文章编号: 1000-8608(2007)05-0712-06

广义节点无网格法基本原理及其应用

叶祥记[1,2], 栾茂田*[1,2], 黎 勇[1,2], 杨 庆[1,2]

(1.大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;
2.大连理工大学 土木水利学院 岩土工程研究所, 辽宁 大连 116024)

摘要: 借鉴流形方法思想,引入广义节点的概念,对传统的无网格法进行了改进,建立了可具有任意高阶多项式插值函数的广义节点无网格方法,在阐述这种方法基本原理的同时,针对线弹性力学问题给出了其计算列式. 与传统无网格方法相比,这种方法更具有一般性,当选取 0阶广义节点位移插值函数时便可得到传统的无网格法;可以通过提高广义节点位移插值函数的阶数降低完备基函数的次数,从而可减少支持域内节点的数目并保证计算精度. 最后通过一端承受剪力悬臂梁和中间开口无穷板算例分析,论证了这种方法的合理性.

关键词: 无网格法; 广义节点; 广义节点无网格法
中图分类号: TU311.4 文献标识码: A

0 引 言

近 30年来,无网格法得到很快的发展. 无网格法包括光滑粒子法(SPH)[1]、扩散单元法(DEM)[2]、无单元 Galerkin法(EFGM)[3]、再生核粒子法(RPKM)[4]、自然单元法(NEM)[5]、点插值法(PIM)[6]等. 这些无网格法与基于网格的有限单元法、有限体积法的最大差别在于逼近函数的构造方法. 在基于网格的传统数值方法中,试函数的构造依赖于网格,而无网格法只需要用离散的点来构造试函数.

在石根华所发展的流形方法[7](manifold method)中,针对广义节点提出了广义自由度、数学覆盖和物理覆盖. 通过提高定义在覆盖的局部逼近函数即覆盖函数的阶数可有效地提高流形方法总体解的逼近精度. 梁国平等[8]将流形方法的思想用于对传统流形方法的改进,并且从数学上证明了这种改进的可行性. 栾茂田等[9]通过对传统有限元引入广义节点的概念,建立了可具有任意高阶多项式插值函数的广义节点有限元方法. 邵国建等[10]对广义四节点等参元有限元进行了深入探讨.

本文将广义节点概念引入到无网格方法中,建立具有任意高阶多项式插值函数的广义节点无网格方法. 在阐述这种方法基本原理的基础上,针对典型算例,通过对比计算验证所建议的广义节点无网格法的合理性及其有效性.

1 无网格法的逼近函数

在无网格方法中,可以采用移动最小二乘法、再生核法、径向基函数法等不同方法构造逼近函数. 下面采用移动最小二乘法来构造逼近函数.

假定问题的求解域 K用 N个节点来离散. 在某个计算点 $\boldsymbol{x}$的支持域 $K_x \subseteq K$内有 n个节点 $\boldsymbol{x}_i$,其场变量为 $\boldsymbol{u}_i$,则可利用节点场变量值通过插值拟合得到 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$的近似解为

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)=\sum_{j=1}^{m}p_j(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{a}_j(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \quad (1)$$

式中: $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}$为完备基函数,通常采用单项式作为基函数. 对于二维问题,当分别采用一次($m=3$)或二次($m=6$)多项式作为基函数时,得到如下的线性基与二次基

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})=(1 \quad x \quad y)$$
$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})=(1 \quad x \quad y \quad xy \quad x^2 \quad y^2)$$

收稿日期: 2005-11-02; 修回日期: 2007-07-30.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172022); 教育部跨世纪优秀人才培养计划研究基金资助项目(教技函[1998]2号).
作者简介: 叶祥记(1980-), 男, 博士生, E-mail: xjyedut@163.com; 栾茂田*(1962-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, E-mail: mtluan@dlut.edu.cn.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

当采用移动最小二乘法时,采用权函数 $\hat{W}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)$,近似函数 $\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)$ 在支持域内节点上误差的加权平方和为

$$J=\sum_{i=1}^{n}\hat{W}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)[\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_i)]^2=\sum_{i=1}^{n}\hat{W}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)[\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_i)]^2 \quad (2)$$

根据加权残差平方和的极值条件即 $\partial J/\partial\boldsymbol{a}=0$,得到系统控制方程的离散格式如下:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{U}_s \quad (3)$$

式中

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\hat{W}_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_i) \quad (4)$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{B}_1\quad\boldsymbol{B}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{B}_n) \quad (5)$$

$$\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{x})=\hat{W}_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_i) \quad (6)$$

$$\boldsymbol{U}_s=(\boldsymbol{u}_1\quad\boldsymbol{u}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{u}_n)^{\mathrm{T}} \quad (7)$$

将式(4)与式(5)代入式(3),则有

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{U}_s \quad (8)$$

于是逼近函数可写成

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_j(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}))_{ji}\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_i \quad (9)$$

式中 Φ_i 为形函数,具有下列形式:

$$\Phi_i(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{m}p_j(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}))_{ji}=\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}_i \quad (10)$$

2　广义节点无网格法(GNMFM)

根据上述方法可以得到形函数,以此为基础所构造的逼近场函数可表示为

$$\boldsymbol{u}^h(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i\boldsymbol{u}_i \quad (11)$$

式中: $\boldsymbol{u}_i=(u_i\quad v_i)^{\mathrm{T}}$,是节点上的自由度向量,相当于传统无网格法中的节点位移.

在流形方法中,采用了广义节点,认为每一个节点可含有任意多个广义自由度数. 因此式(11)中的 $\boldsymbol{u}_i$ 可以表示为 $2m_i$ 个广义自由度的函数,如

$$\boldsymbol{u}_i=\begin{pmatrix}u_i\\v_i\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{m_i}\begin{pmatrix}f_{ij}(x,y)&0\\0&f_{ij}(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_{i,2j-1}\\d_{i,2j}\end{pmatrix} \quad (12)$$

将式(12)代入式(11),得到一类新的无网格法的逼近函数表达式

$$\boldsymbol{u}^h(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i\sum_{j=1}^{m_i}\begin{pmatrix}f_{ij}(x,y)&0\\0&f_{ij}(x,y)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}d_{i,2j-1}\\d_{i,2j}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{D}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{D}_i \quad (13)$$

式中 $\boldsymbol{D}_i$ 为节点 i 的广义自由度向量,

$$\boldsymbol{D}_i=(d_{i,1}\quad d_{i,2}\quad\cdots\quad d_{i,2m_i})^{\mathrm{T}} \quad (14)$$

这种具有多个自由度的节点称为广义节点,$\boldsymbol{N}_i$ 为广义插值函数矩阵,与传统无网格法中的插值函数 Φ_i 具有下列关系:

$$\boldsymbol{N}_i=\Phi_i\sum_{j=1}^{m_i}\begin{pmatrix}f_{ij}(x,y)&0\\0&f_{ij}(x,y)\end{pmatrix}=\Phi_i\boldsymbol{F}_i \quad (15)$$

式中 $\boldsymbol{F}_i$ 为广义节点位移插值函数. 进一步地,式(12)可以展开为下列形式

$$\boldsymbol{u}_i=\begin{pmatrix}u_i(x,y)\\v_i(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{i1}&0&f_{i2}&0&\cdots&f_{im_i}&0\\0&f_{i1}&0&f_{i2}&\cdots&0&f_{im_i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_{i,1}\\d_{i,2}\\\vdots\\d_{i,2m_i-1}\\d_{i,2m_i}\end{pmatrix} \quad (16)$$

注意到,0阶的广义节点位移插值函数为 $\boldsymbol{F}_i=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,则有

$$\boldsymbol{u}_i=\begin{pmatrix}u_i\\v_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_{i,1}\\d_{i,2}\end{pmatrix} \quad (17)$$

此时便退化为传统的无网格法. 1阶、2阶的广义节点位移插值函数分别为

$$\boldsymbol{F}_i=\begin{pmatrix}1&0&x&0&y&0\\0&1&0&x&0&y\end{pmatrix} \quad (18a)$$

$$\boldsymbol{F}_i=\begin{pmatrix}1&0&x&0&y&0&xy&0&x^2&0&y^2&0\\0&1&0&x&0&y&0&xy&0&x^2&0&y^2\end{pmatrix} \quad (18b)$$

所对应的广义节点分别具有 6个、12个自由度,

$$\boldsymbol{D}_i=(d_{i,1}\quad d_{i,2}\quad\cdots\quad d_{i,6})^{\mathrm{T}} \quad (19a)$$

$$\boldsymbol{D}_i=(d_{i,1}\quad d_{i,2}\quad\cdots\quad d_{i,12})^{\mathrm{T}} \quad (19b)$$

由此推广可以获得高阶广义节点位移插值函数. 由式(15)可知,随着广义节点位移插值函数阶次的增多,广义插值函数的阶次也得到提高.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

3 线弹性力学问题 GNMFM列式

对于给定的二维线弹性固体力学问题,边值方程包括问题域 K上的平衡方程、边界 Γ_u 上的强制边界条件与边界 Γ_t 上的自然边界条件,可分别表述为

$$(\mathrm{L}\sigma)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{20a}$$

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \tag{20b}$$

$$\sigma \boldsymbol{n} = \bar{\boldsymbol{t}} \tag{20c}$$

式中: L为微分算子; $\boldsymbol{b}$ 为体积力; $\bar{\boldsymbol{u}}$ 为已知边界位移; $\boldsymbol{n}$ 为自然边界的单位方向余弦.

由于移动最小二乘法所得到的形函数不具备插值特性[3],一般采用 Lagrange乘子法或罚函数法等方法处理强制边界条件. 这里采取 Lagrange乘子法,于是控制方程的弱形式可以表达为

$$\int_{\mathrm{K}} \delta(\mathrm{L}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{c}\mathrm{L}\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\mathrm{K} - \int_{\mathrm{K}} \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}\mathrm{K} - \int_{\Gamma_t} \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\lambda\,\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\lambda^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}})\,\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{21}$$

式中 λ 为 Lagrange乘子向量, $\boldsymbol{c}$ 为弹性系数矩阵.

下面分别考虑式 (21) 中的各项. 将式 (13) 与式 (16)代入后,式 (21)中左边第 1项中的 $\mathrm{L}\boldsymbol{u}$ 为

$$\mathrm{L}\boldsymbol{u}^h = \mathrm{L}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i\boldsymbol{D}_i = \mathrm{L}\sum_{i=1}^{n} Q_i\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{D}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{\boldsymbol{B}}_i\boldsymbol{D}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{L}Q_i \begin{pmatrix} f_{i1} & 0 & f_{i2} & 0 & \cdots & f_{im_i} & 0 \\ 0 & f_{i1} & 0 & f_{i2} & \cdots & 0 & f_{im_i} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \\ \vdots \\ d_{i,2m_i-1} \\ d_{i,2m_i} \end{pmatrix} \tag{22}$$

式中 $\bar{\boldsymbol{B}}_i$ 为计算点 $\boldsymbol{x}$ 在支持域内节点 i 的几何矩阵. 若采用式 (18a)的 1阶广义节点插值函数,则有

$$\bar{\boldsymbol{B}}_i = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_i & 0 & xQ_i & 0 & yQ_i & 0 \\ 0 & Q_i & 0 & xQ_i & 0 & yQ_i \end{pmatrix} \tag{23}$$

将式 (22) 代入式 (21),则第 1项可以写成

$$\int_{\mathrm{K}} \delta\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\boldsymbol{B}}_i\boldsymbol{D}_i\right)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{c}\sum_{j=1}^{n} \bar{\boldsymbol{B}}_j\boldsymbol{D}_j\right) \mathrm{d}\mathrm{K} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{ij}\boldsymbol{D}_j \tag{24}$$

式中 $\boldsymbol{K}_{ij} = \int_{\mathrm{K}} \bar{\boldsymbol{B}}_i\boldsymbol{c}\bar{\boldsymbol{B}}_j\,\mathrm{d}\mathrm{K}$ 为广义节点刚度矩阵. 0阶、1阶与 2阶广义节点刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{ij}$ 分别为 2× 2阶、3× 3阶和 6× 6阶的方阵. 经总体组装,式 (24)可以进一步缩写为

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \delta\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{ij}\boldsymbol{D}_j = \delta\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{D} \tag{25}$$

式中 $\boldsymbol{K}$ 为总体刚度矩阵, $\boldsymbol{D}$ 为整体位移向量

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{D}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{27}$$

对于 0阶、1阶与 2阶广义节点, $\boldsymbol{K}$ 分别为 2N× 2N 阶、3N× 3N阶和 6N× 6N 阶方阵,相应地, $\boldsymbol{D}$ 分别为 2N、3N 与 6N 阶列向量.

对于式 (21) 中左边的第 2项,

$$\int_{\mathrm{K}} \delta\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{D}_i\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}\,\mathrm{d}\mathrm{K} = \sum_{i=1}^{n} \delta\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}} \int_{\mathrm{K}} (Q_i\boldsymbol{F}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}\mathrm{K} = \sum_{i=1}^{n} \delta\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{b}} = \delta\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{b}} \tag{28}$$

式中 $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{b}} = \int_{\mathrm{K}} (Q_i\boldsymbol{F}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}\mathrm{K}$ 为与体积力等效的广义节点力向量, $\boldsymbol{F}^{\mathrm{b}}$ 为相应的总体等效广义节点力向量.

同理,对于式 (21)中左边的第 3项,可得到与边界外力相等效的广义节点力向量为

$$\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{s}} = \int_{\Gamma_t} (Q_i\boldsymbol{F}_i)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}\Gamma \tag{29}$$

$\boldsymbol{F}^{\mathrm{s}}$ 为相应的总体等效广义节点力向量. 于是总的等效广义节点力为

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{b}} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{s}} \tag{30}$$

对于式 (21) 中左边第 4项,

$$\int_{\Gamma_u} \delta\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i\boldsymbol{D}_i\right)^{\mathrm{T}} \lambda\,\mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_u} \delta\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i\boldsymbol{D}_i\right)^{\mathrm{T}} \left(\sum_{j=1}^{n_\lambda} \boldsymbol{N}_j^{\lambda}\lambda_j\right) \mathrm{d}\Gamma = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_\lambda} \delta\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}} \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{N}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_j^{\lambda}\,\mathrm{d}\Gamma\lambda_j = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_\lambda} \delta\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{ij}\lambda_j = -\delta\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\lambda \tag{31}$$

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式中: $\boldsymbol{G}_{ij} = -\int_{\Gamma_u} \boldsymbol{N}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N}_j^{\lambda} \mathrm{d}\Gamma$; λ_j 为 Lagrange乘子; $\boldsymbol{N}_j^{\lambda}$ 为相应于 Lagrange乘子的插值函数. 当广义节点位移插值函数 $\boldsymbol{F}_i$ 为 0阶、1阶与 2阶时, $\boldsymbol{G}_{ij}$ 分别为 2× 2阶、3× 3阶和 6× 6阶方阵,相应地,总体性能矩阵 $\boldsymbol{G}$ 分别为 $2N\times 2N$ 阶、$3N\times 3N$ 阶和 $6N\times 6N$ 阶方阵.

对于式(21)中左边第 5项,

$$\int_{\Gamma_u} \delta\lambda^{\mathrm{T}} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{N}_j \boldsymbol{D}_j \right) - \overline{\boldsymbol{D}} \right) \mathrm{d}\Gamma =$$

$$\int_{\Gamma_u} \delta \left(\sum_{i=1}^{n_\lambda} \boldsymbol{N}_i^{\lambda} \lambda_i \right)^{\mathrm{T}} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{N}_j \boldsymbol{D}_j \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \left(\sum_{i=1}^{n_\lambda} \boldsymbol{N}_i^{\lambda} \lambda_i \right)^{\mathrm{T}} \overline{\boldsymbol{D}} \mathrm{d}\Gamma =$$

$$- \sum_{i=1}^{n_\lambda} \sum_{j=1}^{n} \delta\lambda_i^{\mathrm{T}} \int_{\Gamma_u} (\boldsymbol{N}_i^{\lambda})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N}_j \mathrm{d}\Gamma \boldsymbol{D}_j - \sum_{i=1}^{n_\lambda} \delta\lambda_i^{\mathrm{T}} \int_{\Gamma_u} (\boldsymbol{N}_i^{\lambda})^{\mathrm{T}} \overline{\boldsymbol{D}} \mathrm{d}\Gamma =$$

$$- \delta\lambda^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} + \delta\lambda^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q} \tag{32}$$

式中 $\boldsymbol{q} = \int_{\Gamma_u} (\boldsymbol{N}_i^{\lambda})^{\mathrm{T}} \overline{\boldsymbol{D}} \mathrm{d}\Gamma$ 为广义强制边界条件向量, λ 为强制位移边界条件相应的 Lagrange乘子向量.

将式(25)、(30)、(31)和(32)代入式(21),最后可得

$$\delta \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{K}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{G}\lambda - \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}}] + \delta\lambda^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} - \boldsymbol{q}] = 0 \tag{33}$$

考虑到 $\delta\boldsymbol{D}$ 和 $\delta\lambda$ 的任意性,由式(33)可以得到

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \\ \boldsymbol{q} \end{pmatrix} \tag{34}$$

4　算例分析

算例 **1**　悬臂梁

针对平面应力状态,考虑图 1所示的悬臂梁,长度 $L = 10$ m,高度 $H = 1$ m,厚度 $t = 1$ m. 材料的弹性模量 $E = 10$ MPa,泊松比 $\nu = 0.3$. 在自由端施加竖向力 $P = 1$ kN.

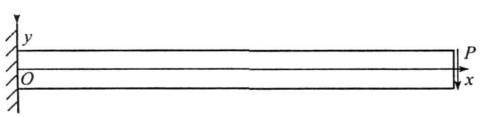


图 1　自由端承受剪力的悬臂梁

Fig. 1　Cantilever beam under shear force at free end

分别采用 0阶、1阶广义节点插值函数;逼近函数(1)中的完备基采用线性基和二次基. 对于 0阶二次、1阶线性、1阶二次等 3种情况,将计算结果与理论解进行了对比. 实际上,0阶广义节点无网格方法即为传统无网格方法. 由这些方法计算得到的轴线上竖向挠度与梁中间截面上剪应力分布如图 2与图 3所示,图中同时给出了弹性理论解. 对于本算例,位移与应力的弹性力学解分别为[11]

$$u_x = -\frac{P}{6EI} y \left[(6L - 3x)x + (2+\nu) \left(y^2 - \frac{H^2}{4} \right) \right]$$

$$u_y = \frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2 (L - x) + (4 + 5\nu) \frac{H^2 x}{4} + (3L - x) x^2 \right]$$

$$\varepsilon_x = -\frac{P(L-x)y}{I}, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \gamma_{xy} = \frac{P(4y^2 - H^2)}{8I}$$

式中 $I = tH^3/12$ 为截面的惯性矩.

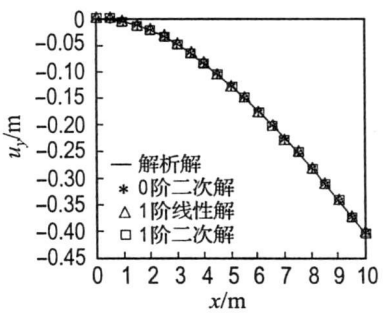


图 2　悬臂梁轴线上的竖向挠度

Fig. 2　Deflection of the cantilever beam along neutral axis $y = 0$

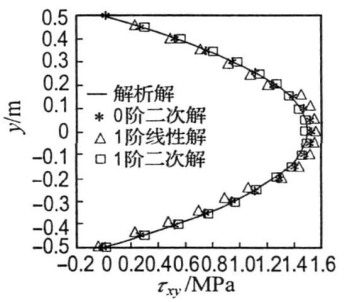


图 3　$x = 5$ 截面处的剪应力 γ_{xy} 分布

Fig. 3　Distribution of shear stresses on section at $x = 5$

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

算例 **2** 中间开孔无穷板

针对平面应力状态,考虑如图 4所示的中间开孔板,孔半径 $a=1.0$ m,取板边长 $2b=10$ m,厚度 $t=1$ m. 材料的弹性模量 $E=1$ MPa,泊松比 $\nu=0.3$. 板水平方向受到大小为 $P=1$ kN的均布荷载. 根据对称特性,取如图 5板在第一象限的四分之一部分进行计算,则在 $x=0$和 $y=0$ 处的边界条件分别为

当 $x=0$时, $u_x=0, \varepsilon_{xy}=0$;

当 $y=0$时, $u_y=0, \varepsilon_{xy}=0$

分别采用 0阶、1阶广义节点插值函数;逼近函数(1)中的完备基采用线性基和二次基. 针对 0阶二次、1阶线性、1阶二次等 3种情况,将计算结果与理论解进行了对比,结果如图 6所示. 对于本算例,位移与应力的理论解分别为[11]

$$u_r=\frac{e}{4G}\left\{r\left[\frac{\kappa-1}{2}+\cos 2\theta\right]+\frac{a^2}{r}[1+(1+\kappa)\cos 2\theta]-\frac{a^4}{r^3}\cos 2\theta\right\}$$

$$u_\theta=\frac{e}{4G}\left[(1-\kappa)\frac{a^2}{r}-r-\frac{a^4}{r^3}\right]\sin 2\theta$$

$$\varepsilon_x(x,y)=1-\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos 2\theta+\cos 4\theta\right)+\frac{3a^4}{2r^4}\cos 4\theta$$

$$\varepsilon_y(x,y)=-\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta-\cos 4\theta\right)-\frac{3a^4}{2r^4}\cos 4\theta$$

$$f_{xy}(x,y)=-\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta-\sin 4\theta\right)+\frac{3a^4}{2r^4}\sin 4\theta$$

式中: $G=\frac{E}{2(1+\nu)}$ 为剪切模量,对于平面应力与平面应变问题,系数 κ 分别为 $\kappa=\frac{3-\nu}{1+\nu}$ 与 $\kappa=3-4\nu$.

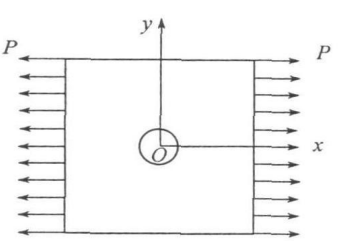


图 4 承受均匀水平拉力的无穷开孔方板

Fig. 4 An infinite plate with a hole subjected to an uniform tensile load in horizontal direction

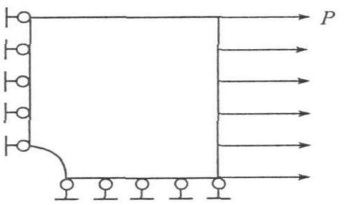


图 5 水平受拉的 1/4开孔板

Fig. 5 A quarter computational model of the plate with a hole

对比分析表明,计算精度同时取决于逼近函数中基函数的次数与广义节点位移插值函数的阶数. 当所选取的基函数次数越高或所选取的广义节点位移插值函数 $\boldsymbol{F}$ 的阶数越高时,计算精度越高.

在传统无网格法即 0阶广义节点无网格法中,为保证具有足够的计算精度,对于二维问题,通常选取二次完备基,那么为了保证式(4)中 $\boldsymbol{A}$ 阵的可逆性,计算点的支持域内的节点至少要 6个. 这无疑会增加节点的搜索时间. 而若采取 1阶线性广义节点无网格法,在式(1)中选取 1次完备基,为保证式(4)中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的可逆性,计算点的支持域内的节点则减少到至少 3个,这样可以大大减少运算时间,同时由于采用了 1阶广义节点位移插值函数,计算精度不会降低.

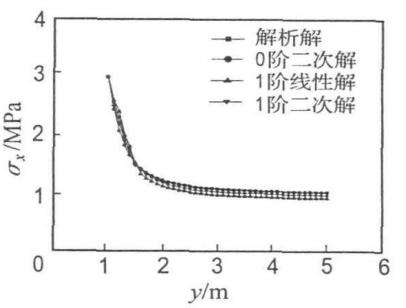


图 6 $x=0$截面处的正应力分布

Fig. 6 The distribution of normal stresses at $x=0$

5 结 语

将流形方法中的广义节点概念与无网格法中逼近函数构造方法相结合,对传统的无网格法进

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

行了改进,提出了广义节点无网格法,在保证计算效率的同时提高了计算精度. 同时在这种方法的数值实施中,只需对传统的无网格法进行相应的修改,可以重复使用原有代码. 由于在这种方法中,仍采用了 Galerkin加权余量法构造边值方程的弱形式,仍需要对问题域划分背景网格进行能量积分,尚未实现真正的无网格法,并且形函数不具备插值特性,需要特殊处理等,因此尚需进一步改进,发展完全的无网格法.

参考文献:

[1] GINGOLD R A, MONAGHAN J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and applications to non-spherical stars [J]. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Soc**, 1977, **181**: 375-389

[2] NAYROLES B, TOUZOT G, VILLON P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements [J]. **Comput Mech**, 1992, **10**: 307-318

[3] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element free Galerkin methods [J]. **Int J Numer Meth in Eng**, 1994, **37**: 229-256

[4] LIU W K, JUN S, ZHANG Y F. Reproducing kernel particle methods [J]. **Int J Numer Meth in Fluids**, 1995, **20**: 1081-1106

[5] SUKUMAR N, MORAN B, BELYTSCHKO T. The nature element method in solid mechanics [J]. **Int J Numer Meth in Eng**, 1998, **43**: 839-887

[6] LIU G R, GU Y T. A point interpolation method for two dimensional solids [J]. **Int J Numer Meth in Eng**, 2001, **50**: 937-951

[7] 石根华. 数值流形方法与非连续变形 [M]. 裴觉民, 译. 北京: 清华大学出版社, 1997

[8] 梁国平, 何江衡. 广义有限元空间 —— 一类新的逼近空间 [J]. 力学进展, 1995, **25**(4): 562-565

[9] 栾茂田, 田　荣, 杨　庆. 广义节点有限元 [J]. 计算力学学报, 2000, **17**(2): 192-200

[10] 邵国建, 刘体锋. 广义有限元及其应用 [J]. 河海大学学报(自然科学版), 2002, **30**(4): 28-31

[11] 钱伟长, 叶开沅. 弹性力学 [M]. 北京: 科学出版社, 1956: 213-242

Fundamentals and application of generalized-node-based meshfree method

YE Xiang-ji[1,2], LUAN Mao-tian*[1,2], LI Yong[1,2], YANG Qing[1,2]

(1. State Key Lab. of Coastal and Offshore Eng., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China;
2. Inst. of Geotech. Eng., School of Civil and Hydraul. Eng., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China)

Abstract A new type of meshfree method is developed by incorporating the generalized node which originated from manifold method with the conventional meshfree method. The proposed method is termed as the generalized-node-based meshfree method. The fundamental theory together with numerical formulations is presented. When the zero-order displacement interpolation function of the generalized node is chosen, the proposed method will be reduced to the conventional meshfree method. And if higher-order displacement interpolation function is utilized, the highest order of complete basis functions can be reduced. Nevertheless, it does not affect the computational accuracy. As numerical examples, a cantilever beam under end shear and an infinite plate with a hole are respectively analyzed by the proposed method and it is shown that the numerical results computed are in good agreement with the theoretical solutions.

Key words meshfree method; generalized node; generalized-node-based meshfree method

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net