilon_3)}{3\partial X} + \frac{\partial \epsilon_3}{\partial X} \tag{12}$$

比较式 (2) 和 (6) 可见,常规三轴试验和各向同性压缩试验确定的体积模量分别反映了剪切和压缩对体积模量的不同影响,即常规三轴试验主要反映剪切影响,各向同性压缩试验主要反映压缩影响. 所以广义切线体积模量可通过两种特殊情况下的体积模量来综合求得.

为反映两种试验对广义切线体积模量的不同影响,引入体积功,即体积应力在体积应变上所做的功,有

$$W_v = \int p dX \tag{13}$$

将式 (8) 代入式 (13) 可得

$$W_v = \int \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{3} dX + \int \epsilon_3 dX \tag{14}$$

当采用胡克定律的假定,剪应力不引起弹性体积应变时^[8],可认为剪应力对弹性体积应变做功为 0;压应力对塑性体积应变做功为 0,即

$$\int \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{3} dX = 0 \tag{15}$$

$$\int \epsilon_3 dX = 0 \tag{16}$$

所以式 (14) 可变为

$$W_v = \int \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{3} dX + \int \epsilon_3 dX \tag{17}$$

由上式可知, 体积功是由剪应力所做的塑性功和压应力所做的弹性功组成.

根据胡克定律的假定, 对于保持 ϵ_3 不变, 而施加 $(\epsilon_1 - \epsilon_3)$ 的常规三轴试验, 剪切所引起的体积变形可认为以塑性变形为主; 对于各向同性压缩试验, 试样总体上不受剪切影响, 根据胡克定律, 可认为所得体积应变以弹性变形为主. 因此, 常规三轴试验和各向同性压缩试验分别反映了不同性质的变形对体积模量的不同影响, 即常规三轴试验主要反映塑性变形, 各向同性压缩试验主要反映弹性变形. 由此可认为体积功中的塑性功可由常规三轴 (CT) 试验求得, 弹性功可由各向同性压缩 (IC) 试验求得, 即有

$$W_v = \int \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{3} dX + \int \epsilon_3 dX = \left[\int \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{3} dX \right]_{CT} + \left[\int \epsilon_m dX \right]_{IC} \tag{18}$$

令

$$W_{CT}^p = \left[\int \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{3} dX \right]_{CT}$$
$$W_{IC}^e = \left[\int \epsilon_m dX \right]_{IC}$$

则式 (18) 可变为

$$W_v = W_{CT}^p + W_{IC}^e \tag{19}$$

令 R_{CT} 表示塑性功在总体积功中所占比重, R_{IC} 表示弹性功在总体积功中所占比重, 则有

$$R_{CT} = \frac{W_{CT}^p}{W_v} \tag{20}$$

$$R_{IC} = \frac{W_{IC}^e}{W_v} \tag{21}$$

由式 (20) 和式 (21) 可知 $R_{CT} + R_{IC} = 1$, R_{CT} 和 R_{IC} 不仅反映了两种试验对总体积功的影响程度, 也可反映两种试验对广义切线体积模量的不同影响程度. 其值可通过 $(\epsilon_1 - \epsilon_3)/3-X$ 关系图和 ϵ_m-X 关系图确定, 如图 1 和图 2 所示. 将两种试验所做的功用三角形面积近似表示, 可得

$$R^p = \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OCD}} \approx R_{CT} \tag{22}$$

$$R^e = \frac{S_{\triangle OCD}}{S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OCD}} \approx R_{IC} \tag{23}$$

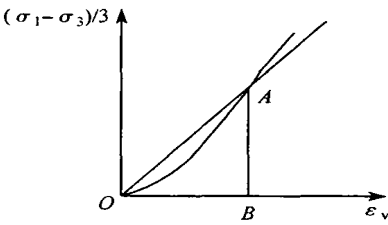


图 1 $(\epsilon_1 - \epsilon_3)/3-X$ 关系

Fig. 1 The relationship between $(\epsilon_1 - \epsilon_3)/3$ and X

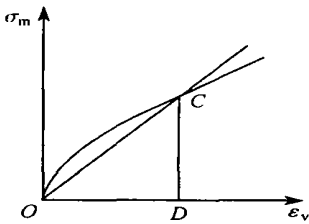


图 2 ϵ_m-X 关系图

Fig. 2 The relationship between ϵ_m and X

综上所述, 综合考虑常规三轴试验和各向同性压缩试验的广义切线体积模量的计算式为

$$\tilde{B} = R^p B_{CT} + R^e B_{IC} \tag{24}$$

式中: B_{CT} 为由常规三轴试验确定的体积模量值, 可由式 (3) 或式 (4) 求得; B_{IC} 为由各向同性压缩试验确定的体积模量值, 可由式 (7) 求得; R^p 和 R^e 为两种试验的影响系数. 计算 $\tilde{B}$ 值时, 可令两种试验中的压应力相等, 即 $\epsilon_3 = \epsilon_m$, 分别求出各自的体积模量和影响系数, 代入式 (24) 即可得到在特定侧限应力下的体积模量 $\tilde{B}$ 值. 本文采用文献 [2] 中的实验数据对 $\tilde{B}$ 计算公式进行验算. 结果显示, $\tilde{B}$ 值与式 (4) 和式 (7) 计算值相比, 具有更大的适应性, 可适用于两种试验结果. 同时, 验算结果显示, 随着压应力的增大, B_{IC} 对 $\tilde{B}$ 的影响程度不断增大, 当压应力达到一定值时, 便超过剪应力的影响, 成为体积模量的主要影响因素, 如表 1 和 2 中所示在 95% 密实状态下的两种土的验算结果.

表 1 砂土 (SW) 的验算结果

Tab. 1 The verified result of a well-grade sand

$\epsilon_3 (\epsilon_m)$	B_{CT}	B_{IC}	R_{CT}	R_{IC}	$\tilde{B}$
0.035	10.87	10.84	0.82	0.18	10.86
0.104	25.97	21.22	0.67	0.33	24.40
0.207	45.03	43.12	0.53	0.47	44.13
0.311	62.37	73.04	0.47	0.53	68.03

表 2 砂质粉土 (ML) 的验算结果
Tab. 2 The verified result of a sandy silt M Pa

$e_3(e_m)$	B_{CT}	B_{IC}	R_{CT}	R_{IC}	$\tilde{B}$
0.035	5.94	6.22	0.76	0.24	6.00
0.104	11.41	9.06	0.58	0.42	10.42
0.207	17.24	14.28	0.33	0.67	15.26
0.311	22.01	20.74	0.23	0.77	21.03

式 (24) 可进一步推广,由各向同性压缩试验确定的体积模量 B_{IC} 可采用 Naylor^[9] 建议的切线体积模量 K_t 来代替. Naylor 认为 K_t 是 p 的线性函数,有

$$K_t = K_i + \tau_k p \tag{25}$$

式中: K_i 为初始体积变形模量, τ_k 为试验参数,此时影响系数的确定方法与上相同. 对于不同种类、不同状态的土,可视具体情况选用 B_t 或 K_t .

4 结 论

广义切线体积模量 $\tilde{B}$ 计算公式的建立是对以往采用一种试验方法确定体积模量值的修正与发展. 公式推导理论上合理、可行,各项参数都具有明确意义,可用三轴试验直接得出. 由于综合考虑两种试验确定 $\tilde{B}$ 值,使 $\tilde{B}$ 值更接近土体真实值,并能反映不同应力状态对切线体积模量的交叉影

响,因此适用于绝大多数土,更具代表性.

参考文献:

[1] 田树玉,孟宪麒. 土的非线性分析简化双曲线模型 [J]. 水利学报,1994, 9: 54-59

[2] BOSCARDIN M D. Hyperbolic parameters for compacted soils [J]. J Geotech Eng, 1990,116(1): 88-114

[3] 孔德志,朱俊高. 邓肯-张模型几种改进方法的比较 [J]. 岩土力学,2004, 25(6): 971-974

[4] 邱斌,徐志伟. 中主应力对邓肯-张模型影响的真三轴试验研究 [J]. 岩土工程技术,2002(1): 45-47

[5] 罗刚,张建民. 邓肯-张模型和沈珠江双屈服面模型的改进 [J]. 岩土力学,2004, 25(6): 887-890

[6] 介玉新,胡 韬,李广信,等. 平面应变情况下多重势面模型与邓肯-张模型的比较 [J]. 工程力学,2004, 21(1): 148-152

[7] 介玉新,刘 正,李广信,等. 基于应力空间的多重势面模型及其与邓肯-张模型的比较 [J]. 岩土力学,2004, 25(增 2): 7-12

[8] 钱家欢,殷宗泽. 土工原理与计算: 第 2 版 [M]. 北京: 中国水利水电出版社,1996

[9] YIN Z Z. A constitutive model with two yield surfaces for soils [C] // Proceedings of 6th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics. Innsbruck [s n], 1988

Study of generalized tangent bulk modulus

LI Pei yong , YANG Qing* , LUAN Mao tian

(State Key Lab. of Coastal and Offshore Eng. , Dalian Univ. of Technol. , Dalian 116024, China)

Abstract Tangent bulk modulus of soil in the triaxial state of stress was researched. The different influences on tangent bulk modulus of conventional triaxial test and isotropic compression test were considered. On the basis of Hooke's law, volume work is divided into plastic volume work and elastic volume work and then the influence coefficients on tangent bulk modulus of two kinds of triaxial tests were calculated. Using the values of tangent bulk modulus from two types of triaxial tests and the influence coefficients, the generalized tangent bulk modulus could be acquired. The results of verification show that generalized tangent bulk modulus is more typical and reliable.

Key words generalized tangent bulk modulus; volume work; conventional triaxial test; isotropic compression test