

平面应变条件下两类有限元边坡稳定分析方法比较研究

赵 杰¹, 邵龙潭^{*2}

(1. 大连理工大学 土木水利学院, 辽宁 大连 116024;
2. 大连理工大学 工程力学系, 辽宁 大连 116024)

摘要: 对有限元边坡稳定分析方法中滑面应力分析法和强度折减法的安全系数定义进行了探讨, 指出这两类方法的安全系数定义都是从强度折减的概念出发, 与极限平衡方法中的安全系数定义概念上是一致的。在算例对比分析中, 基于非关联流动法则, 采用与经典摩尔-库仑准则相匹配的等效 D-P 准则, 在平面应变条件下, 对天然边坡(均质边坡、有下卧软弱层、有软弱夹层带)的稳定性进行了对比研究, 并同传统极限平衡方法进行了比较。研究表明, 两类有限元方法得到的安全系数大小以及相应滑动面形状和位置均十分接近, 滑面应力分析法不适于计算失稳边坡的安全系数。

关键词: 有限元边坡稳定分析; 安全系数定义; 滑面应力分析法; 强度折减法; 滑动面

中图分类号: TU457 文献标识码: A

0 引 言

边坡稳定性问题是土力学中 3 个经典问题之一, 也是岩土工程领域基本而重要的研究课题。就目前工程应用而言, 分析边坡稳定的方法主要还是极限平衡法。极限平衡法没有考虑土体内部的应力应变关系, 无法分析边坡破坏的发生和发展过程, 也不能考虑土体与支挡结构的共同作用及其变形协调。有限元法的优势在于它克服了极限平衡方法中将土条假设为刚体的缺点, 可以考虑土体的非线性(弹塑性)本构关系, 能模拟边坡的施工过程, 适用于任意复杂的边界条件^[1]。因此, 基于有限元分析的边坡稳定评价方法得到越来越广泛的应用。

目前, 基于有限元分析评价边坡稳定性的方法主要有两种类型:

(1) 滑面应力分析法^[2~9]。该方法以有限元应力分析为基础, 按潜在滑动面上土体整体或局部的应力条件, 应用不同的优化方法确定最危险滑动面。这种方法直接从极限平衡方法演变而来, 物理意义明确, 滑动面上的应力更加真实符合实际, 可以得到确定的最危险滑动面, 易于推广和工程应用; 它的不足之处是需要通过搜索计算确

定最危险滑动面。

(2) 强度折减法^[10~16]。它的基本原理是将土体强度指标 c 和 ϕ 同时除以一个折减系数, 得到一组新的 c' 和 ϕ' , 然后对边坡进行有限元分析, 通过不断增大折减系数使边坡达到临界破坏状态, 把此时的折减系数作为安全系数。强度折减法的优点是不需要事先假设滑动面的形式和位置, 可以考虑边坡的渐进破坏过程; 它的缺点在于破坏标准难以统一, 计算工作量比较大。

很少有学者研究这两类方法的差异性。进一步探讨和比较这两类方法关于安全系数的定义, 求得的安全系数的大小以及相应滑动面的形状和位置是非常有意义的。本文对这两类方法的安全系数定义进行探讨, 并基于非关联流动法则, 采用与 M-C 准则相匹配的等效 D-P 准则, 在平面应变条件下, 分别采用这两类方法, 对天然边坡的稳定性进行对比研究工作。

1 安全系数的定义

土体处于极限平衡状态有两个力学特征: 一是土体整体处于濒临破坏失稳状态; 二是岩土材料强度得到充分发挥。

收稿日期: 2006-02-15; 修回日期: 2007-09-28.
作者简介: 赵 杰(1980-), 男, 博士; 邵龙潭^{*}(1963-), 男, 教授, 博士生导师。

对于按设计要求正常工作的边坡,在其中任意一个潜在滑动面上土体都不会达到极限平衡状态. 因此,其稳定性评价可通过两种途径:一是增加荷载使边坡土体沿最不利潜在滑动面,即最危险滑动面,整体达到极限平衡状态,此时的荷载值称为极限荷载. 极限荷载与实际作用荷载的比值称为超载系数;二是折减土体的抗剪强度直到沿最不利潜在滑动面整体达到极限平衡状态,此时的折减系数可以称为土体的强度储备系数或安全系数.

传统的极限平衡条分法最早由 Pettersson 于 1916 年提出,他假设边坡稳定问题是一个平面应变问题,同时边坡处于极限平衡状态,并沿某一假定的滑动面发生滑动,计算中不考虑土条之间的作用力,安全系数是用滑动面上全部抗滑力矩与滑动力矩之比来定义的. 1955 年 Bishop^[17] 改变安全系数的定义,将其定义为沿整个滑动面的抗剪强度 τ_f 与实际产生的剪应力 τ 之比:

$$K_1 = \tau_f / \tau \tag{1}$$

这不仅使安全系数的物理意义更加明确,使用范围更广泛,也为以后非圆弧滑动分析及土条分界面上条间力的各种考虑方式奠定了基础.

随着有限元数值计算方法在岩土工程领域中的广泛应用,众多学者采用滑面应力分析法来研究边坡稳定问题,安全系数定义为

$$K_2 = \int_0^l \tau_f dl / \int_0^l \tau dl \tag{2}$$

其中 τ 是沿滑动面任一点的剪应力, τ_f 是该点法向应力对应的抗剪强度.

这一定义最早由 Kulhawy 提出. 按照这一定义分析边坡稳定时有两个明显的优点^[18], 其一是仅需对边坡进行一次非线性求解, 其二是能够考虑应力路径对边坡稳定性的影响. 邵龙潭等^[2] 从强度折减和极限平衡的概念出发, 明确指出按照式(2)定义的安全系数 K_2 表征着当边坡沿某一潜在滑动面整体达到极限平衡状态时土体抗剪强度折减系数的平均值, 适用于任意形状滑动面, 具有明确的物理意义, 它与极限平衡方法中安全系数的定义一致, 区别只是内力的计算方法不同.

Duncan^[19] 指出边坡安全系数可以定义为使边坡刚好达到临界破坏状态时, 对土体的抗剪强度进行折减的程度, 即定义安全系数是土的实际剪切强度与临界破坏时折减后的抗剪强度的比值, 这一定义实质上与 Zienkiewicz 在 1975 年给出的定义(本文称之为 K_3)是一致的.

在有限元数值分析中, 对于域内某一点, 假定

在某个潜在滑动面上一点土体的正应力与剪应力分别为 σ_n 和 τ , 则按照 Bishop 安全系数的一般定义, 同时考虑到该点的抗剪强度可用 Mohr-Coulomb (M-C) 破坏准则表示为

$$\tau_f = c + \sigma_n \tan \phi \tag{3}$$

则该点土体在这个预定剪切面上的安全系数为

$$K_3 = \frac{\tau_f}{\tau} = \frac{c + \sigma_n \tan \phi}{\tau} \tag{4}$$

由此可知实际中得以发挥的抗剪强度相当于由折减后的抗剪强度指标所提供. 折减后的抗剪强度指标分别为

$$c' = \frac{c}{K_3}; \phi' = \arctan \left(\frac{\tan \phi}{K_3} \right) \tag{5}$$

从这个意义上 K_3 可以看做强度折减系数, 可见, 强度折减法是将强度折减概念、极限平衡原理与弹塑性有限元计算原理相结合, 首先对于某一给定的强度折减系数, 通过有限元数值计算确定边坡内的应力场、应变场或位移场, 并且对应力、应变或位移的某些分布特征以及有限元计算过程中的某些数学特征进行分析, 不断增大折减系数, 直至根据对这些特征的分析结果表明边坡已经发生失稳破坏, 将此时的折减系数定义为边坡的稳定安全系数.

至此, 两类有限元边坡稳定分析方法的安全系数定义都是从强度折减出发, 与极限平衡方法中的安全系数定义概念上是一致的.

2 土体强度屈服准则及其转化

岩土体的本构关系采用理想弹塑性模型, 屈服准则为 Drucker-Prager(D-P) 准则, 其表达式为

$$F = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} = k \tag{6}$$

式(6)是一个岩土类材料通用的表达式, 其中 I_1 为应力张量第一不变量; J_2 为应力偏量第二不变量; α, k 为与岩土材料强度参数 c, ϕ 有关的常数, 通过变换 α, k 的表达式就可以在有限元中实现不同的屈服准则. 当采用非关联流动法则时($\varphi = 0$)

$$\alpha = \frac{\sin \phi}{3}; k = c \cos \phi \tag{7}$$

赵尚毅等^[11~13] 认为在平面应变条件下, 该准则与 M-C 准则精确匹配, 实质上它仍属广义 Mises 准则.

3 算例对比研究

本文基于非关联流动法则, 采用与 M-C 准则

精确匹配的 D-P 准则,分别采用滑面应力分析法和强度折减法这两类有限元边坡稳定分析方法,在平面应变条件下对天然边坡(均质边坡、有下卧软弱层、有软弱夹层带)的稳定性进行对比研究工作,并同极限平衡方法进行比较。

滑面应力分析法采用岩土工程专业有限元软件 Z_Soil^[20] 计算边坡土体的应力场,以 Hooke-Jeeveese 模式搜索法搜索最小安全系数及相应的最危险滑动面;强度折减法分别采用大型通用有限元软件 ANSYS 以及岩土工程专业有限元软件 Z_Soil,以有限元数值计算是否收敛作为边坡失稳破坏标准;极限平衡方法采用加拿大 Geo-Slope 公司的边坡稳定分析软件 Slope/W。

3.1 均质边坡

某均质土坡,如图 1 所示,坡高 $H = 20\text{ m}$,内摩擦角 $\phi = 17^\circ$,容重分别取 20 kN/m^3 和 25 kN/m^3 ,粘聚力 $c = 42\text{ kPa}$,计算坡角 $\beta = 30^\circ$ 、 35° 、 40° 、 45° 、 50° 时边坡的安全系数。

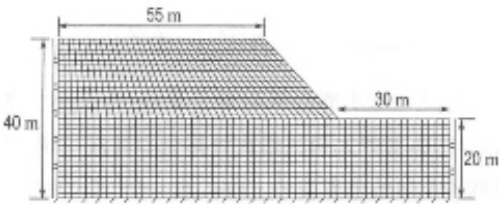


图 1 有限元单元网格划分
Fig. 1 FEM meshes

取坡体底边界为固定约束,左右边界为水平约束,其他边界自由。

从表 1 可知,两类有限元方法得到的安全系数非常一致,相差仅在 1% 左右。与传统极限平衡方法(Bishop、Spencer)结果相比,也非常接近。

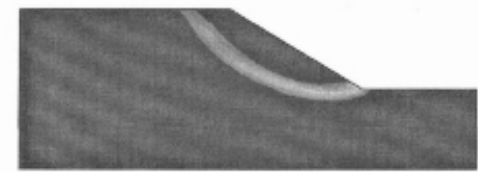
表 1 用不同方法求得的安全系数(均质边坡)
Tab. 1 Safety factors by different methods (homogeneous slope)

方法	$\gamma = 20\text{ kN/m}^3$				
	30°	35°	40°	45°	50°
① 滑面应力法	1.570	1.437	1.330	1.230	1.140
② ANSYS	1.560	1.420	1.310	1.210	1.120
③ Z_Soil	1.560	1.420	1.310	1.220	1.130
④ Bishop 法	1.556	1.416	1.302	1.204	1.118
⑤ Spencer 法	1.553	1.413	1.300	1.204	1.120

方法	$\gamma = 25\text{ kN/m}^3$				
	30°	35°	40°	45°	50°
① 滑面应力法	1.408	1.287	1.178	1.075	1.007
② ANSYS	1.390	1.270	1.160	1.060	1.000
③ Z_Soil	1.390	1.260	1.150	1.070	1.000
④ Bishop 法	1.396	1.263	1.154	1.064	0.985
⑤ Spencer 法	1.392	1.260	1.152	1.063	0.985

注:方法 ② 列出的为赵尚毅等采用 ANSYS 软件计算的结果

图 2 给出了坡角 $\beta = 30^\circ$ 时不同方法得到的滑动面,可以看出,滑动面的形状和位置也非常一致。



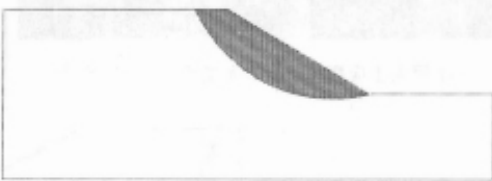
(a) 用大主应变剪切带表示的滑动面(Z_Soil)



(b) 用等效塑性应变剪切带表示的滑动面(ANSYS)



(c) 用滑面应力分析法搜索得到的滑动面



(d) 用 Slope/W 中 Spencer 法得到的滑动面

图 2 坡角 30° 下滑动面形状比较

Fig. 2 The critical slip surface under angle 30°

3.2 有下卧软弱层边坡

采用文献[16]的算例,如图 3 所示,某黏土边坡分上下两层, $\phi_u = 0$,上层黏土 $c_{u1}/\gamma H = 0.25$,

下层黏土 c_{u2} 为变量。随着 c_{u2}/c_{u1} 的变化,安全系数的大小及相应滑动面的形状也随之变化。当 $c_{u2}/c_{u1} < 1.5$ 时,滑动面贯穿通过基础土层,发生

“深层”滑动;当 $c_{u2}/c_{u1} > 1.5$ 时,滑动面通过上部土层,发生“浅层”滑动;在 $c_{u2}/c_{u1} \approx 1.5$ 时,滑动面的位置发生了突变,会同时出现“深层”和“浅层”两个潜在滑动面,用滑面应力分析法搜索到两条安全系数非常接近的滑动面,采用强度折减法会出现两条塑性区域贯通的滑动带。

表 2 列出的是不同 c_{u2}/c_{u1} 条件下两类有限元方法及极限平衡方法的计算结果,可以看出滑面应力分析法同强度折减法以及极限平衡方法得到的安全系数非常接近。

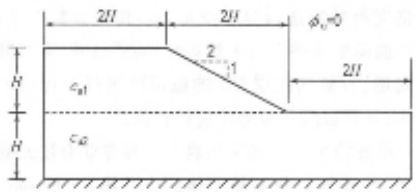


图 3 有下卧软弱层的黏土边坡

Fig. 3 Undrained clay slope with a weak foundation layer

表 2 不同方法求得的安全系数(有下卧软弱层边坡)

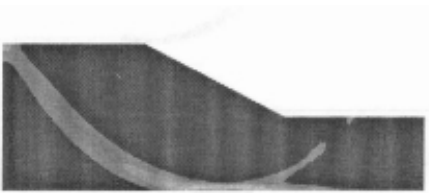
Tab. 2 Safety factors by different methods (slope with a weak foundation layer)

方法	c_{u2}/c_{u1}						
	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
① 滑面应力法	—	1.158	1.455	1.746	2.015	2.016	2.010
② ANSYS	0.850	1.150	1.450	1.750	2.020	2.020	2.025
③ Z_Soil	0.860	1.160	1.455	1.755	2.030	2.065	2.065
④ Bishop 法	0.873	1.186	1.496	1.795	2.034	2.034	2.034
⑤ Spencer 法	0.878	1.181	1.482	1.781	2.023	2.023	2.023

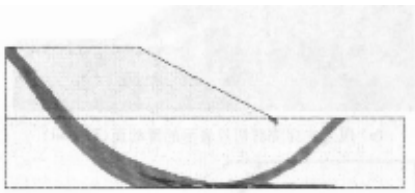
图 4 ~ 6 分别给出了在 $c_{u2}/c_{u1} = 1.0、1.5、2.0$ 条件下不同方法得到的滑动面,可以看出各种方法得到的滑动面形状和位置非常接近。

需要指出的是,当边坡安全系数小于 1 时,采用滑面应力分析法时,有限元非线性求解不收敛,也就是说对于失稳的边坡,土体已经发生破坏,此时将得不到真实正确的应力场,也就无法采用滑

面应力分析法求解边坡的安全系数;当采用强度折减法时,有限元初次迭代计算也不收敛,此时可以调整土体的强度指标 c 和 ϕ ,取一个“ $K < 1$ ”的折减系数,也就是说增大土体的强度指标,直至有限元数值计算刚好收敛为止,此时的折减系数就是边坡的安全系数。



(a) 用大主应变剪切带表示的滑动面(Z_Soil)



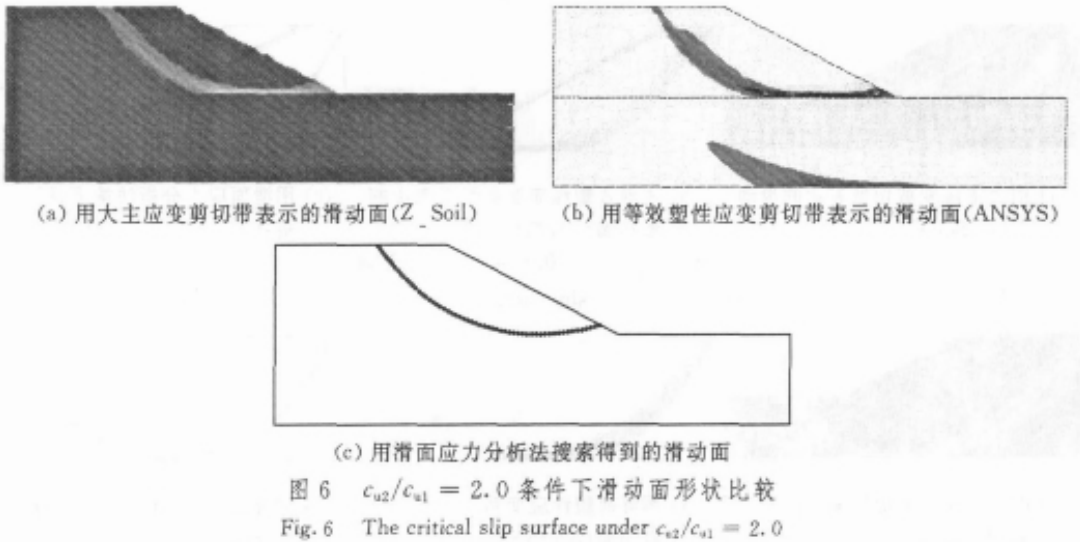
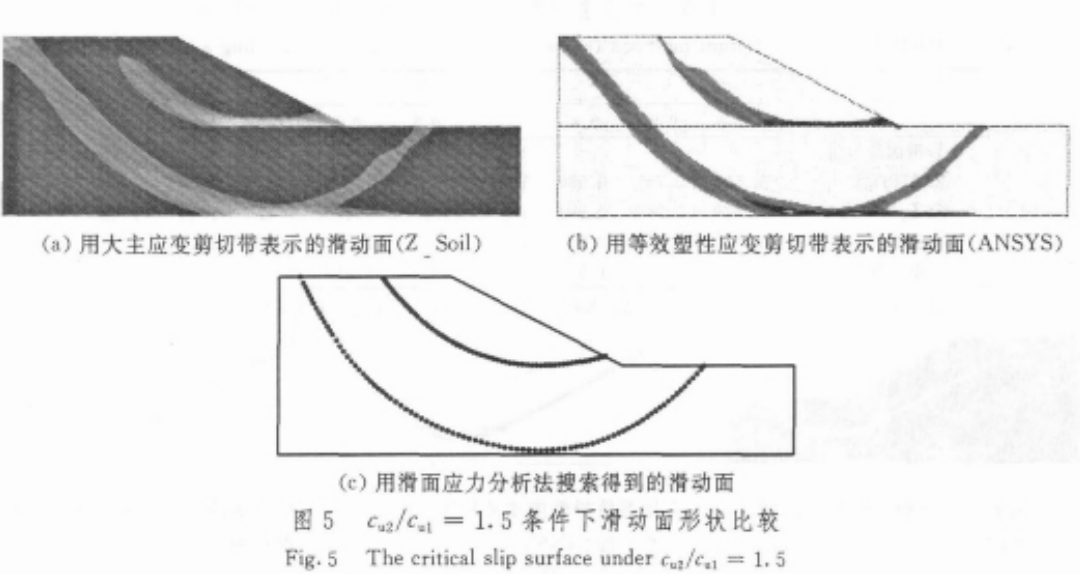
(b) 用等效塑性应变剪切带表示的滑动面(ANSYS)



(c) 用滑面应力分析法搜索得到的滑动面

图 4 $c_{u2}/c_{u1} = 1.0$ 条件下滑动面形状比较

Fig. 4 The critical slip surface under $c_{u2}/c_{u1} = 1.0$



3.3 有软弱夹层的边坡

这个同样是文献[16]的算例,如图 7 所示,该黏土边坡中间有一软弱夹层带, $c_{u1}/\gamma H = 0.25$. 夹层的粘聚力 c_{u2} 为变量. 随着 c_{u2}/c_{u1} 的变化,安全系数及相应的滑动面也随之变化. 当 $c_{u2}/c_{u1} > 0.6$ 时,滑动面贯穿过边坡底部,发生“深层”滑动;当 $c_{u2}/c_{u1} < 0.6$ 时,滑动面主要通过软弱夹层带;当 $c_{u2}/c_{u1} \approx 0.6$ 时,滑动面的位置发生了突变,会出现“深层”滑动和“通过软弱夹层带”滑动两条安全系数非常接近的滑动面.

表 3 列出的是不同 c_{u2}/c_{u1} 条件下的安全系数计算结果,极限平衡方法中假定滑动面为圆弧和三段折线组成的滑动面. 可以看出滑面应力分析法同强度折减法得到的安全系数非常接近,而极限平衡方法在某些情况下不能得到正确的解.

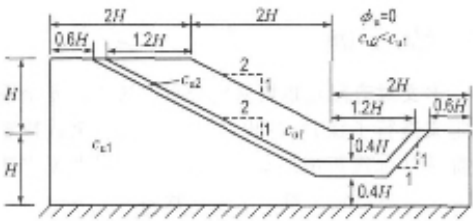


图 7 有软弱夹层的黏土边坡

Fig. 7 Undrained clay slope with a foundation layer including a thin weak layer

图 8 ~ 10 分别给出了在 $c_{u2}/c_{u1} = 0.5, 0.6, 1.0$ 条件下两类有限元方法得到的滑动面. 可以看出滑动面形状和位置非常接近.

表 3 不同方法得到的安全系数计算结果(有软弱夹层的边坡)

Tab. 3 Safety factors by different methods (slope with a foundation layer including a thin weak layer)

方法	c_{u2}/c_{u1}								
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
① 滑面应力法	—	—	—	1.166	1.373	1.409	1.430	1.446	1.456
② ANSYS	0.514	0.745	0.980	1.205	1.365	1.405	1.425	1.445	1.450
③ Z ₋ Soil	0.520	0.750	0.990	1.215	1.370	1.400	1.420	1.440	1.455
④ 折线法	0.480	0.732	0.973	1.210	1.459	1.702	1.946	2.170	2.388
⑤ 圆弧法	1.246	1.303	1.338	1.364	1.390	1.413	1.438	1.459	1.482

注:④折线法采用的是极限平衡方法中的 Morgenstern-Price 法,⑤圆弧法采用的是 Spencer 法

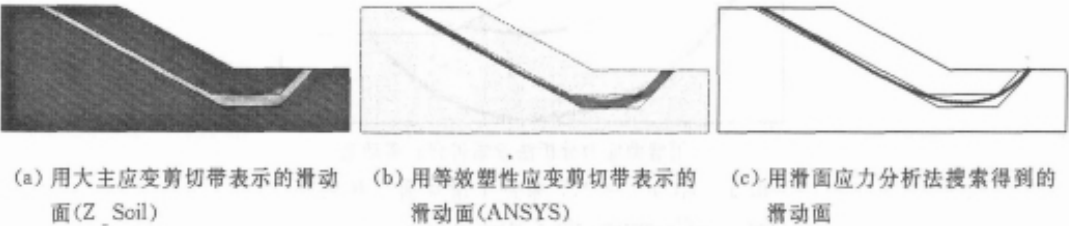


图 8 $c_{u2}/c_{u1} = 0.5$ 条件下的滑动面

Fig. 8 The critical slip surface under $c_{u2}/c_{u1} = 0.5$

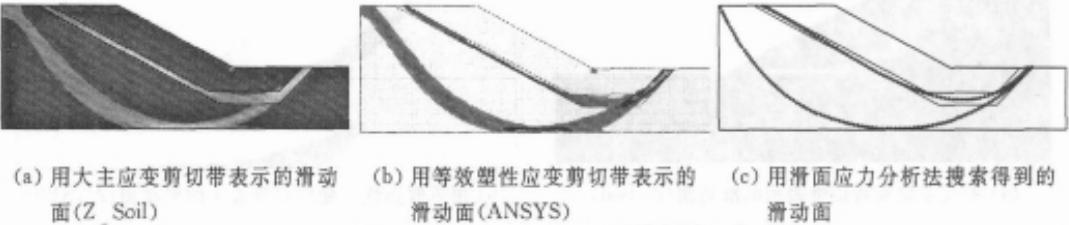


图 9 $c_{u2}/c_{u1} = 0.6$ 条件下的滑动面

Fig. 9 The critical slip surface under $c_{u2}/c_{u1} = 0.6$

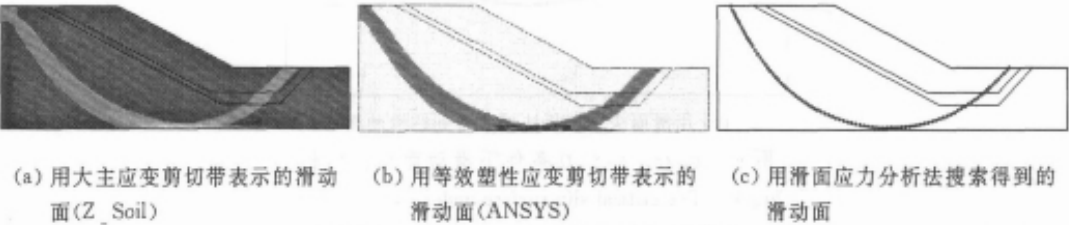


图 10 $c_{u2}/c_{u1} = 1.0$ 条件下的滑动面

Fig. 10 The critical slip surface under $c_{u2}/c_{u1} = 1.0$

4 结 语

本文对有限元边坡稳定分析方法中的安全系数定义进行了探讨,指出两类方法的安全系数定义都是从强度折减的概念出发,与极限平衡方法中的安全系数定义概念上是一致的。

在算例分析中,基于非关联流动法,采用与经典 M-C 准则相匹配的等效 D-P 准则,在平面应变条件下,对天然边坡(均质边坡、有下卧软弱层、有软弱夹层带)的稳定性进行了对比研究工作,并同极限平衡方法进行比较。研究表明,采用滑面应力分析法和强度折减法得到的安全系数大小以及相应滑动面形状和位置均十分接近。在均质边坡条件下,这两类有限元方法与极限平衡方法的

结果也十分接近;在边坡含有软弱夹层带时,极限平衡方法在某些情况下难以获得正确解。

对于失稳的边坡,土体已经发生破坏,此时将得不到真实正确的应力场,也就无法采用滑面应力分析法求解边坡的安全系数;当采用强度折减法时,有限元初次迭代计算也不收敛,此时可以调整土体的强度指标 c 和 ϕ ,取一个“ $K < 1$ ”的折减系数,也就是说增大土体的强度指标,直至有限元数值计算刚好收敛为止,此时的折减系数就是边坡的安全系数。

对于复杂地质地貌、地下水影响、有支挡结构作用的边坡,两类有限元边坡稳定分析方法计算结果的差异性有待进一步研究。

参考文献：

[1] 史恒通,王成华. 土坡有限元稳定分析若干问题探讨[J]. 岩土力学,2000,21(2):152-155

[2] 邵龙潭,唐洪祥,韩国城. 有限元边坡稳定分析方法及其应用[J]. 计算力学学报,2001,18(1):81-87

[3] 王成华,夏绪勇,李广信. 基于应力场的土坡临界滑动面的蚂蚁算法搜索技术[J]. 岩石力学与工程学报,2003,22(5):813-819

[4] FREDLUND D G, SCOUULAR R E G. Using limit equilibrium concepts in finite element slope stability analysis [C] // YAGI N, YAMAGAMI T, JIANG J C. *Proceedings of the International Symposium on Slope Stability Engineering*. Rotterdam: Balkema, 1999: 31-47

[5] ZOU J Z, WILLIAMS D J, XIONG W L. Search for critical slip surface based on finite element method [J]. *Can Geotech*, 1995, 32(1): 233-246

[6] GIAM S K , DONALD I B. Determination of critical slip surfaces for slopes via stress-strain calculations [C] // *Proceedings of the 5th Australia-New Zealand Conference Geomechanics*. Sydney: [s n], 1998: 461-464

[7] KIM J Y, LEE S R. An improved search strategy for the critical slip surface using finite element stress fields [J]. *Comput and Geotech*, 1997, 22(4): 295-313

[8] PHAM H T A, FREDLUND D G, XIONG W L. The application of dynamic programming to slope stability analysis [J]. *Can Geotech J*, 2003, 40(4): 830-847

[9] 殷宗泽,吕擎峰. 圆弧滑动有限元土坡稳定分析[J]. 岩土力学,2005,26(10):1525-1529

[10] 张鲁渝,时卫民,郑颖人. 平面应变条件下土坡稳定有限元分析[J]. 岩土工程学报,2002,24(4): 487-490

[11] 赵尚毅,郑颖人,张玉芳. 极限分析有限元法讲座-II 有限元强度折减法中边坡失稳的判据探讨[J]. 岩土力学, 2005, 26(2):332-336

[12] UGAI K. A method of calculation of total factor of safety of slope by elasto-plastic FEM [J]. *Soils and Foundations*, 1989, 29(2): 190-195

[13] MATSUI T, SAN K C. Finite element slope stability analysis by shear strength reduction technique [J]. *Soils and Foundations*, 1992, 32(1): 59-70

[14] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite element [J]. *Geotechnique*, 1999, 49(3): 387-403

[15] DAWSON E M, ROTH W H, DRESCHER A. Slope stability analysis by strength reduction [J]. *Geotechnique*, 1999, 49(6): 835-840

[16] 宋二祥. 土工结构安全系数的有限元计算[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(2): 1-7

[17] BISHOP A W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes [J]. *Geotechnique*, 1955, 5(1): 7-17

[18] 郑 宏,田 斌,刘德富,等. 关于有限元边坡稳定性分析中安全系数的定义问题[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(13): 2225-2230

[19] DUNCAN J M. State of the art: limit equilibrium and finite-element analysis of slopes [J]. *J Geotech and Geoenviron Eng, ASCE*, 1996, 122(7): 577-596

[20] Zace Services Ltd. Z_ SOIL.PC. 2001. User manual [R] // Report 1985-2001. Lausanne: Elmeppress International, 2001

Comparison of two kinds of finite element methods for slope stability analysis under plane strain condition

ZHAO Jie¹, SHAO Long-tan^{*2}

(1. School of Civil and Hydraul. Eng. , Dalian Univ. of Technol. , Dalian 116024, China; 2. Dept. of Eng. Mech. , Dalian Univ. of Technol. , Dalian 116024, China)

Abstract: The two kinds of definitions of safety factor in slope stability analysis by FEM (finite element method) were discussed, and it was indicated that the two definitions, which were based on the conception of strength reduction, were consistent with the definition in limit equilibrium method. In the analysis of examples, D-P yield criterion which is transformed from and matches precisely M-C criterion is used to analyze the stability of natural slope (homogeneous slope, undrained clay slope with a weak foundation layer, undrained clay slope with a foundation layer including a thin weak layer) under the plane strain condition. The results show that the shapes of critical slip surface and the magnitude of safety factor are very similar with those obtained by the two kinds of methods. It is also pointed out that the slip surface stress analysis method does not suit with calculating the safety factor of the instability slope.

Key words: slope stability analysis by FEM; definition of safety factor; slip surface stress analysis method; strength reduction method; slip surface