

实指数幂多元牛顿变换的 Julia 集

王兴元*, 王婷婷

(大连理工大学 电子与信息工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 阐述了多元牛顿变换的 Julia 集理论, 给出了多元牛顿迭代法, 推广了 Motyka 和 Reiter 的工作, 构造并研究了实指数幂多元牛顿变换的 Julia 集. 结果发现: 随参数 β 值增大, 实指数幂多元牛顿变换的 Julia 集有一个突变, 表现为吸引域的个数加 1; 多元牛顿变换 Julia 集的吸引域的结构取决于初始点的选取; 实指数幂多元牛顿变换 Julia 集的结构, 依赖于相角 θ 主值范围的选取; 多元牛顿变换的 Julia 集具有对称性.

关键词: 多元牛顿变换; Julia 集; 突变; 相角; 对称性

中图分类号: TP301.5 **文献标识码:** A

0 引言

分形理论是数学家 Mandelbrot 为描述所有尺度上复杂结构的不规则、破碎形状而创造的^[1,2]. 目前, 分形理论发展极其迅速, 新成果层出不穷, 用计算机绘制分形的理论与算法也日新月异, 并已成为一个独立的研究方向^[2~4]. 牛顿迭代法是求解非线性方程的一种常用数值方法^[5], Cayley 曾将其推广到复数域, 分析了方程 $x^3 - 1 = 0 (x \in \mathbb{C})$ 解的特性, 并开创了分形学中牛顿变换的 Julia 集这一研究领域^[6]. 为揭示这种分形集的更深刻内容, 文献^[6~17]先后采用了迭代法和逃逸时间算法构造并研究了牛顿变换的 Julia 集; 文献^[18]又构造了整指数幂多元牛顿变换的 Julia 集. 本文推广文献^[18]的研究工作, 利用迭代法构造并研究实指数幂多元牛顿变换的 Julia 集.

1 理论与方法

对于非线性方程 $F(X) = 0$, 这里 $X = (x_1 \cdots x_n)$, $F = (F_1 \cdots F_n)$, 且 $F_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是复变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的光滑函数, 给定初始复矢量 X^0 , 可得迭代公式

$$X^{n+1} = X^n - J(X^n)^{-1}F(X^n),$$

$$J = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) (i, j = 1, 2, \cdots, n) \quad (1)$$

这里 J 为 F 的 Jacobian 矩阵, 称式(1)为相应于函数 $F(X)$ 的牛顿迭代. 定义有理函数 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(X) = X - J(X)^{-1}F(X) \quad (2)$$

称 $f(X)$ 为相应于函数 $F(X)$ 的牛顿变换. 与实系数的情形类似, 如果 $J(X) \neq 0$, 则 X^* 是方程 $F(X) = 0$ 的根的充分必要条件是 $f(X^*) = X^*$, 即 X^* 是相应的牛顿变换函数的不动点.

若 $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^m (m \geq 2)$, 如果 $f(\omega) = \omega$, 则称 ω 为 f 的不动点; 如果存在大于 1 的最小整数 p , 使 $f^p(\omega) = \omega$, 则称 ω 是 f 的周期为 p 的周期点. 令复变微商 $(f^p)'(\omega) = \lambda$, 若 $\lambda = 0$, 则称点 ω 为超吸引的; 若 $0 < |\lambda| < 1$, 则称点 ω 为吸引的; 若 $|\lambda| = 1$, 则称点 ω 为中性的; 若 $|\lambda| > 1$, 则称点 ω 为斥性的. 由式(2)得

$$f'(X) = F(X)J^2(X)/[J(X)]^2 \quad (3)$$

所以, 如果 $J(X^*) \neq 0$, 则 $F(X)$ 的零点 X^* 是 f 的超吸引不动点; 因为 $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$, 当 $|X|$ 较大时

$$f(X) \sim X \left(1 - \frac{1}{m} \right)$$

故可知 ∞ 点是 f 的不动点, 又对于较大的 $|X|$, 有

$$|f'(X)| \sim \frac{m(m-1)}{m^2} = 1 - \frac{1}{m} < 1$$

所以 ∞ 是 f 的吸引不动点. 记

$$A(X^*) = \{X; f^n(X) \rightarrow X^*, (n \rightarrow \infty)\}$$

表示 $F(X)$ 的零点 X^* 的吸引域,即在牛顿变换迭代下收敛于 X^* 的点集. 因为 X^* 是 f 的超吸引不动点,所以吸引域 $A(X^*)$ 是包含 X^* 的开区域.

考虑有理函数 $f(X)$ 的 Julia 集,上述多项式函数的 Julia 集理论依然成立,主要区别是,若 f 是有理函数,它的 Julia 集 J_f 不一定有界(但肯定是闭的). 但对于每一个吸引不动点 ω , J_f 都是 $A(\omega)$ 的边界,所以分析牛顿法的根的吸引域, J_f 当然是一个重要的对象. 对于阶数大于 2 的高阶多项式 $F(X)$,如果 F 的零点是 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, 且 $J(\omega_i)^{-1} \neq 0$, 则牛顿变换 f 的 Julia 集应当是每个零点的吸引域的边界

$$J_f = \partial A(\omega_1) = \dots = \partial A(\omega_n)$$

一个在任何一个吸引域边界上的点,也一定在其他所有吸引域的边界上,而且由于 Julia 集 J_f 是不可数的,这样的多重边界点非常之多. 乍看起来,这是很难想象,实际上也是相当奇异的.

定理 1^[19] Julia 集 J_f 为多项式 f 的斥性周期点的闭包,它是不含孤立点的不可数紧子集,如果 $X \in J_f$, 则 J_f 是 $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(X)$ 的闭包. Julia 集是 f 的包含无穷远点在内的每一吸引不动点的吸引域的边界,而且 f 在 J_f 上的作用是混沌的.

构造 $F(X)$ 相应的二维平面牛顿变换 Julia 集的迭代法如下: (1) 设定视窗 $W(W \subset Z), \exists z \in W$, 选取初值 $X^0 = (z \dots z)$ 或 $X^0 = (z \dots c)$, 其中复变量 z 为迭代初始点的坐标, c 为一复常量. (2) 由式(1)计算 $X^k(k=0, 1, \dots, N; \text{本文取 } N=254)$, 若 $|F(X^k)| \leq e$ (e 为误差范围, 本文取 $e=10^{-8}$), 则认为 X^k 的值为方程 $F(X)=0$ 的根, 并根据 k 值及收敛到的根的不同赋予 z 点相应的颜色; 若 $|\operatorname{Re}(X^k)| > 10^{100}$ 或 $|\operatorname{Im}(X^k)| > 10^{100}$, 或迭代次数 $k > 254$, 仍有 $|F(X^k)| > e$, 则迭代算法失败, 赋予 z 点为白色. 作者使用不同的主色来区分不同的吸引域, 在同一吸引域中将收敛的迭代次数 k 取模 3, 即使用 3 种相似的颜色来展现同一吸引域的结构. (3) 重复过程(2), 直到穷尽视窗 W 内所有的点, 即可获得真彩色的

多元牛顿变换的 Julia 集. 由定理 1 可知: 有理函数的 Julia 集是与所有不动点相关的稳定区的边界, 因此多元牛顿变换的 Julia 集是按该方法所构造分形图中与各彩色区域相关的边界.

2 实验与结果

本文将 Motyka 和 Reiter 的非线性方程组推广为如下形式:

$$\begin{cases} x_1^\alpha x_2^\beta - 1 = 0 \\ x_1^p - x_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

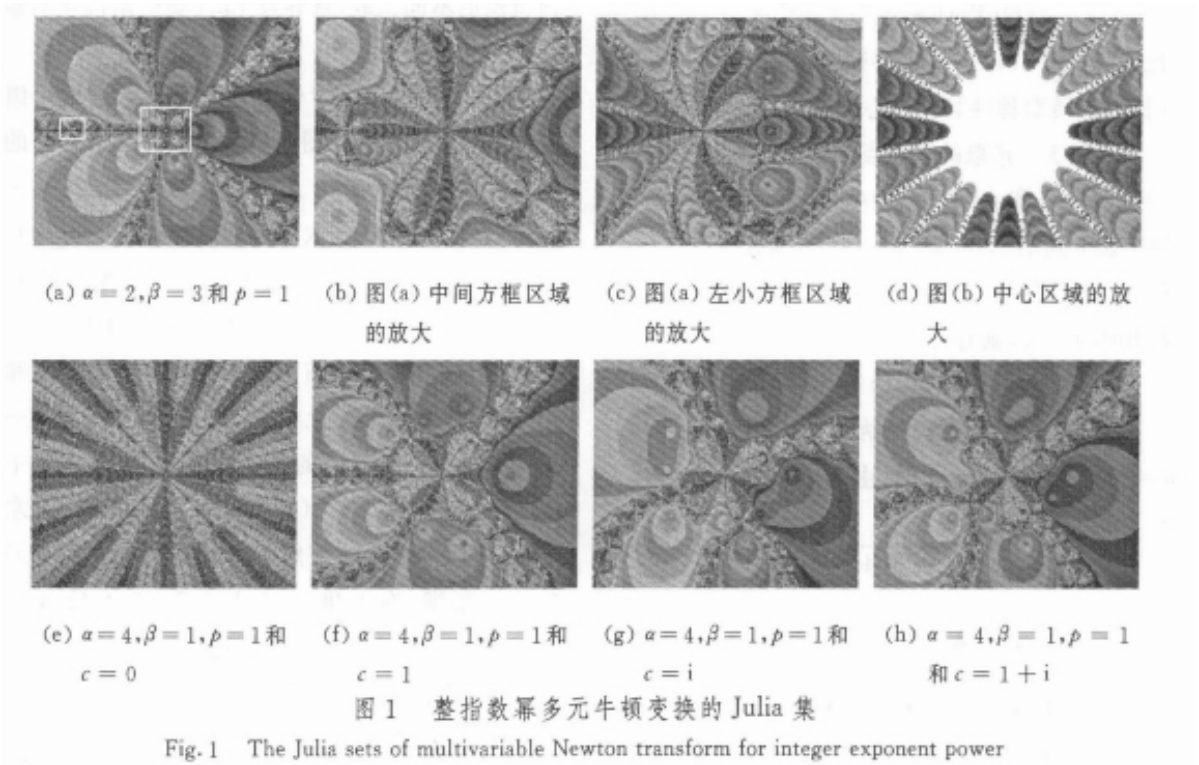
这里 $\alpha + \beta p = q (\alpha, \beta, p, q \in \mathbf{R})$. 根据式(4)对应的牛顿变换 Julia 集的结构特点, 可分两种情况来研究.

2.1 α, β, p 和 q 为整数

Motyka 和 Reiter 仅研究了 $q=5$ 且 α, β 和 p 为正整数的情况. 取 $\alpha=2, \beta=3, p=1$ 或 $\alpha=4, \beta=1, p=1$, 采用上述迭代算法作者构造出式(4)对应的牛顿变换的 Julia 集, 图 1 为具有代表性的几例. 其中图 1(a) 选取的初始点为 $X^0 = (z \dots z)$, 坐标范围: 左上角 $-5 + 4i$, 右下角 $5 - 4i$; 图 1(e) ~ 1(h) 选取的初始点为 $X^0 = (z \dots c)$, 坐标范围: 左上角 $-2 + 1.6i$, 右下角 $2 - 1.6i$.

图 1(a) 给出了 5 个具有旋转对称性的吸引域, 它们分别对应于方程(4)的 5 个根 $X_1^* = 1$, $X_2^* = e^{i2\pi/5}$, $X_3^* = e^{i4\pi/5}$, $X_4^* = e^{i6\pi/5}$ 和 $X_5^* = e^{i8\pi/5}$. 牛顿变换的 Julia 集应是这 5 个吸引域的边界^[19], 由图 1(a) 可见 Julia 集是由原点出发的 5 个“链”组成. 在这些链上, 各种颜色区域彼此相间, 提高放大倍率(图 1(b) 和 1(c)), 将会看到各种颜色区域的边界是分形的, 即有任意小比例的精细结构, 任意接近 J_f 的每一点附近的图形, 都是原点附近图形的“轻微变形”(图 1(b) 和 1(c) 相比较), Julia 集表现了拟自相似性. 将图 1(b) 的中心区域放大 3 500 000 倍得到图 1(d), 由图 1(d) 可见, 原点的小邻域为白色, 即对应发散区.

选取初始点 $X^0 = (z \dots c)$, 改变 c 值可得到不同的 Julia 集(如图 1(e) ~ 1(h) 所示). 这是因为: 牛顿迭代为一种局部搜索算法, 某个根的吸引域取决于所选定的初始点. 参数 $\alpha=4, \beta=1$ 和 $p=1$ 时, 可求出 $q=5$, 但图 1(e) ~ 1(h) 并不同于图 1(a), 它们不具有 5 倍的旋转对称性.



定理 2 选取的初始点为 $X^0 = (z \ z)$, 参数 $\alpha = 2, \beta = 3$ 和 $p = 1$ 时, 式(4) 对应的牛顿变换的 Julia 集不但关于 x 轴对称, 而且还具有 5 倍的旋转对称性.

证明 利用数学归纳法, 采用矩阵运算形式, 由式(1) 及式(4) 知

$$f(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} & \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} \\ p x_1^{p-1} & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} - 1 \\ x_1^p - x_2 \end{pmatrix}$$

化简后可得

$$f(X) = \frac{1}{\beta p x_1^p + \alpha x_2} \times \begin{pmatrix} (\alpha + \beta - 1)x_1 x_2 + \beta p x_1^{p+1} + x_1^{1-\alpha} x_2^{1-\beta} - \beta x_1^{p+1} \\ (\beta p + \alpha - p)x_1^p x_2 + p x_1^{p-\alpha} x_2^{1-\beta} \end{pmatrix} \tag{5}$$

当 $X^0 = (z \ z), \alpha = 2, \beta = 3$ 和 $p = 1$ 时, 由式(5) 可得出

$$f^1(X^0) = \frac{1}{5z^4} \begin{pmatrix} 4z^5 + 1 \\ 4z^5 + 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

故可得出

$$f(X^0) = \overline{f(\overline{X^0})}$$

令 $f^{k-1}(X^0) = \overline{f^{k-1}(\overline{X^0})} (k = 1, 2, \dots, N)$ 成立, 又 $f^k(X^0) = f^{k-1}[f(X^0)] = \overline{f^{k-1}[\overline{f(X^0)}]} =$

$$\overline{f^{k-1}[f(\overline{X^0})]} = \overline{f^k(\overline{X^0})}$$

所以图 1(a) 给出的牛顿变换的 Julia 集关于 x 轴对称.

由式(6) 还可得出

$$f^1(X^0 e^{i\frac{2\pi j}{5}}) = \frac{1}{5z^4 e^{i\frac{8\pi j}{5}}} \begin{pmatrix} 4z^5 e^{i2\pi j} + 1 \\ 4z^5 e^{i2\pi j} + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5z^4} \begin{pmatrix} 4z^5 + 1 \\ 4z^5 + 1 \end{pmatrix} e^{i\frac{2\pi j}{5}} (j = 0, 1, \dots, 4)$$

故有

$$|f^1(X^0)| = |f^1(X^0 e^{i\frac{2\pi j}{5}})|$$

设 $|f^{k-1}(X^0)| = |f^{k-1}(X^0 e^{i\frac{2\pi j}{5}})| (k = 1, 2, \dots, N)$ 成立

$$f^k(X^0 e^{i\frac{2\pi j}{5}}) = f^{k-1}[f(X^0 e^{i\frac{2\pi j}{5}})] = f^{k-1} \left[\frac{1}{5z^4} \begin{pmatrix} 4z^5 + 1 \\ 4z^5 + 1 \end{pmatrix} e^{i\frac{2\pi j}{5}} \right]$$

令

$$f^1(X^0) = \frac{1}{5z^4} \begin{pmatrix} 4z^5 + 1 \\ 4z^5 + 1 \end{pmatrix} = X'$$

则

$$f^k(X^0 e^{i\frac{2\pi j}{5}}) = f^{k-1}(X' e^{i\frac{2\pi j}{5}})$$

而 $f^k(X^0) = f^{k-1}[f^1(X^0)] = f^{k-1}(X')$, 又 $|f^{k-1}(X')| = |f^{k-1}(X' e^{i\frac{2\pi j}{5}})|$

因而

$$|f^k(X^0)| = |f^k(X^0 e^{i\frac{2\pi j}{5}})|$$

上式说明图 1(a) 给出的牛顿变换的 Julia 集具有 5 倍的旋转对称性且其中心为原点。

定理 3 选取的初始点为 $X^0 = (z \ c)$, 参数 $\alpha = 4, \beta = 1$ 和 $p = 1$ 时, 由牛顿迭代法构造式 (4) 的牛顿变换的 Julia 集, 若 $c = 0$, 则有

$$f^k(X^0) = \overline{f^k(\overline{X^0})} = \overline{f^k(-\overline{X^0})} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

若 $\text{Im}(c) = 0$, 则有

$$f^k(X^0) = \overline{f^k(\overline{X^0})} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

证明 利用数学归纳法: 当 $X^0 = (z \ c)$, $\alpha = 4, \beta = 1$ 和 $p = 1$ 时, 由式 (5) 可得出

$$f^1(X^0) = \frac{1}{z^3(z + 4c)} \begin{pmatrix} 4z^4 + 1 \\ 4z^4c + 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

当 $c = 0$ 时, 由 $f(X^0) = \begin{pmatrix} z^{-4} \\ z^{-4} \end{pmatrix}$, 故有

$$f(X^0) = \overline{f(\overline{X^0})} = \overline{f(-\overline{X^0})}$$

令 $f^{k-1}(X^0) = \overline{f^{k-1}(\overline{X^0})} = \overline{f^{k-1}(-\overline{X^0})}$ 成立, 又

$$f^k(X^0) = f^{k-1}[f(X^0)] = \overline{f^{k-1}[\overline{f(X^0)}]} = \overline{f^{k-1}[\overline{f(\overline{X^0})}]} = \overline{f^k(\overline{X^0})}$$

同理

$$f^k(X^0) = \overline{f^k(-\overline{X^0})}$$

当 $\text{Im}(c) = 0$ 时, 有 $c = \bar{c}$. 由式 (7) 可知 $f(X^0) = \overline{f(\overline{X^0})}$, 模仿上述证明过程, 易证

$$f^k(X^0) = \overline{f^k(\overline{X^0})}$$

该定理说明: 当 $c = 0$ 时, Julia 集关于 x 轴、 y 轴皆对称(图 1(e)); 当 $\text{Im}(c) = 0$ 时, Julia 集关于 x 轴对称(图 1(f)).

2.2 α, β, p 和 q 为小数

当 α, β, p 和 q 取小数时, 构造式 (4) 对应的牛顿变换 Julia 集, 对 x_1^q, x_2^q 和 x_1^q 的计算, 采用了 DeMoivre 理论, 如

$$x_1^q = |x_1|^q (\cos q\theta + i \sin q\theta) \quad (8)$$

这就涉及相角 θ 主值范围的选取. 一般相角 θ 的范围可选取以下 4 种情况: $\theta \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$, $\theta \in [-\pi, \pi)$ 和 $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$. 当 q 为整数时, 将不会影响式 (8) 的使用, 因

$$\begin{cases} \cos(q\theta) = \cos(q\theta + 2\pi\alpha) \\ \sin(q\theta) = \sin(q\theta + 2\pi\alpha) \end{cases} \quad (9)$$

但 q 为小数时, 则式 (9) 不成立. 这说明: 相角 θ 主

值范围的不同选取, 将导致 Julia 集的结构互不相同.

图 2 为选取相角 $\theta \in [-\pi, \pi)$ 时, 所得的一组具有代表性的结果. 图 2 只给出参数 β, p 和 q 的值, 而 α 可由 $\alpha = q - \beta p$ 算出. 其中, 图 2(a) ~ 2(d)、2(i) 和 2(j) 选取的初始点为 $X^0 = (z \ z)$; 图 2(e) ~ 2(h)、2(k) 和 2(l) 选取的初始点为 $X^0 = (z \ c)$, 且 $c = 1$. 图 2(a) 和 2(b) 的坐标范围: 左上角 $-1.25 + 2i$, 右下角 $3.75 - 2i$; 图 2(c) 和 2(d) 的坐标范围: 左上角 $-4 + 3.2i$, 右下角 $4 - 3.2i$; 图 2(e) 和 2(f) 的坐标范围: 左上角 $-5 + 4i$, 右下角 $5 - 4i$; 图 2(g) 和 2(h) 的坐标范围: 左上角 $-25 + 20i$, 右下角 $25 - 20i$; 图 2(i) 和 2(j) 的坐标范围: 左上角 $-4 + 3.2i$, 右下角 $4 - 3.2i$; 图 2(k) 和 2(l) 的坐标范围: 左上角 $-0.5 + 0.4i$, 右下角 $0.5 - 0.4i$.

图 2(a) 和 2(b)、图 2(c) 和 2(d)、图 2(e) 和 2(f)、图 2(g) 和 2(h)、图 2(i) 和 2(j)、图 2(k) 和 2(l) 的参数选取为 p 和 q 值相同, 而 β 值分别为 3.999 999 880 7 和 3.999 999 880 8, 即 β 值仅相差 10^{-10} . 由图 2 可见, 虽然 β 值仅有一个微小的差异, 但对应的 Julia 集结构、颜色却截然不同. 图 2(i) 和 2(j)、图 2(k) 和 2(l) 相比较, 可见吸引域的个数明显增加, 即随 β 值增大, 方程 (4) 的解的个数有一个突变. 下面分析方程 (4) 的解: 整理方程 (4) 可得 $x_1^q - 1 = 0$, 当 p 和 q 值相同时, x_1 的解的个数一定; 若 β 值变化, 将导致 α 值变化; 对于小数值的 α 和 β , 由方程 (4) 的第一式可知方程 (4) 的解的个数将发生变化. 可见实验结果与理论分析是符合的.

图 2(a) ~ 2(h) 的颜色仅为深蓝色(本文因印刷原因未显示), 本文用深蓝色来表示根 $(1, 0)$ 的吸引域, 这说明此时方程 (4) 仅有惟一根 $(1, 0)$. 图 2(j) 的吸引域与图 1(a) 的吸引域相对应, 这说明它们对应的根相近. 若改变初始点, 尽管 β, p 和 q 值相同, 但 Julia 集却发生改变(图 2(a) ~ 2(d) 和图 2(e) ~ 2(h) 相比较); 若再改变 q 值, 则得到的 Julia 集的结构更丰富多彩(如图 2(k)、2(l)). 这是因为牛顿迭代的 Julia 集的吸引域取决于所选定的初始点及方程 (4) 的幂次.

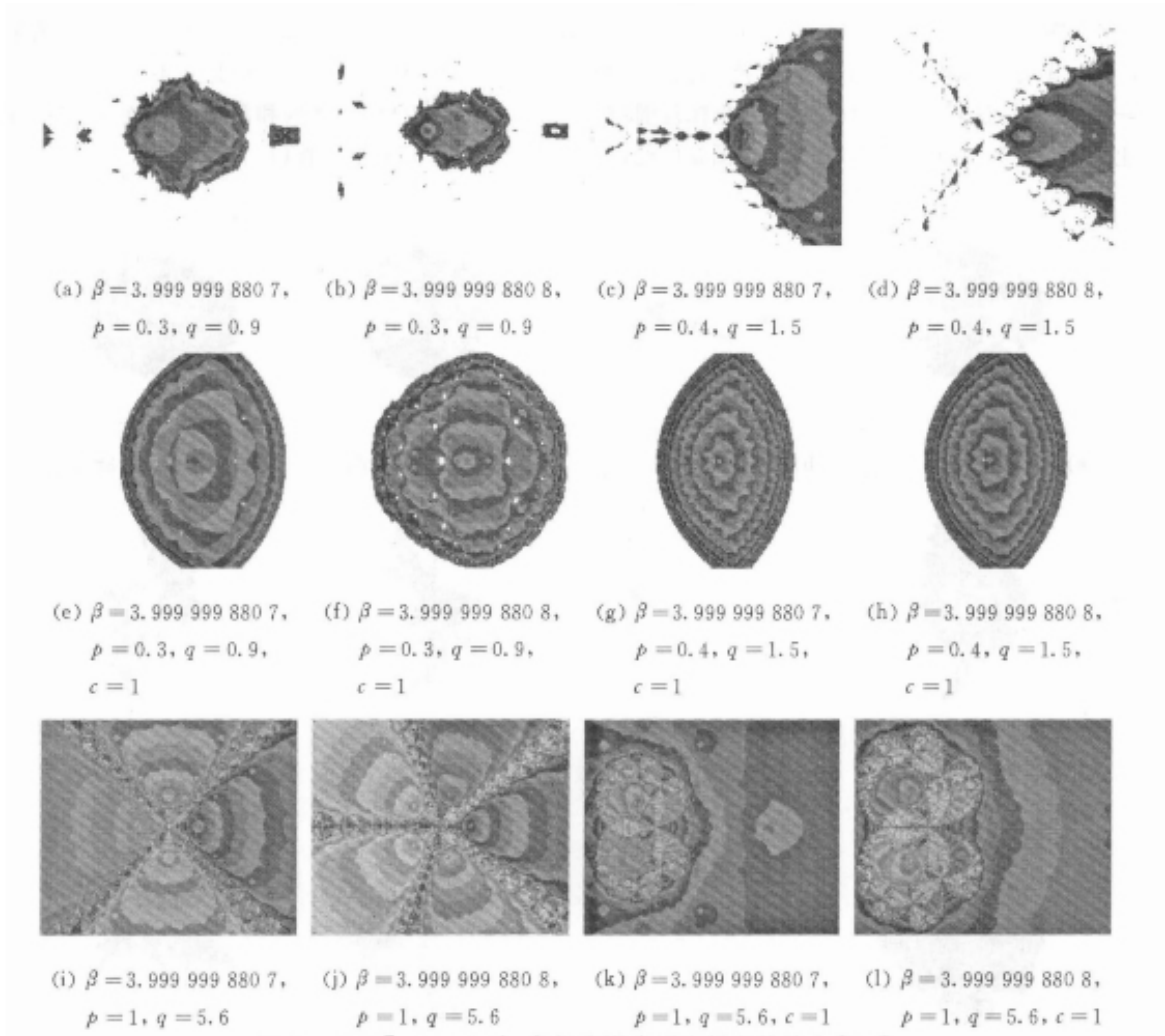


Fig. 2 The Julia sets of multivariable Newton transform for real exponent power when $\theta \in [-\pi, \pi)$

定理 4 当选取初始点 $X^0 = (z \ z)$ 或 $X^0 = (z \ c)$ 且 $\text{Im}(c) = 0$ 时,若选取相角 $\theta \in [-\pi, \pi)$, 则式(4) 对应的牛顿变换的 Julia 集关于 x 轴对称.

证明 利用数学归纳法. 由式(5) 可知

$$f[(z \ z)] = \frac{1}{\beta p z^p + \alpha z} \times \left[(\alpha + \beta - 1)z^2 + \beta p z^{p+1} - \beta z^{p+1} + z^{2-a-\beta} \right] \\ \left[(\beta p - p + \alpha)z^{p+1} + p z^{p-a-\beta+1} \right] \tag{10}$$

$$f[(z \ c)] = \frac{1}{\beta p z^p + \alpha c} \times \left[(\alpha + \beta - 1)zc + \beta p z^{p+1} + z^{1-a}c^{1-\beta} - \beta z^{p+1} \right] \\ \left[(\beta p + \alpha - p)z^p c + p z^{p-a}c^{1-\beta} \right] \tag{11}$$

相角 $\theta \in [-\pi, \pi)$ 时,若设 $z = |z|e^{i\theta}$, 则共轭 $\bar{z} = |z|e^{-i\theta}$. $\text{Im}(c) = 0$ 时,有 $c = \bar{c}$. 将 z 和 $\bar{z}$ 代入式(10) 和(11), 整理后知对于式(10) 和(11),

$f(X^0) = \overline{f(\bar{X}^0)}$ 皆成立. 故可令 $f^{k-1}(X^0) = \overline{f^{k-1}(\bar{X}^0)}$ 成立,又

$$f^k(X^0) = f^{k-1}[f(X^0)] = \overline{f^{k-1}[f(\bar{X}^0)]} = \overline{f^{k-1}[\overline{f(\bar{X}^0)}]} = \overline{f^k(\bar{X}^0)}$$

$(k = 1, 2, \dots, N)$

所以选取 $\theta \in [-\pi, \pi)$ 时,牛顿变换的 Julia 集关于 x 轴对称(图 2). 故命题真.

选取初始点 $X^0 = (z \ z)$ 或 $X^0 = (z \ c)$, 参数 $\beta = -2, p = 0.1$ 和 $q = -0.8$, 相角 θ 的主值范围: $[\pi, \pi), [0, 2\pi), [-3\pi/2, \pi/2)$ 或 $[-\pi/2, 3\pi/2)$, 作者构造了式(4) 对应的牛顿变换的 Julia 集(如图 3 所示). 其中图 3(a) ~ 3(d) 的初始点为 $X^0 = (z \ z)$; 坐标范围: 左上角 $-5 + 4i$, 右下角 $5 - 4i$. 图 3(e) ~ 3(h) 的初始点为 $X^0 = (z \ c), c = 1$; 图 3(e)、3(g) 和 3(h) 坐标范围: 左上角 $-1\,000 + 800i$, 右下角 $1\,000 - 800i$; 图 3(f) 坐标范围: 左上角 $-250 + 200i$, 右下角 $250 -$

200i. 图 3(i) ~ 3(l) 的初始点为 $X^0 = (z \ c)$, $c = i$; 图 3(i)、3(k) 和 3(l) 坐标范围: 左上角 $-20 + 16i$, 右下角 $20 - 16i$; 图 3(j) 坐标范围: 左上角 $-10 + 8i$, 右下角 $10 - 8i$. 由图 3 可见, 尽

管参数 α, β, p 和 q 值相同, 但由于相角 θ 的主值范围不同, 所得 Julia 集的结构是互不相同的. 图 3 的颜色仅有白色发散区和深蓝色区域, 这说明此时方程(4) 仅有惟一根 $(1, 0)$.

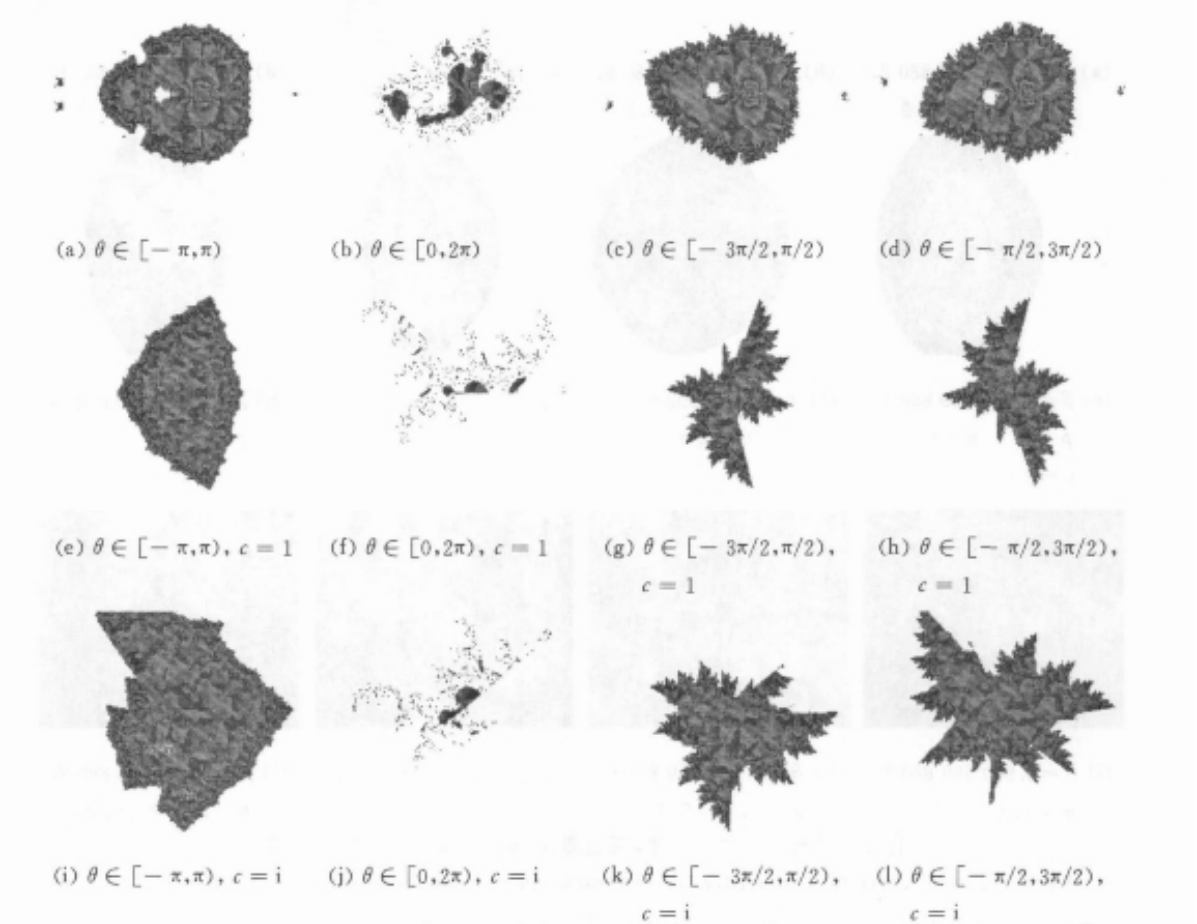


图 3 相角 θ 主值范围不同的实指数幂多元牛顿变换的 Julia 集
Fig. 3 The Julia sets of multivariable Newton transform for real exponent power when the principal value of the phase angle θ is different

定理 5 当选取初始点 $X^0 = (z \ z)$ 或 $X^0 = (z \ c)$, 且 $\text{Im}(c) = 0$ 时, 若选取相角 $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$ 和 $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$ 时, 构造式 (4) 对应的牛顿变换的 Julia 集, 则有

$$f^k(X^0)|_{\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)} = \overline{f^k(X^0)}|_{\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)} \\ (k = 1, 2, \dots, N)$$

证明 因为相角 $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$ 和 $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$ 的选取关于 x 轴具有对称性, 故当选取相角 $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$ 时, 若 $X^0 = |X^0|e^{i\theta}|_{\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)}$, 则当选取相角 $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$ 时, 其共轭可表示为 $\overline{X^0} = |X^0|e^{i\theta}|_{\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)}$. 当 $\text{Im}(c) = 0$ 时, 有 $c = \bar{c}$. 由定理 4 的证明过程, 可推得命题成立.

该定理表明相角选取为 $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$ 的 Julia 集以 x 轴为轴翻转 180° 后即得相角 $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$ 的 Julia 集; 反之亦然 (图 3(c) 和 3(d)、图 3(g) 和 3(h)).

由于 $\text{Im}(c) \neq 0$, 图 3(i) 不满足定理 4 的结论; 图 3(k) 和 3(l) 也不满足定理 5 的结论.

3 结 语

本文阐述了多元牛顿变换 Julia 集理论, 给出了多元牛顿迭代法, 推广了 Motyka 和 Reiter 的工作, 构造并研究了实指数幂多元牛顿变换的 Julia 集.

参考文献：

[1] MANDELBROT B B. **The Fractal Geometry of Nature** [M]. San Francisco: Freeman W H, 1982

[2] 王兴元. 广义 M-J 集的分形机理[M]. 大连:大连理工大学出版社,2002

[3] PEITGEN H O, SAUPE D. **The Science of Fractal Images** [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988: 137-218

[4] PICKOVER C A. **Computers, Pattern, Chaos and Beauty** [M]. New York: St. Martin's Press, 1990: 43-105

[5] 张池平,施云慧. 计算方法[M]. 北京:科学出版社, 2002:257-260

[6] KNEISL K. Julia sets for the super-Newton method, Cauchy's method, and Halley's method [J]. **Chaos**, 2001, **11**(2): 359-370

[7] PEITGEN H O, SAUPE D, HAESELER F V. Cayley's problem and Julia sets [J]. **Math Intell**, 1984, **6**: 11-20

[8] WEGNER T, PETERSON M. **Fractal Creations** [M]. Mill Valley: The Waite Group Press, 1991: 168-231

[9] WALTER D J. Computer art representing the behavior of the Newton-Raphson method [J]. **Comput & Graphics**, 1993, **17**(4): 487-488

[10] WALTER D J. Systemised serendipity for producing computer art[J]. **Comput Graphics**, 1993, **17**(6): 699-700

[11] CARTWRIGHT J H E. Newton maps: fractals from Newton's method for the circle map [J]. **Comput Graphics**, 1999, **23**(4): 607-612

[12] GILBERT W J. Generalizations of Newton's method [J]. **Fractals**, 2001, **9**(3): 251-262

[13] CHEN N, ZHU X L, CHUNG K W. M and J sets from Newton's transformation of the transcendental mapping $F(z) = e^{z^w+c}$ with vcps [J]. **Comput Graphics**, 2002, **26**(3): 371-383

[14] CILINGIR F. On infinite area for complex exponential function [J]. **Chaos, Solitons and Fractals**, 2004, **22**(5): 1189-1198

[15] WANG Xing-yuan, LIU Wei. The Julia set of Newton's method for multiple roots [J]. **Appl Math Comput**, 2006, **172**(1): 101-110

[16] 王兴元,刘 威. 利用陷阱技术构造伪 3D 牛顿变换的 M-J 集[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005,**17**(4):754-760

[17] 王兴元,刘 威. 三阶广义牛顿变换的 Julia 集[J]. 工程图学学报,2005,**26**(2):119-127

[18] MOTYKA M A, REITER C A. Chaos and Newton's method on systems [J]. **Comput Graphics**, 1990, **14**(1): 131-134

[19] BLANCHAREL P. Complex analytic dynamics on the Riemann sphere [J]. **Bull Amer Math Soc**, 1984, **11**(1): 88-144

Julia sets of multivariable Newton transform for real exponent power

WANG Xing-yuan*, WANG Ting-ting

(School of Electr. and Inf. Eng. , Dalian Univ. of Technol. , Dalian 116024, China)

Abstract: The theory of Julia sets on multivariable Newton transform is introduced, and the multivariable Newton iteration method is given to extend the work of Motyka and Reiter by the construction and analysis of the Julia sets of multivariable Newton transform for real exponent power. The results show that as the value of the parameter β increases, the Julia sets of the multivariable Newton transform have a sudden change caused by the increase of the attraction region. The structure of attraction region of the Julia sets of multivariable Newton transform depends on the selection of the initial value. The structure of the Julia sets of the multivariable Newton transform for real exponent power depends on the selection of the principal value of the phase angle θ . The Julia sets of multivariable Newton transform have a symmetrical character.

Key words: multivariable Newton transform; Julia sets; sudden change; phase angle; symmetry