

文章编号: 1000-8608(2007)06-0793-05

求解渗流自由面的有限元混合不动点法

王金芝^{*1,2}, 陈万吉¹, 齐淑华²

(1. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;
2. 大连民族学院 理学院, 辽宁 大连 116600)

摘要: 基于有自由面渗流分析的高斯点, 建立了求解渗流问题的非光滑非线性方程组模型和求解此类问题的有限元混合不动点算法, 此方法属于固定网格法, 只需划分一次网格, 不需要对数据做任何近似处理, 完全利用程序迭代计算渗流自由面. 讨论了非光滑方程组解的存在性和该不动点算法的收敛性, 通过节点压强插值绘制出渗流自由面. 算例结果表明, 该方法简单且收敛速度快. 对不动点法的收敛性分析为迭代法的收敛提供了理论依据.

关键词: 渗流; 自由面; 不动点; 非光滑非线性方程组
中图分类号: O357.3 **文献标识码:** A

0 引 言

有自由面的渗流问题是工程中经常遇到的问题, 自由表面要同时满足水头函数和压力条件而其位置不能预先给定, 它的互补和非线性性质给问题的求解带来很大的困难. 已有的有限元解法可以分为两类: 移动网格法和固定网格法. 早期提出的移动网格法是将渗流自由面当成可移动的边界来处理, 在迭代过程中改变自由面的位置, 要求不断重新划分有限元网格, 直到自由面稳定为止. 这类方法在自由表面上可以在一定意义下同时满足势函数和压力条件, 但是, 不便于有接近水平分层不同介质的问题, 而且不能用同一网格计算渗流场和应力场. 后来, 人们致力于用固定网格法解决有自由面的渗流问题, 自 1973 年 Neuman 提出用不变网格法分析有自由面的 Galerkin 法以来, 出现了多种固定网格法. 具有代表性的有单元渗透矩阵调整法^[1~4]、调整流量法^[5,6]、虚单元法^[7]、子单元法^[8]和虚节点法^[9]. 其中陈万吉等提出的固定网格高斯点有限元法^[3], 后来得到进一步的应用和改进^[9,10]. 固定网格法不能同时严格满足水头函数和压力条件, 但是简单适用, 而且可以避免移动网格法的诸多不便. 迄今, 无论是固定网格法还是移动网格法多

半采用迭代法. 迭代法在工程中应用广泛, 但是缺乏相应的数学理论和收敛性分析, 算法的稳定性难以保证. 近年来, 越来越多的学者开始关注迭代法的数学理论和收敛性分析, 陈万吉等建立了三维摩擦问题非光滑非线性方程组数学模型和混合不动点算法, 并做了收敛性分析^[11]. 最近, Zheng 等建立了渗流问题的变分不等式数学模型和算法, 并对算法做了稳定性分析^[10]. 本文将混合不动点法应用到渗流问题中建立求解此类问题的算法, 并进行收敛性分析.

1 问题的描述

图 1 所示稳态二维渗流问题的基本方程如下.

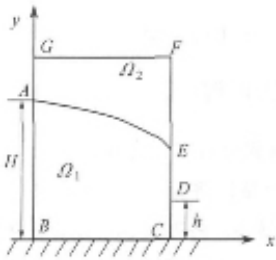


图 1 二维渗流问题

Fig. 1 Two dimensional seepage problem

收稿日期: 2006-07-14; 修回日期: 2007-09-07.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172023).
作者简介: 王金芝^{*}(1970-), 女, 博士生; 陈万吉(1941-), 男, 教授, 博士生导师.
©1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

1.1 域内方程

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} \varphi)=0 \quad\left(\text { 在 } \Omega_1 \text { 内 }\right) \quad(1)$$

其中 φ 为饱和流水头函数; k 为渗流系数.

1.2 边界条件

(1) 水头边界条件

$$\varphi=\bar{\varphi} \quad\left(\Gamma_{\varphi}=A B \cup C D\right) \quad(2)$$

其中上游 $\bar{\varphi}=H$, 下游 $\bar{\varphi}=h$.

(2) 流量边界(不透水面) 条件

$$q_n=-n^T v=0 \quad\left(\Gamma_q=B C\right) \quad(3)$$

其中 n 为不透水面单位外法向量, q_n 为不透水面法向的单宽流量, v 为流体的流速.

(3) 自由表面边界条件

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi=y \\ q_n=0 \end{array}\right. \quad\left(\Gamma_f=A E\right) \quad(4)$$

(4) 渗流表面边界条件(溢出段)

$$\varphi=y \quad\left(\Gamma_s^{\prime}=D E\right) \quad(5)$$

其中 Γ_f 是未知的.

稳定均质各向同性的土体, 在渗流区域内满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0 \quad(6)$$

流速和 φ 的关系式为

$$u=-k_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v=-k_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}, v_n=-k_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x-k_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y \quad(7)$$

式中: u, v 和 v_n 为水质点沿 x, y 和法线 n 方向的流速; k_x 和 k_y 分别为 x, y 方向的渗透系数.

对于无压流, 内部无体积源时, 在整个渗流区域内水头函数为

$$\varphi=y+\frac{p}{\gamma} \quad(8)$$

其中 γ 为水容重, p 为地下水压力.

2 有限元模型

2.1 数值积分有限元方程

不动网格法将自由面上下的渗流场用一个固定域 Ω 来描述. 将方程(6) 的求解区域延拓到整个域 Ω , 即求解区域为 $\Omega=\Omega_1 \cup \Omega_2$, 在整个 Ω 内满足方程(6).

将全域 Ω 划分成 E_L 个单元, 单元内水头和坐标分别按节点水头和节点坐标插值, 本文采用四节点四边形等参单元. 离散化代数方程组为 $K \varphi$

$=b$, 其中 $\varphi=\left(\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \cdots \quad \varphi_N\right)^T$, 为节点势列阵, b 为节点流量列阵, N 为整个区域的节点个数, K 为渗透刚度矩阵, $K=\sum_{i=e}^{E_L} k^e, k^e$ 为第 e 个单元的刚度矩阵, 由数值积分完成, 数值积分公式可表示为

$$k^e=\sum_{i j} \lambda_{i j} w_{i j}\left(B^T B|j|\right)_{i j} \quad(9)$$

其中 B 为形函数偏导数矩阵. 这里引入的 $\lambda_{i j}$ 为高斯点($i j$ 点) 控制参数, Ω_1 域内的高斯点 $\lambda=1$, 而 Ω_1 域外的高斯点 $\lambda=0$, 由 $\lambda_{i j}$ 组成的向量为 $\bar{\lambda}$. 为了方便, 记

$$H_1(\varphi, \bar{\lambda})=K(\bar{\lambda}) \varphi-b=0 \quad(10)$$

2.2 确定高斯点的控制参数

渗流区域内的任意点相对于自由面的位置可通过该点的 φ 与 y 如下关系来确定:

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi>y ; \text { 自由面以下 } \\ \varphi=y ; \text { 自由面上 } \\ \varphi<y ; \text { 自由面以上 } \end{array}\right. \quad(11)$$

整个渗流区域内水头函数满足 $\varphi=y+\frac{p}{\gamma}$, 由于水容重 $\gamma=1, p=\varphi-y$. 特别的渗流区域内的高斯点满足:

$$P_{G_i}-\left(\varphi_i-y_i\right)=0 \quad(12)$$

其中 y_i 为第 i 个高斯点的纵坐标, P_{G_i} 为第 i 个高斯点的压强. 由式(9) 中高斯点控制参数的取值和式(12) 得高斯点压强与控制参数之间的函数关系式如下:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_i=0 ; P_{G_i}<0 \\ \lambda_i=1 ; P_{G_i} \geq 0 \end{array}\right. \quad(13)$$

将式(13) 写成非光滑方程形式

$$H_2^i\left(P_{G_i}, \lambda_i\right)=\min \left\{0, \lambda_i P_{G_i}\right\}=0 \quad(14)$$

则有式(13) 与(14) 等价.

令 $\bar{\lambda}=\left(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_M\right)^T, P_G=\left(P_{G_1} \quad P_{G_2} \quad \cdots \quad P_{G_M}\right)^T, M$ 为高斯点的个数, 则可令

$$H_2\left(P_G, \bar{\lambda}\right)=\left(H_2^1 \quad H_2^2 \quad H_2^3 \quad \cdots \quad H_2^M\right)^T$$

2.3 出口边界点的处理

为了根据出口边界点的情况, 确定逸出点的位置, 对出口边界点做如下处理: 如果出口边界点的流量为正, 则修改这个出口边界点的编号, 令它为 0; 如果出口边界点的流量为负, 则不改变这个出口边界点的编号. 设 N_L 为出口边界点的个数; c_i 为第 i 个出口边界点的实际编号, $c_i>0$, 且为已

知; b_i 为修改后的第 i 个出口边界点的编号, $b_i \geqslant 0$ 且 $b_i \leqslant c_i$. 设 q_i 为第 i 个出口边界点的流量, 为已知量. 可以用出口边界点的流量 q_i 确定 b_i 的取值, 构造下列函数关系:

$$\begin{cases} b_i = c_i; & q_i \leqslant 0 \\ b_i = 0; & q_i > 0 \end{cases} \quad (15)$$

将上面函数关系写成非光滑方程的形式

$$H_3^i(q_i, b_i) = \max(0, q_i b_i) + \min(0, q_i(c_i - b_i)) = 0 \quad (16)$$

定理 1 当 $b_i \geqslant 0$ 且 $b_i \leqslant c_i$ 时, 非光滑方程 (16) 与用不等式表示的 q_i 与 b_i 的关系 (15) 等价.

证明 因为 $\max(0, q_i b_i) + \min(0, q_i(c_i - b_i)) = \begin{cases} q_i(c_i - b_i); & q_i \leqslant 0 \\ q_i b_i; & q_i > 0 \end{cases}$
 $\max(0, q_i b_i) + \min(0, q_i(c_i - b_i)) = 0$ 等价于
(1) 当 $q_i < 0$ 时, $c_i - b_i = 0$ 即 $b_i = c_i$
当 $q_i = 0$ 时, 可令 $b_i = c_i$;
(2) 当 $q_i > 0$ 时, $b_i = 0$

令

$$H_3(q, b) = (H_3^1 \ H_3^2 \ H_3^3 \ \cdots \ H_3^{N_L})^T \quad (17)$$

其中 $q = (q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_{N_L})^T$, $b = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{N_L})^T$.

这样, 由 $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, $H_3 = 0$ 就构成了一个非光滑方程组, 若一组变量满足上面的非光滑方程组, 则为问题满足区域位置定解条件的解. 由此得如下定理:

定理 2 用等式与不等式表示的区域位置的定解条件与用非光滑方程组表示的定解条件等价.

3 非光滑混合不动点算法

为建立非光滑方程组的混合不动点算法, 先构造效益函数

$$G = \frac{1}{2}(H_1^T H_1 + H_2^T H_2 + H_3^T H_3) \quad (18)$$

不动点法步骤如下:

步骤 0 给定结束精度 $\varepsilon > 0$, 令 $k = 0$, 取初值 λ^0 , 根据程序求出刚度矩阵 K , 利用 H_1 求出 φ^0 , 求出各节点流量, 令 $b^0 = c$, $c = (c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_{N_L})^T$, 再利用式 (14) 求出 P^0 .

步骤 1 将 φ^k 、 P^k 、 λ^k 、 b^k 代入 G 表达式, 若 $G < \varepsilon$, 则停止; 否则转步骤 2.

步骤 2 将 φ^k 、 P^k 、 λ^k 、 b^k 代入 $H_1 = 0, H_2 = 0, H_3 = 0$ 中求出 φ^{k+1} 、 P^{k+1} 、 λ^{k+1} 、 b^{k+1} , 令 $k = k + 1$ 转步骤 1.

本算法中的效益函数 $G = 0$ 保证了 $H_1 = 0$, $H_2 = 0, H_3 = 0$ 同时成立, 因此解 $G = 0$ 就相当于解方程组 $H_1 = 0, H_2 = 0, H_3 = 0$. 同时效益函数 G 的变化趋势是本算法是否收敛的依据.

4 混合不动点算法的理论分析

定义 1 设函数 $\varphi(x)$ 是定义在 $\Omega \subset R^n$ 上的函数向量, $\varphi(x) = (\varphi_1(x) \ \varphi_2(x) \ \cdots \ \varphi_n(x))^T$, $\varphi_i(x) (i = 1, \cdots, n)$ 为 n 个变量的函数, 解方程组 $x = \varphi(x)$ 的迭代法 $x^{k+1} = \varphi(x^k) (k = 0, 1, \cdots)$ 称为不动点迭代法^[14].

定义 2 设 $f(x)$, $\varphi(x, y)$ 分别是定义在 $\Omega_1 \subset R^n$, $\Omega \subset R^{n+m}$ 上的函数向量, $x \in R^n, y \in R^{n+m}$, 则解方程组

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = \varphi(x, y) \end{cases}$$

的迭代法

$$\begin{cases} y^{k+1} = f(x^k) \\ x^{k+1} = \varphi(x^k, y^{k+1}) \end{cases} \quad (k = 0, 1, \cdots)$$

称为混合不动点迭代法.

引理 1 设方程组 $\begin{cases} y = f(x) \\ x = \varphi(x, y) \end{cases}$ 在区域 $\Omega \subseteq R^n$ 内有解 (x^*, y^*) , 且 $\varphi(x, y)$ 在 (x^*, y^*) 处 F -可微, 则当 $\varphi'(x^*, y^*)$ 的谱半径 $\sigma = \rho(\varphi'(x^*, y^*)) < 1$ 时, 存在球 $S = \{x \mid \|(x, y) - (x^*, y^*)\| \leqslant \delta\} \subseteq \Omega$, 使对任何 $(x^0, y^0) \in S$, 混合不动点迭代法收敛到 (x^*, y^*) .

定义 2 中的方程组 $y = f(x)$ 也可以是隐函数方程组 $F(x, y) = 0$, 而且这里的 $F(x, y) = 0$ 还可以推广到非光滑方程组的情形, 下面给出非光滑函数的隐函数定理.

引理 2 非光滑隐函数定理: 设 $F(x, y)$ 是 $\Omega \subseteq R^{n+m}$ 上的非光滑连续函数, 点 $(x^*, y^*) \in \Omega$, 设 $F(x, y)$ 对 y 的广义导数 $\partial F(x^*, y^*)/\partial y^*$ 存在, 那么当 $0 \notin \partial F(x^*, y^*)/\partial y^*$ 时, 则存在函数 $y = f(x)$ 在 (x^*, y^*) 的一个邻域中成立^[15].

定理 3 本文给出的不动点算法为混合不动点算法.

证明 若给定每一个高斯点的 λ 值, 则可根据数值积分有限元方程组 $H_1 = K(\lambda)\varphi - b = 0$ 和方程组 $P_G - (\varphi - y) = 0$ 确定每一个高斯点的压强、每一个边界点的流量, 从而由 $H_3 = 0$ 可以确定 b , 则 $H_1 = 0, H_2 = 0, H_3 = 0$ 可以写成隐函数形式 $\begin{cases} G(P_G, \bar{\lambda}) = 0 \\ F(b, \bar{\lambda}) = 0 \end{cases}$, 由隐函数存在定理可表示为 $P_G = f(\bar{\lambda}), b = h(\bar{\lambda})$, 因此高斯点的压强可以由高斯点的控制参数 $\bar{\lambda}$ 表示, 记 $P_{G_i} = f_i(\bar{\lambda})$, 而由非光滑方程 H_2^i 知, λ_i 可以由 P_{G_i} 确定, 从而 λ_i 可由 $P_{G_i}, \bar{\lambda}$ 表示, 记 $\lambda_i = g_i(P_{G_i}, \bar{\lambda})$. 则前面算法的求解步骤即是对方程组

$$\begin{cases} P_G = F(\bar{\lambda}) \\ \bar{\lambda} = g(P_G, \bar{\lambda}) \\ b = h(\bar{\lambda}) \\ \bar{\lambda} = H(b, \bar{\lambda}) \end{cases} \quad (19)$$

的符合定义 2 中描述的混合不动点迭代法.

下面给出不动点算法的解的存在性和收敛性定理.

定理 4 R^n 中的紧凸集 X 具有不动点性质, 即每个 X 到 Y 的连续映像都有不动点.

式 (19) 中的函数向量 g 是从 $\Omega = \underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]}_M$ 到自身的映射, 因此不动点一定存在, 即方程组 (19) 前两个方程组成的方程组一定有解. 同理方程组 (19) 后两个方程组成的方程组一定有解. 也就是式 (19) 的不动点一定存在.

定理 5 设方程组 $\begin{cases} P_G = f(\lambda) \\ \lambda = g(P_G, \lambda) \end{cases}$ 的解为 (P_G^*, λ^*) , 且 $g(P_G, \lambda)$ 在 (P_G^*, λ^*) 处 F -可微^[16], 且 $0 \notin \partial g(P_G^*, \lambda^*) / \partial \lambda^*$, 则当 $\partial g(P_G^*, \lambda^*) / \partial \lambda^*$ 的谱半径 $\sigma = \rho(g'(P_G^*, \lambda^*)) < 1$ 时, 存在球 $S = \{\lambda \mid \|(P_G, \lambda) - (P_G^*, \lambda^*)\| \leq \delta\} \subseteq \Omega$, 使对任何 $(P_G^0, \lambda^0) \in S$, 混合不动点迭代法收敛到 (P_G^*, λ^*) .

对式 (19) 后两个方程也有同样的结论. 因此, 由非光滑分析理论^[12,13] 和不动点理论^[14,15] 可证明本文的模型有解且在一定条件下收敛.

5 数值算例

例 1 边长 $l = 10\text{ m}$ 方形挡水墙上游水位 $h_1 = 10\text{ m}$, 下游水位 $h = 0$. 采用四节点等参元, 2×2 高斯积分, 网格划分为 10×10 . 利用不动点法求出各节点的压强、流量以及高斯点的压强流量和 λ 值. 在过渡单元内 (节点压力有正负变化的单元), 用单元边界上的压力插值求出压力为零的位置 (即自由面位置). 经 4 步计算收敛 (效益函数 $G < 1.0 \times 10^{-8}$). 图 2 给出了基于近似理论的杜平公式解析解 $y^2 = -8.136x + 100$ 和本文的数值结果, 可见本文的解与杜平公式解十分接近.

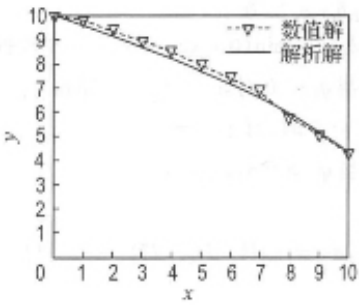


图 2 渗流自由表面的计算结果

Fig. 2 Result of free surface of seepage

6 结 语

本文建立了渗流问题的一种非光滑方程组模型, 由此得到的效益函数构成一种新的规划法提法, 为这类有自由表面的问题的算法和收敛性研究提供了数学理论基础.

参考文献:

[1] BATHE K J. Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration [J]. Int J Numer and Anal Methods in Geomech, 1979(3):13-22
[2] 李春华. 稳定渗流有限元计算时采用固定网格法的初步研究[C] // 第三届全国渗流力学学术讨论会论文汇编. 武汉:[s n], 1986
[3] 陈万吉, 汪自力. 瞬态有自由面渗流分析的不变网格高斯点有限元法[J]. 大连理工大学学报, 1991, 31(5):537-543
(CHEN Wan-ji, WANG Zi-li. Finite element method of invariable mesh Gauss point for transient

seepage problem with surface [J]. *J Dalian Univ Technol*, 1991, **31**(5): 537-543)

[4] 王贤能,黄润秋. 有自由面渗流分析的高斯点法[J]. *水文地质工程地质*, 1997(6):1-4

[5] DESAI C S, LI G C. A residual flow procedure and application for free surface in porous media [J]. *Adv in Water Res*, 1983, **6**(1):27-35

[6] 张有天,陈 平,王 镭. 有自由面渗流分析的初流量法[J]. *水利学报*, 1998(8): 18-26

[7] 吴梦喜,张学勤. 有自由面渗流分析的虚单元法[J]. *水利学报*, 1994(8):67-70

[8] 梁业国. 有自由面渗流分析的子单元法[J]. *水利学报*, 1997(8):18-26

[9] 凌道盛. 有自由面渗流分析的虚节点法[J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2002, **36**(3):243-246

[10] ZHENG H, LIU D F, LEE C F, *et al.* A new formulation of Signorini's type for seepage problems with free surface [J]. *Int J for Numer Methods in Eng*, 2005, **64**(1):1-16

[11] 陈万吉,李学文. 三维摩擦接触问题的混合不动点算法[J]. *大连理工大学学报*, 2001, **41**(1):29-34 (CHEN Wan-ji, LI Xue-wen. Mixed fixed point method for three dimensional frictional contact problems [J]. *J Dalian Univ Technol*, 2001, **41**(1): 29-34)

[12] PANG J S, QI Li-qun. Non-smooth equations motivation and algorithms [J]. *SIAM J Optim*, 1993(3):443-465

[13] QI Li-qun. Convergence analysis of some algorithms for sovling non-smooth equations [J]. *Math Oper Res*, 1993, **18**(1):227-244

[14] 张殿宙,顾鹤荣. 不动点定理[M]. 沈阳:辽宁教育出版社, 1989

[15] 张石生. 不动点理论及其应用[M]. 重庆:重庆出版社, 1984

[16] 胡毓达,孟志青. 凸分析与非光滑分析[M]. 上海:上海科技出版社, 2000

Mixed fixed-point FE method for seepage problems with free surfaces

WANG Jin-zhi^{*1,2}, CHEN Wan-ji¹, QI Shu-hua²

(1. State Key Lab. of Struct. Anal. for Ind. Equip. , Dalian Univ. of Technol. , Dalian 116024, China;
2. College of Sci. , Dalian Nationalities Univ. , Dalian 116600, China)

Abstract: Based on the Gauss point method for seepage problem with free surface, the non-smooth nonlinear equations model for seepage problem is proposed. At the same time, the mixed fixed-point finite element method is also presented, in which the finite element mesh is fixed. Only once grid mesh is needed and no approximate treatment of calculation data is needed by this method. The free surface can be calculated precisely through program iteration. The existence of the solution of non-smooth equations and the convergence of the proposed fixed-point method are discussed. Moreover, the free surface of seepage is plotted through interpolation of pressure intensity on the nodes. Numerical results show that the new method is simple and possesses rapid convergence rate. It also offers a theoretical basis for convergence analysis of iterative method.

Key words: seepage; free surface; fixed point; non-smooth nonlinear equations