

扁桁架结构稳定分析几何非线性临界点-欧拉理论

孙焕纯*, 王跃方, 刘春良

(大连理工大学 工程力学系, 辽宁 大连 116024)

摘要: 研究了扁桁架结构的稳定性问题,提出了中等扁度桁架稳定分析的几何非线性临界点-欧拉理论. 引入杆件应变能密度为1的条件,以欧拉稳定条件为约束,在精确的变形-位移下构造了高精度的迭代方法,准确地求解了杆件截面积和内力的稳定临界解. 给出了数值例题,说明了该理论的有效性,并对已有的各种稳定性分析理论进行了评述.

关键词: 稳定理论; 扁桁架; 几何非线性; 临界点理论; 欧拉理论

中图分类号: O343 **文献标识码:** A

0 引言

现有的两个扁桁架结构的稳定分析理论^[1,2],一为几何非线性临界点理论,适用于高荷载、大截面的特扁桁架;二为几何非线性欧拉理论,适用于小扁度和低荷载、小截面的大扁度扁桁架,而对中等扁度,例如高跨比在1/40~1/80的扁桁架,这两个理论都不适用. 本文将上述两个理论结合起来,提出几何非线性临界点-欧拉理论,可用来分析中等扁度桁架的稳定性问题,并在大扁度、大截面和高荷载的条件下自动归结为几何非线性临界点理论,在小扁度且截面积由欧拉稳定条件决定时自动归结为几何非线性欧拉理论.

1 几何非线性临界点-欧拉理论的求解方法

首先叙述几何非线性临界点-欧拉理论的求解过程:

(1) 根据桁架结构的原始几何尺寸和给定杆件的初始截面,用线性平衡方程求得内力向量 $\dot{N} = (\dot{N}_1 \ \dot{N}_2 \ \dots \ \dot{N}_n)^T$, n 为杆件数.

(2) 用杆件 K (K 为杆件号码) 的应变能密度为1的稳定条件^[2]

$$\dot{A}_K = \frac{\lambda}{2Ed} |\dot{N}_K|$$

修正杆件的截面积,其中 λ 为未知的可变参数,每给定一 λ 值即可确定一个稳定解,但并非临界解,按黄金分割法给出一系列 λ 的值,从而得到一系列解,其中对应于结构重量最小的一个解,即为 λ 的临界解,相应的 λ 记为 λ_c (区别于临界荷载的临界稳定系数).

(3) 用胡克定律求得各杆的变形量 $\dot{W}_K = \dot{N}_K l_K / EA_K$,但对超静定问题,只计算与自由度数 M 相同个数的杆件的 \dot{W}_K ,记为 \dot{W}_{K_1} ,其余杆件的变形量(记为 \dot{W}_{K_2})先不计算,将用第(5)步中的方法求出. 根据胡克定律求出新的 $\dot{N}_{K_2} = \dot{W}_{K_2} EA_{K_2} / l_{K_2}$.

(4) 用 \dot{W}_{K_1} (共 M 个) 求出各节点的位移 u_i, v_i, w_i ($i = 1, 2, \dots, M$), 得到节点的位移向量 $\dot{U} = (U_1 \ U_2 \ \dots \ U_M)^T$. 方法是先算出各 K_1 杆变形后的长度 $l'_{K_1} = l_{K_1} + \dot{W}_{K_1}$, 又因

$$l'_{K_1} = \sqrt{\Delta \bar{x}_{ij}^2 + \Delta \bar{y}_{ij}^2 + \Delta \bar{z}_{ij}^2}$$

$$\Delta \bar{x}_{ij} = x_i + u_i - (x_j + u_j)$$

$$\Delta \bar{y}_{ij} = y_i + v_i - (y_j + v_j)$$

$$\Delta \bar{z}_{ij} = z_i + w_i - (z_j + w_j)$$

i, j 分别为 K_1 杆的右、左端节点的序号,这样共有 M 个 l'_{K_1} 的表达式,可解出 M 个位移分量 U_1, U_2, \dots, U_M . 这里 l'_{K_1} 与位移分量的关系式就是变形与位移关系的精确几何方程式.

收稿日期: 2005-10-20; 修回日期: 2007-06-30.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10421202; 10332010); 大连理工大学“211工程”资助项目(2004).

作者简介: 孙焕纯*(1927-),男,教授,博士生导师.

(5) 在变形后的几何构形下建立待定的内力 N_{K_1} (共 M 个) 的平衡方程式:

$$\sum_{\mathcal{F}_1 V_i} N_{K_1} \Delta \bar{x}_{ij}' \backslash I'_{K_1} = P_{x_i} - \sum_{\mathcal{F}_2 V_i} N_{K_2} \Delta \bar{x}_{ij}' \backslash I'_{K_2} \quad (1)$$

$$N_{K_2} = W_{K_2} A_{K_2} E \backslash K_{K_2} \quad (2)$$

$$W_{K_2} = \frac{1}{\Delta \bar{x}_{ij}'^2 + \Delta \bar{y}_{ij}'^2 + \Delta \bar{z}_{ij}'^2} - l_{K_2} \quad (3)$$

W_{K_2} 右端式的各坐标差中的位移分量都是已知的;

$1V_i$ 为与节点 i 相连接的待定内力为 N_{K_1} 的杆件杆号的集合; $2V_i$ 为与节点 i 相连接的已知内力为 N_{K_2} 的杆件杆号的集合; $-\sum_{\mathcal{F}_2 V_i} N_{K_2} \Delta \bar{x}_{ij}' \backslash I'_{K_2}$ 实际上是已知内力杆的内力化成的 i 节点 x 方向的外力. 同样, 在 i 节点上还有 y, z 方向的两个平衡方程, 共有 M 个平衡方程可解出 M 个内力 N_{K_1} .

(6) 解第 (5) 步中的平衡方程, 求得待定的内力向量 $\mathbf{N} = (N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n)^T$, 其中包括已知的 $n - M$ 个内力分量和截面积向量 $\mathbf{A} = (A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n)^T$.

(7) 检查是否 $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}^0\| \leq \delta$ 是则计算结束, 否则令 $\mathbf{N} \leftarrow \mathbf{N}^*$ 转 (1).

这个解法过程是作者独立开发的, 解法简单、有效、精度高.

如果将第 (2) 步中的应变能密度为 1 的稳定条件代以圆杆的欧拉稳定条件

$$A_{K_2} = 2K_2 \frac{1}{\|\mathbf{N}_{K_2}\|} \sqrt{\pi E} \text{ (压杆)} \quad (4)$$

$$A_{K_2} = N_{K_2} / [e] \text{ (拉杆)} \quad (5)$$

或以位移约束条件修正拉杆的 A_{K_2} , 上述解法就变成几何非线性欧拉稳定理论的解法.

应当指出: 当求解一给定问题时, 为节省计算工作量, 不论高跨比是多大, 应先用欧拉稳定理论求解. 如果求得了解, 那么就是该问题的稳定临界解. 如果欧拉解不存在, 只在迭代的最初几步就可以知道, 并不浪费多少时间, 再用临界点理论求解; 如果得到了解, 再检查每个截面是否符合欧拉稳定条件, 如符合, 则为该问题的稳定临界解, 如有部分杆违反欧拉条件, 就要用欧拉稳定条件对该部分杆件的截面进行修正, 并进行迭代计算. 在每次迭代时, 对违反欧拉稳定条件的杆用欧拉

条件修正截面, 对不违反欧拉稳定条件的杆件仍应用应变能密度为 1 的稳定条件修改杆件截面, 直到满足收敛条件求得稳定临界解为止. 这就是本文的几何非线性临界点-欧拉理论的解法. 最终, 肯定可由欧拉理论、临界点理论和临界点-欧拉理论中求得扁桁架的一个稳定临界解.

2 算 例

例 1 30 杆空间屋顶桁架示于图 1 (文献 [2]), 各节点坐标见表 1. 该桁架是 6 重对称的, 自垂直平面 xOz 开始, 顺时针绕 Oz 轴每旋转 60° 即得一垂直对称面. 共有 4 类杆件, 其杆件序号见表 2.

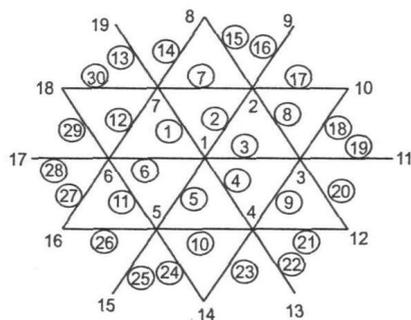


图 1 30 杆空间屋顶桁架

Fig. 1 30-Bar space roof truss

表 1 节点坐标 (例 1)

Tab. 1 Nodal coordinates (Example 1)

节点号	x / cm	y / cm	z / cm
1	0	0	73.15
2	457.2	791.89	55.88
3	914.40	0	55.88
9	457.2	914.40	0
10	1371.6	791.89	18.79
11	1828.8	0	0

表 2 杆件序号 (例 1)

Tab. 2 Ordinal numbers of bars (Example 1)

杆件类别	杆件序号
1	$j, j = 1 \sim 6$
2	$j+6, j = 1 \sim 6$
3	$3j+10, j = 1 \sim 6$
4	$j+13+ \text{int}[(j-1)/2], j = 1 \sim 12$

其中 $\text{int}[(j-1)/2]$ 为 $(j-1)/2$ 的整数部分

的值,每类杆具有相同截面.杨氏模量为 68 950 MPa,节点 1 作用 8 907.5 N 向下的荷载,许用应力为 78.603 MPa,材料密度 $d = 0.00277 \text{ kg/cm}^3$,杆件截面下界为 0.6452 cm^2 . 本例的高

跨比为 1/50,单独用欧拉理论或临界点理论解均可能无效,所以先用临界点理论解法求解,见表 3.

表 3 临界点理论解与临界点-欧拉理论解

Tab. 3 Solutions by the critical-point and critical-point-Eulerian theories

杆件类别	临界点理论解		临界点-欧拉理论解	
	N /N	A /cm ²	N /N	A /cm ²
1	- 134 749.1	331.772 2	- 134 749.1	331.772 2
2	111 379.6	274.233 0	111 867.6	275.433 6
3	- 20 722.9	51.019 3	- 18 764.7	53.894 1
4	- 2 680.9	6.601 3	- 4 148.0	25.312 9

节点 1 的位移 $w_1 = - 7.1956 \text{ cm}$,节点 2~7 的位移 $w_{j+1} = 0.00087376 \text{ cm}, j = 1 \sim 6$; $d_{j+1} = 0.0538 \text{ cm}, j = 1 \sim 6$; $W = 99963 \text{ N}$. 经欧拉稳定条件检验 $A_{j+10} = 56.6347 \text{ cm}^2$, $A_{j+13k} = 22.6722 \text{ cm}^2, k = \text{int} \frac{j-1}{2}$.

所以上述临界点理论的解并不是该问题的稳定解,应将欧拉条件作为截面下界约束对截面进行修正,又经过 19 次迭代,求得满足欧拉条件的临界点-欧拉理论的稳定解,见表 3 的最后一列. 其他解为 $w_1 = - 7.0696 \text{ cm}, w_{j+1} = 0.1268 \text{ cm}, j = 1 \sim 6$; $d_{j+1} = 0.0536 \text{ cm}, j = 1 \sim 6$; $W = 106156.5 \text{ N}$.

例 2 30 杆空间屋顶桁架如图 1,除各节点 z 坐标(见表 4)有变化外,其余所有数据与例 1 中的相同.

本例的高跨比为 1/16.7613. 先用欧拉理论解法求解,见表 5.

用欧拉理论求得的其他解: $w_1 = - 6.1763 \text{ cm}, w_{j+1} = 1.9830 \text{ cm}, j = 1 \sim 6$; $d_{j+1} =$

$0.3882 \text{ cm}, j = 1 \sim 6$; $W = 17711.5 \text{ N}$. 本解的 A_{j+6} 是由 $|w_1| < 6.223 \text{ cm}$ 的条件求得的. 至此,可以肯定这就是该桁架的稳定临界解,临界点理论的解也用本文方法求出,列在表 5 最后一列,以供比较. 临界点理论的其他解: $w_1 = - 22.7749 \text{ cm}, w_{j+1} = - 0.0948 \text{ cm}, j = 1 \sim 6$; $d_{j+1} = 0.5278 \text{ cm}, j = 1 \sim 6$; $W = 3403.5 \text{ N}$. 各杆的应变能密度除最后一组外皆为 1. 顺便给出文献 [2] 中的相应解,见表 6,对应的 $W = 3412.4 \text{ N}$,其他数据原文没有给出.

表 4 节点坐标(例 2)

Tab. 4 Nodal coordinates (Example 2)

节点号	x /cm	y /cm	z /cm
1	0	0	218.22
2	457.2	791.89	164.24
3	914.4	0	164.24
9	457.2	914.40	0
10	1371.6	791.89	55.14
11	1828.8	0	0

表 5 欧拉理论解与临界点理论解

Tab. 5 Solutions by the Eulerian theory and the critical-point theory

杆件类别	欧拉理论解		临界点理论解	
	N /N	A /cm ²	N /N	A /cm ²
1	- 29 678.9	69.367 6	- 43 428	10.898
2	21 388.3	7.296 8	35 568.5	8.925 8
3	- 8 705.5	39.725 7	- 6 627.8	1.663 2
4	269.89	0.806 5	- 1 321.15	0.645 2

表 6 文献 [2] 的解与线性欧拉理论解

Tab. 6 Solutions of Lit. [2] and the linear Eulerian theory

杆件类别	文献 [2]	线性欧拉理论解	
	A / cm^2	N / N	A / cm^2
1	10.92	- 25 194.3	62.438 6
2	8.873 5	14 987.7	1.903 2
3	1.737 4	- 16 193.8	50.193 4
4	0.645 2	5 816.4	0.741 9

文献 [2] 的解没有本文解法精确,各杆的应变能密度为 1 的只有一组,其余的皆不为 1. 本文的解除最后一组杆由截面下界决定外,其余各杆应变能密度皆为 1. 另外将临界点理论的解同欧拉理论解相比较,显然临界点理论的解是危险的,用于实际必引起失稳. 另外,再给出该问题的线性欧拉理论解(内力和截面积),列在表 6,以供比较. 这个解对应的 $w_1 = 1.151 4 \text{ cm}$, $w_{j+1} = -0.242 8 \text{ cm}$, $j = 1 \sim 6$; $d_{j+1} = 1.043 2 \text{ cm}$, $j = 1 \sim 6$; $W = 17 525.5 \text{ N}$. 本解的 A_{j+6} 是由抗拉强度条件求得的.

经比较可见,线性欧拉理论的解与几何非线性欧拉理论的解很接近,重量之差仅为 1.03%,所以线性欧拉理论的解完全可应用于一般小扁度桁架,且解法更简单、有效,精度也足够.

例 3 30 杆空间屋顶桁架如图 1,除节点 z 坐标之外,其余原始数据皆与例 1 中的相同. 新的坐标为 $z_1 = 36.576 \text{ cm}$; $z_{j+1} = 24.384 \text{ cm}$, $j = 1 \sim 6$; $z_{2j+6} = 12.192 \text{ cm}$, $j = 1 \sim 6$. 本题的高跨比为 1/100,无几何非线性欧拉理论的解. 临界点理论的解列在表 7 内.

表 7 临界点理论的解

Tab. 7 Solution by the critical-point theory

杆件类别	N / N	A / cm^2
1	- 191 480.5	943.065 9
2	135 788.1	668.774 1
3	- 51 344	246.821 4
4	- 5 575.6	27.449

求得的其他解的值为 $w_1 = -5.102 9 \text{ cm}$, $w_{j+1} = -0.000 734 06 \text{ cm}$, $j = 1 \sim 6$; $d_{j+1} = 0.026 9 \text{ cm}$, $j = 1 \sim 6$; $W = 371 927.5 \text{ N}$. 经检验,上述解中的 $A_{j+1 \sim k}$ ($k = \text{int} \frac{j-1}{2}$) 违反欧拉

稳定条件,27.460 6 cm^2 应为 29.325 7 cm^2 ,但两者相差只有 6.5%,按规范规定,修改为 29.325 7 cm^2 即可,这个调整对其余杆件影响不大. 这就是该桁架的稳定临界解.

由上述 3 个例题的计算结果看到,3 个桁架的稳定临界解分别由 3 个理论求出. 而临界点理论为什么只适用于大扁度扁桁架呢? 在计算中可看到,如无尺寸下限的约束,临界点理论求解过程应变能密度为 1 的条件使得所有杆件(不论拉杆或压杆)的应力的绝对值皆相等,这就说明,该理论认为不论压杆或拉杆皆有相同的抵抗失稳的能力. 其实,这不完全正确,因为对于扁度较小的桁架,结构的失稳常由欧拉屈曲失稳而引起,这时受压杆件中的临界应力比受拉杆件的应力要小得多,尤其是细长杆件. 这说明压杆抵抗失稳的能力比拉杆弱得多,越细长的受压杆件抵抗失稳的能力越弱,这就是临界点理论不适用于这类桁架的根本原因. 那为什么临界点理论却适用于大扁度扁桁架呢? 恰恰是这类桁架失稳时各杆皆处于直线状态,因此各杆中应力的绝对值才可能保持相同,拉压杆表现出相同的抵抗失稳的能力,从而使该理论只适用于该类桁架.

3 结 论

(1) 本文提出的几何非线性临界点-欧拉稳定理论适用于求所有扁桁架结构的稳定临界解,也就是在强度(或位移)和稳定约束下的扁桁架结构的最轻重量截面优化设计. 在扁度很小时,例如本文例 2 中 $H/L = 1/16.761 3$ 的扁桁架中,线性欧拉稳定理论即可求得足够精确的稳定解.

(2) 应当特别指出,有一些文献^[2,3]扁桁架的例题中,将临界点理论用于其适用的范围之外,导致其截面解违反欧拉稳定条件,成为面积过小的危险设计,例如文献 [4] 中对称 2 杆桁架只有 $H = 6.35 \text{ cm}$ 时的结果是正确的,其余的结果经过本文的验算全部都是错的,至于不对称 2 杆桁架和 4 杆空间桁架的结果皆违反欧拉稳定条件;文献 [3] 中的 4 杆桁架、24 杆桁架和文献 [2] 中的 30 杆桁架以及文献 [5] 中的其他例题等都是不对的,都是不符合欧拉条件的危险设计.

(3) 有些人仍然应用几何非线性特征值稳定

理论研究各种桁架结构的稳定临界解,例如文献 [6] 中的许多算例的结果本文推测都不会正确,作者在文献 [7] 中进行了理论分析和算例比较,后来又查阅了历史资料,未查到关于几何非线性特征值理论的科学实验验证,也未见到这种模式失稳的工程实例,最终证明该理论和振动中的特征值理论根本不同,是错误的. 用该理论计算桁架的临界荷载过高,用该理论求得的桁架的稳定临界解过小,是危险的设计,文献 [8-9] 中的一些例题都是如此. 该理论对任何桁架结构全不适用. 原因是他们从未怀疑过该理论会有错误,也未考虑过欧拉稳定理论对桁架结构稳定性的影响.

参考文献:

- [1] 孙焕纯, 王跃方, 刘春良. 桁架结构稳定分析的几何非线性欧拉稳定理论 [J]. 计算力学学报, 2007, 24(4): 539-544
- [2] KHOT N S, KAMAT M P. Minimum weight design of truss structure with geometric nonlinear behavior [J]. *AIAA J*, 1985, 23(1): 139-144
- [3] LEVY R, PERNG H S. Optimization for nonlinear stability [J]. *Comput & Struct*, 1988, 30(3): 529-535
- [4] SEDAGHATI R, TABARROK B. Optimum design of truss structures undergoing large deflection subject to a system stability constraint [J]. *Int J for Numer Meth Methods in Eng*, 2000, 48(3): 421-434
- [5] KHOT N S. Nonlinear analysis of optimized structures with constraints on system stability [J]. *AIAA J*, 1983, 21(8): 1181-1186
- [6] MANICKARAJAH D, XIE Y M, STEVEN G P. Optimum design of frames with multiple constraints using an evolutionary method [J]. *Comput & Struct*, 2000, 74(6): 731-741
- [7] 孙焕纯, 王跃方. 对桁架结构稳定分析经典理论的讨论 [J]. 计算力学学报, 2005, 22(3): 316-319
- [8] DEAN D L, JETTER F R. Analysis for truss buckling [J]. *Amer Soc Civil Eng*, 1972, 92(ST8): 1893-1897
- [9] KOCVARA M. On the modeling and solving of truss design problems with global stability constraints [J]. *Struct Multidisc Optim*, 2002, 23(3): 189-203

Geometrically nonlinear critical-point-Eulerian stability theory for stability analysis of shallow truss structures

SUN Huan ehun^{*}, WANG Yue fang, LIU Chun liang

(Dept. of Eng. Mech., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China)

Abstract The stability of shallow truss structures is studied. A geometrically nonlinear critical-point-Eulerian theory is presented for analysis of stability of the trusses with medium oblatenesses. A precise iteration scheme is developed to solve critical values of cross-sectional areas and internal forces by using the exact relation between displacement and strain along with constraints of unity stress intensity of members and the Euler's stability condition. The numerical examples show the present theory is effective. In addition, comments are given on several other existent theories of stability analysis.

Key words stability theory; shallow truss; geometrically nonlinear; critical-point theory; Eulerian theory