

有限覆盖点插值无网格方法及其应用

樊成^{*1,2}, 栾茂田^{1,2}, 杨庆^{1,2}

(1.大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;

2.大连理工大学 土木水利学院 岩土工程研究所, 辽宁 大连 116024)

摘要: 数值流形方法能够统一地处理连续与非连续变形问题,有限覆盖技术是这种方法的核心.无网格方法的前处理比较简单,点插值法是其中的一种计算格式.为此,将有限覆盖技术与点插值方法相结合发展了有限覆盖点插值无网格方法,从而综合了数值流形方法与点插值方法的各自优点,能够有效地处理非连续性问题.在简要阐述了该方法基本原理的基础上,对其进行了分片检验和曲线拟合试验,由此证明了这种方法的收敛性,同时表明由这种方法所构造的形函数具有 Kronecker W -函数属性,曲线拟合精度较高.

关键词: 有限覆盖; 无网格; 有限覆盖点插值法; Kronecker W -函数属性

中图分类号: TU311.4 **文献标识码:** A

0 引言

无网格法是最近发展起来的数值计算方法,多数研究主要集中在插值函数理论及其构造方法上.目前应用较为广泛的无网格方法包括光滑质点流体动力学(smooth particle hydrodynamics, SPH)法^[1]、扩散单元法(diffuse element method, DEM)、无网格伽辽金法^[2-3](element free Galerkin methods, EFGM)和有限覆盖无单元法^[4]等.

点插值无网格理论最初由 Liu 和 Wang 等提出^[5-6],在这种方法中,逼近函数通过影响域中的每个点,形函数具有 W -函数的性质;此时用点插值理论所构造的形函数比用滑动最小二乘法构造的形函数简单;另外形函数及其导数易于确定.由石根华所提出的数值流形方法^[7]能够从数学上统一地表述材料连续与非连续性问题,插值子域的形状是规则的,且是固定不变的,连续与非连续问题的插值构造形式是统一的,因此可以将连续与非连续问题的计算分析统一起来.

然而数值流形方法和无网格方法本身还存在

一定的缺陷与限制^[8-9].双重网格特征既是数值流形方法的优点,同时也使得前处理过程更为复杂.在无网格方法中,插值子域不能通过非连续面,尤其当非连续面极为不规则时,会因插值子域极其不规则而使得插值过程无法进行,同时需要对边界条件进行特殊处理.为有效地利用数值流形方法与无网格方法的优点,并克服两者的不足,田荣^[4]提出了有限覆盖无单元法,实现了无单元理论下连续与非连续问题的统一求解,其不足之处是基于多重权滑动最小二乘法构造的形函数同样不具有 Kronecker W -函数性质,不便于本征边界条件的处理.因此本文将数值流形方法的有限覆盖与点插值理论相结合,建立与构造有限覆盖点插值方法,所构造的试函数具备插值特性,使得位移边界条件的处理像有限元一样容易,易于编程实现;最后对这种方法进行分片检验及算例分析.

1 有限覆盖点插值方法基本原理

将数值流形方法中的有限覆盖概念和无网格

收稿日期: 2005-06-06; 修回日期: 2007-05-22.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172022); 教育部跨世纪优秀人才培养计划研究基金资助项目(教技函[1999]2号).

作者简介: 樊成*(1976-),男,博士生, E-mail fan76cheng@163.com; 栾茂田(1962-),男,博士,教授,博士生导师, E-mail mluan@dlut.edu.cn; 杨庆(1964-),男,博士,教授,博士生导师, E-mail qyang@dlut.edu.cn.

方法中的点插值理论相结合,在无网格方法的框架下统一地构造连续和非连续问题的插值函数.

1.1 有限覆盖原理

作为流形方法中的核心,有限覆盖技术用有限个相互重叠的数学覆盖涵盖整个求解域,形成一个有限数学覆盖系统,用每个数学覆盖上所定义的局部函数表达系统的总体形状函数.进而这个有限数学覆盖系统又可能被求解域边界和域内非连续界面切割成不同的物理网格,形成一个有限物理覆盖系统,其中一个数学覆盖可能被重分成 2 个或多个物理覆盖.材料的非连续性越强,一个数学覆盖形成的物理覆盖越多.

数学覆盖限定了插值域,决定了近似解的精度;物理覆盖定义了求解的积分区域.图 1 示意地给出了数学覆盖剖分成物理覆盖的过程.

本文采用的数学覆盖形状为规则的圆,目前在流形方法中,一般采用有限元网格直接作为有限覆盖系统中的数学覆盖,通常形状为多边形.虽然有限覆盖技术与流形方法在理论上可以采用任意形状的图形作为数学覆盖,但当覆盖形状比较特殊时,不同覆盖的重叠部分可能是极其不规则的几何形状,从而造成数值积分的困难.例如,当应用圆形数学覆盖时,覆盖相交部分所形成的用于数值积分的不规则的曲边流形单元,在计算中常规的插值函数构造方法和单纯形积分方法可能不再适用.

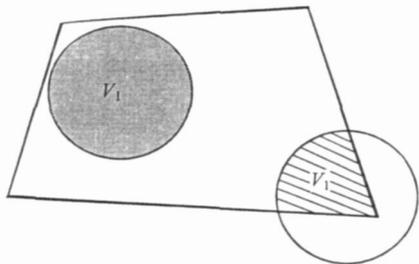


图 1 有限覆盖原理

Fig. 1 Finite covers used in the analyses

1.2 有限覆盖点插值形函数构造

假设 x_Q 为求解域内的任意点,在其邻近有 n_k 个物理覆盖能够覆盖此点.将所有涵盖点 x_Q 的物理覆盖 C 的集合定义为点 x_Q 的“物理覆盖集”.在域内任意点 $x_Q \in \bigcup_{C \in M} C$ 处场函数的局部逼近函

数为

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^{n_k} B_i(x) a_i(x_Q) = \mathbf{B}^T(x) \mathbf{a}(x_Q) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{B}(x)$ 是关于空间位置 $\mathbf{x}^T = (x \ y \ z)$ 的基函数, \mathbf{a} 为系数向量,在二维情况下,

$$\mathbf{B}^T(x) = (1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ y^2 \ \cdots \ x^n \ y^n) \quad (2)$$

$$\mathbf{a}^T(x_Q) = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{n_k}) \quad (3)$$

当根据点 x_Q 处各个物理覆盖上的函数在该点的取值 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_Q)|_{x_Q \in C_i}$ 构造点 x_Q 的插值函数时,每个物理覆盖均应满足方程(1),即

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}^T(x_i) \mathbf{a}; \quad i = 1, \dots, n_k \quad (4)$$

若将所有 n_k 个物理覆盖处的场函数所形成的集合定义为向量 \mathbf{U}_s ,即式(4)可写成下列矩阵形式:

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{B}_Q \mathbf{a} \quad (5)$$

式中 \mathbf{B}_Q 为插值函数矩阵,通常称为矩矩阵(moment matrix),

$$\mathbf{U}_s^T = (\mathbf{u}_1^T \ \mathbf{u}_2^T \ \cdots \ \mathbf{u}_{n_k}^T)^T \quad (6)$$

$$\mathbf{B}_Q^T = (\mathbf{B}(x_1) \ \mathbf{B}(x_2) \ \cdots \ \mathbf{B}(x_{n_k}))^T \quad (7)$$

若假定矩矩阵 \mathbf{B}_Q 是非奇异的,则由式(5)可得

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}_Q^{-1} \mathbf{U}_s \quad (8)$$

将式(8)代回到式(1),则有

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^{n_k} Q_i(x) u_i \quad (9)$$

或者写成下列矩阵形式

$$u^h(x, x_Q) = \Phi(x) \mathbf{U}_s \quad (10)$$

其中 $\Phi(x)$ 为形函数矩阵,

$$\Phi(x) = \mathbf{B}^T(x) \mathbf{B}_Q^{-1} = (Q_1(x) \ Q_2(x) \ \cdots \ Q_{n_k}(x)) \quad (11)$$

形函数 $\Phi(x)$ 的第 l -阶导数为

$$\Phi^{(l)}(x) = \mathbf{B}^{T(l)}(x) \mathbf{B}_Q^{-1} = (Q_1^{(l)}(x) \ Q_2^{(l)}(x) \ \cdots \ Q_{n_k}^{(l)}(x)) \quad (12)$$

由上述推导过程可知,形函数矩阵 $\Phi(x)$ 中的各个形函数 $Q_i(x)$ 具有下列单位分解性质

$$\sum_{i=1}^{n_k} Q_i(x) \equiv 1 \quad (13)$$

由此表明上述插值函数包含了刚性位移.

在无网格 Galerkin 方法中,构造形函数时要用权函数且权函数的选取对计算结果非常重要.而在本文插值构造过程中没有用到权函数或者说

每个物理覆盖处的权函数为 1,简化了计算过程.

采用有限覆盖技术时,数学覆盖半径 d_r 取为

$$d_r = \tau_s d_c \quad (14)$$

式中: τ_s 为数学覆盖的量纲一因子; d_c 是任意点 x_0 附近点的特征长度. 若离散点是均匀分布的,则 d_c 取为相邻两点之间的距离;若离散点是非均匀分布的,则 d_c 为 x_0 附近离散点间的平均距离.

在实际应用中,采用不同的基函数,就会形成不同的有限覆盖点插值方法. 例如,若取多项式中的各项作为基函数,则由此所形成的数值分析方法称为有限覆盖单项式点插值方法.

2 算例分析

2.1 形函数及其导函数的数学特性

为了有效地处理边界条件,必须了解形函数的基本性质. 若形函数不具备 Kronecker δ -函数性质,则位移边界条件必须采用特殊的技术与方法进行处理^[9].

例如在区间 $[-2, 2]$ 均匀分布 5 个数学覆盖节点,依次从 1 到 5 编号,采用单项式基函数. 图 2 和图 3 分别考查了中间节点 3 和边界节点 5 的形

函数及其一阶导数. 由图可见,有限覆盖点插值法的形函数具有很好的局部特性,无论中间节点 3 和边界节点 5 的各自形函数均具有 Kronecker δ -函数的性质,且其一阶导数是处处光滑连续的.

2.2 曲线拟合试验

以函数 $f(x) = x + \sin x \cos x$ 在区间 $[-2.5, 2.5]$ 上的拟合问题为例,考查采用上述方法对函数进行曲线拟合的可能性. 首先在区间给定一组离散点,并确定每个离散点上的真实函数值,然后采用上述有限覆盖点插值法计算各点的形函数,最后通过各点的形函数进行拟合. 拟合结果如图 4 和图 5 所示. 由图可见函数 $f(x)$ 及其导数的拟合曲线非常光滑,拟合曲线与目标曲线非常接近,表明有限覆盖点插值方法能够精确地拟合任意曲线.

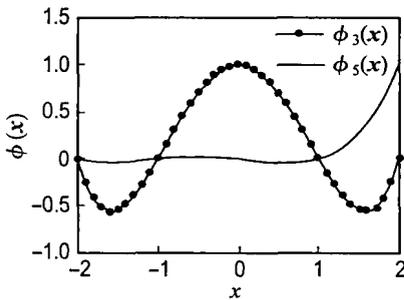


图 2 节点 3 和节点 5 的形函数

Fig. 2 The shape functions of node 3 and node 5

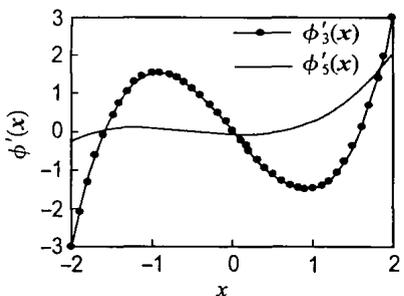


图 3 节点 3 和节点 5 形函数的一阶导数

Fig. 3 The first-order derivatives of the shape functions of node 3 and node 5

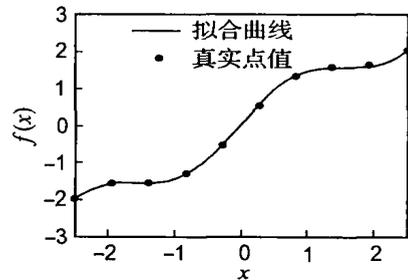


图 4 关于函数 $f(x) = x + \sin x \cos x$ 的拟合曲线

Fig. 4 The fitting curve of the function $f(x) = x + \sin x \cos x$

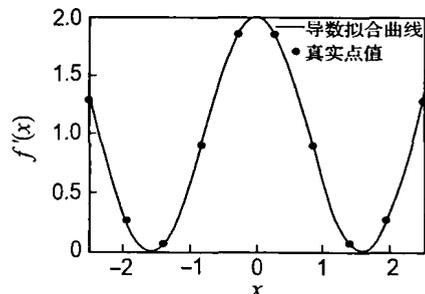


图 5 关于函数 $f(x) = x + \sin x \cos x$ 的一阶导数的拟合曲线

Fig. 5 The fitting curve of the first-order derivative of the function $f(x) = x + \sin x \cos x$

2.3 分片检验

为了论证数值计算方法的收敛性,必须进行分片检验. 具体地,对于有限元方法,当离散单元无限小时,对于点插值方法,当离散点的空间距离无限小时,数值解收敛于其真实解. 分片检验是考查数值计算的基本要求. 为此本文对所建议的有限覆盖点插值方法按照离散点均匀分布与非均匀分布两种方式进行分片检验. 如图 6 所示,两种检验方式中单元的几何尺寸均为 2×2 , 材料的弹性模量与泊松比分别为 $E = 2 \text{ GPa}, \nu = 0.2$ 对于平面应力情况,在全部边界上施加线性位移分布条件 $(u \ v) = (0.45x \ 0.45y)$. 当不考虑体力时,计算结果列于表 1. 由此可见,有限覆盖点插值方法能通过分片检验,即求解域内任意点的位移解与边界条件相同,且应力与应变为常量.

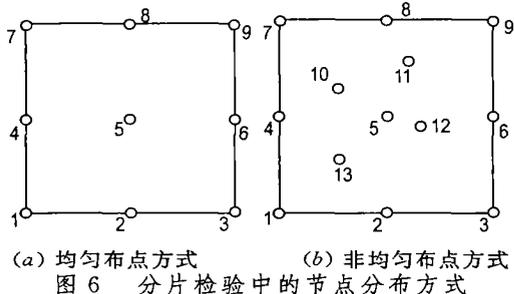


Fig. 6 The nodal distribution modes in the patch tests

表 1 计算所得到的域内不规则节点位移与应力

Tab. 1 The computed nodal displacements and stresses

| 节点 | 坐标 | u | v | e_x | e_y |
|----|--------------|---------|---------|---------|---------|
| 9 | (2, 2) | 0 | 0.900 0 | 1.125 0 | 1.125 0 |
| 10 | (0.55, 1.31) | 0.247 5 | 0.589 5 | 1.125 0 | 1.125 0 |
| 11 | (1.21, 1.57) | 0.544 5 | 0.706 5 | 1.125 0 | 1.125 0 |
| 12 | (1.33, 0.89) | 0.598 5 | 0.400 5 | 1.125 0 | 1.125 0 |
| 13 | (0.56, 0.55) | 0.252 0 | 0.247 5 | 1.125 0 | 1.125 0 |

2.4 受弯矩作用的悬臂梁

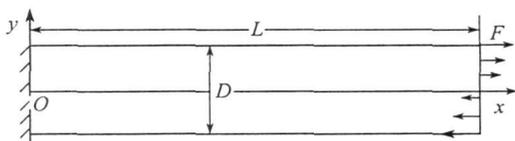
如图 7 所示,以自由端部受弯矩作用下的悬臂梁作为算例. 采用点插值法时的计算模型如图 7(b) 所示.

计算中梁的长度与厚度分别为 $L = 8 \text{ m}$ 与 $D = 1 \text{ m}$; 端部截面上三角形分布荷载的最大集度为 $F = 3 \text{ Pa}$, 梁材料的弹性模量与泊松比分别为 $E = 100 \text{ MPa}$ 与 $\nu = 0.25$. 对于该问题,由弹性理论^[10] 所得到的位移与应力解分别为

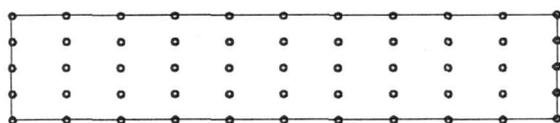
$$u = \frac{M}{EI}xy, \quad v = -\frac{M}{EI}(x^2 + \nu y^2) \quad (15a)$$

$$e_x = \frac{My}{I}, \quad e_y = f_y = 0 \quad (15b)$$

式中: $I = D^3/12$, 为截面的惯性矩; M 是截面弯矩. 图 8 给出了计算所得到的中性轴挠度及 $x = 4 \text{ m}$ 处横截面上的应力,并与用无网格 Galerkin 法^[11] 的计算结果进行了对比,由此可见本文数值解具有较高的计算精度.



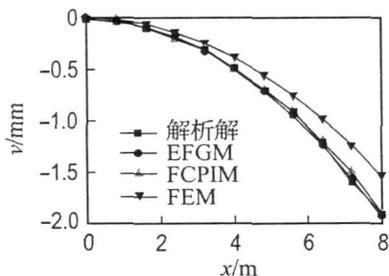
(a) 弯矩作用下的悬臂梁



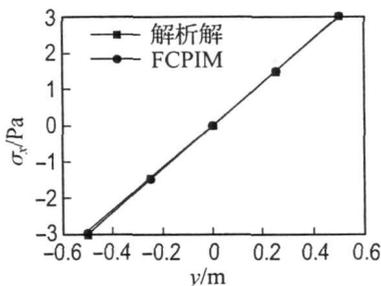
(b) 点插值方法计算模型

图 7 受弯悬臂梁及其计算模型

Fig. 7 The cantilever beam under moment loading and its computational model



(a) 中和轴处的挠度



(b) $x = 4 \text{ m}$ 处横截面上的水平应力

图 8 数值计算结果及其与现有解的对比

Fig. 8 Comparison of the computed results with other available solutions

2.5 裂纹扩展过程数值模拟分析

2.5.1 裂纹断裂准则 常用的裂纹断裂判断准则有:最大周向拉应力理论准则,最大周向拉应变理论准则,最大能量释放率理论准则等. 本文以由 Ergogan和薛明昌提出来的最大周向拉应力理论准则作为裂纹扩展的判据. 其基本假设为

- ① 裂纹沿周向应力 σ_{θ} 最大值方向扩展;
- ② 裂纹开始扩展的判据是 $\sigma_{\theta_{max}}$ 达到临界值. 其开裂判据表达式为

$$\cos \frac{\theta}{2} \left[K_{I} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] = K_{\theta_c}$$

式中: K_I 和 K_{II} 分别为 I型和 II型裂纹应力强度因子; K_{θ_c} 为材料的断裂韧度; θ 为裂纹扩展角度,其意义如图 9所示.

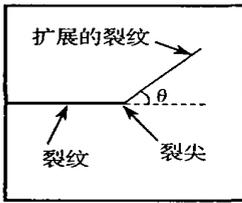


图 9 裂纹扩展角度

Fig. 9 The crack propagation angle

裂纹扩展的方向角由下式确定:

$$K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) = 0$$

通过求解上式可得到裂纹的起裂角

$$\theta = 2 \arctan \left[\frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right]$$

2.5.2 三点弯曲梁数值模拟分析计算 考虑如图 10所示三点弯曲梁试件. 试件长 $L = 3.0 \text{ m}$, 高 $h = 0.6 \text{ m}$, 裂纹长为 0.3 m . 梁材料的弹性模量 $E = 1 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$. 承受集中荷载的作用, $P = 200 \text{ kN}$, 不计自重, 模拟裂纹扩展路径情况, 计算节点分布如图 11所示. 裂纹扩展计算结果如图 12所示, 图 13为三点弯曲梁变形图, 为便于对比分析, 图 14给出了数值流形法计算结果, 由图可见本文计算结果与已知解吻合程度很

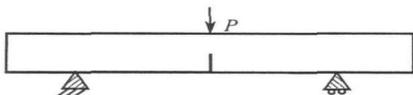


图 10 三点弯曲梁试件

Fig. 10 Single edge notch beam in 3 point bending.

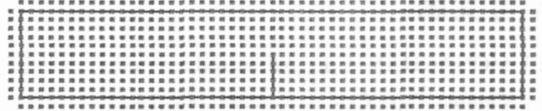


图 11 节点布置图

Fig. 11 Node arrangement

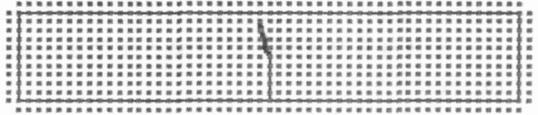


图 12 裂纹扩展最终结果

Fig. 12 The final result of crack propagation

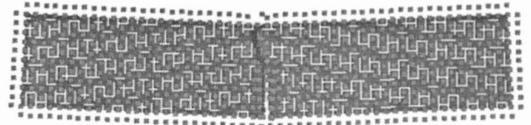


图 13 裂纹扩展变形图

Fig. 13 The deformation of crack and beam

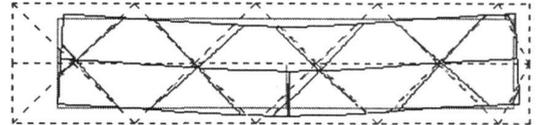


图 14 数值流形法计算结果^[4]

Fig. 14 The computed result of MM^[4]

好, 证明本文方法在求解裂纹扩展等非连续变形问题中可行, 所得结果是可靠的.

3 结 论

本文将数值流形方法中的有限覆盖技术与无网格中的点插值技术相结合建立了有限覆盖点插值无网格方法, 采用这种方法构造形函数过程简单, 形函数求导中无需逆矩阵求导, 前处理过程简便, 提高了计算效率. 由此所构造的形函数具有 Kronecker δ -函数性质, 易于处理位移边界条件. 这种方法能够较精确地拟合任意曲线, 且成功地通过了分片检验, 保证了数值解的收敛性. 数值算例分析初步表明, 这种有限覆盖点插值无网格方法是一种具有相当计算精度和计算效率的数值计算方法, 同时根据有限覆盖技术的特点, 这种方法能够有效地应用于裂纹扩展等非连续变形分析中.

参考文献:

- [1] MONAGHAN J J. An introduction to SPH [J]. *Comput Phys Commun*, 1988, **48**: 89-96
- [2] BELYTSCHKO T, LIU Y, GU L. Element free Galerkin methods [J]. *Int J for Numer Methods in Eng*, 1994, **37**: 229-256
- [3] 庞作会, 葛修润, 郑宏, 等. 一种新的数值方法——无网格伽辽金法 [J]. *计算力学学报*, 1999, **16**(3): 320-329
- [4] 田荣. 连续与非连续变形分析的有限覆盖无单元方法及其应用研究 [D]. 大连: 大连理工大学, 2000
- [5] LIU G R, GU Y T. A point interpolation method for two-dimensional solids [J]. *Int J for Numer Methods in Eng*, 2001, **50**: 937-951
- [6] WANG J G, LIU G R. A point interpolation meshless method based on radial functions [J]. *Int J for Numer Methods in Eng*, 2002, **54**: 1623-1648
- [7] 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析 [M]. 裴觉民, 译. 北京: 清华大学出版社, 1997
- [8] 王水林, 葛修润. 流形元法在模拟裂纹扩展中的应用 [J]. *岩石力学与工程学报*, 1997, **16**(5): 405-410
- [9] 王卫东, 赵国群, 栾贻国. 无网格方法中本质边界条件的处理 [J]. *力学季刊*, 2002, **23**(4): 521-527
- [10] 徐秉业. 弹性力学与塑性力学解题指导及习题集 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1985
- [11] 庞作会. 基于节理网络模型的岩体 REV 数值估算与无网格伽辽金法 (EFGM) [D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 1998

Element-free point-interpolation procedure based on finite covers and its application

FAN Cheng^{* 1,2}, LUAN Mao tian^{1,2}, YANG Qing^{1,2}

(1.State Key Lab. of Coastal and Offshore Eng., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China;

2.Inst. of Geotech. Eng., School of Civil and Hydraul. Eng., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China)

Abstract Numerical manifold method can solve both continuous and discontinuous deformation problems in a unified mathematical formulation. The finite cover is the essential technique in this method. The element-free methods have a relative simple pre-treatment process. The point-interpolation procedure is one of the element-free methods. So the finite cover technique and point-interpolation method are integrated together to develop an element-free point-interpolation procedure based on finite covers which takes both advantages of these two types of numerical methods. The fundamental theory of this procedure is illustrated. Then it is shown that the convergence can be guaranteed by the patch test. As an example, curve-fitting test is conducted and it is shown that the shape functions constructed by the proposed method can display the property of Kronecker δ -function and the curve fitted by the procedure has a higher accuracy.

Key words finite covers; element-free/meshless; point-interpolation procedure based on finite covers; property of Kronecker δ -function