

随机利率下的联合保险

王丽燕^{*1,2}, 赵晶¹, 杨德礼²

(1. 大连大学 信息工程学院, 辽宁 大连 116622;
2. 大连理工大学 管理学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 为了简化计算,传统的精算理论均采用固定利率来计算保费,但利率具有随机性,由利率随机性产生的风险对保险公司来说相当大.为此以一对夫妻作为被保险人,研究连生寿险的双随机模型.模型包括夫妻终身寿险以及夫妻养老金等.考虑到保费的实际投资情况以及突发事件对利率的影响,对随机利率采用反射 Brownian 运动和 Poisson 过程联合建模,给出了纯保费精算现值的计算公式,并在死亡均匀分布的条件下,得到纯保费精算现值的简洁计算公式.计算实例证明利用该公式进行保费计算可得到理想结果.

关键词: 精算现值; 均衡年保费; 寿险; 年金; 反射 Brownian 运动; Poisson 过程

中图分类号: O22 **文献标识码:** A

0 引言

传统的精算理论,假定利率是确定的,目的是为了简化计算.事实上,由于人的死亡具有不确定性,以及利息会不断调整,精算函数一般都是随机变量.1976年,Boyer考虑了寿险与年金中死亡率与利率均为随机的情况,即所谓的“双随机性”,随后,又有不少学者做过这方面的研究.对于随机利率,他们都是以时间序列方法建模的,例如,白噪声过程、AR(2)过程和 ARIMA 过程等^[1].20世纪90年代,一些学者利用摄动方法建模,得到了具有“双随机性”的确定年金及寿险的一系列结果. Beekman 等于1990、1991年分别由 O-U 过程和 Wiener 过程建模,得到了某些年金现值的前二阶矩^[2,3];1993年得到了息力由 O-U 过程和 Wiener 过程建模的终身寿险给付现值的前二阶矩^[4]. De Schepper 等得到了息力由 Wiener 过程建模的某些年金的矩母函数^[5]、分布函数^[6]和 Laplace 变换^[7].何文炯等对随机利率采用 Gauss 过程建模,得到了一类即时给付增额寿险的给付现值的各阶矩,并在死亡均匀分布假设下,得到了矩的简洁表达式^[8].刘凌云等则将息力采用

Gauss 过程和 Poisson 过程联合建模,也给出了一类即时给付的增额寿险的给付现值的各阶矩^[9],发展了文献[8]的结果.文献[10]提出了固定利率下夫妻联合两全养老金保险的问题,在该文中,养老金是在夫妻双方中只要有一方生存至65周岁时开始给付的,直至这一方死亡为止.吴耀华等将文献[10]作了改进,将养老金的给付期延长至双方全部死亡为止,并在固定利率下给出了均衡年保费的计算公式^[11].文献[12]给出了一种家庭联合保险的精算模型,并将随机利率采用 Wiener 过程建模,给出了均衡年保费的计算公式.文献[1~9,12]都是将随机利率采用息力累积函数 $y(t) = \delta t + z(t)$ 建模,其中 $z(t)$ 是 Wiener 过程或 O-U 过程等,与此相联系的问题是 $z(t)$ 将可能变成负的.如果保险公司将保费收入投资到股票市场, $z(t)$ 随着股票指数的升降而变化,此时对随机利率的这种假设是合理的.但实际上,保费收入只能投资于基金和债券,所以 $z(t)$ 决不可能是负的.文献[10、11]只给出了固定利率下联合保险的均衡年保费的计算公式,没有考虑随机利率的情况.

收稿日期: 2006-05-23; 修回日期: 2007-10-11.
作者简介: 王丽燕^{*}(1963-),女,教授,大连理工大学2004届博士,现在大连理工大学做博士后;杨德礼(1939-),男,教授,博士生导师.

本文以一对夫妻作为被保险人,研究连生寿险的双随机模型.

1 承保对象及其保险责任

(1) 承保对象

在法定年龄以上,身体健康,且双方年龄均低于 35 周岁的合法夫妻.

(2) 保险责任

① 寿险:夫妻双方任何一人在保单生效后死亡,在死亡时即刻给付保险金 R_1 .

② 年金:夫妻双方任何一方生存至 65 周岁时开始给付养老金,至双方全部死亡为止,养老金每年年初给付. 以 (x) 表示年龄为 x 的被保险人,假设夫妻双方的年龄分别为 x 和 y (不妨设 $x \leq y$). 记 $m = 65 - y, n = 65 - x$,年金的给付划分为如下几种形式:

- a. 在投保后第 m 年至第 n 年间,若夫妻双方至少有一人活着,则每年支付 R_2 ;
- b. 在 n 年后,若夫妻双方之一活着,则每年支付 R_2 ;
- c. 在 n 年后,若夫妻双方都活着,则每年支付 $aR_2(a > 1)$.

2 生命函数

2.1 单生命函数

按惯例,用 (x) 表示年龄为 x 岁的人, X 表示 (x) 的寿命, $T(x) = X - x$ 表示年龄为 x 岁的人的剩余寿命, $T(x)$ 的密度函数为

$$f_T(t) = {}_t p_x \mu_{x+t} \tag{1}$$

式中: ${}_t p_x$ 表示 (x) 至少还能活 t 年的概率; $\mu_{x+t} = \left(-\frac{d {}_t p_x}{dt}\right) / {}_t p_x$ 表示 (x) 在年龄 $x + t$ 处的死亡率(force of mortality). ${}_t q_x = 1 - {}_t p_x$ 表示 (x) 在 t 年内死亡的概率, $t = 1$ 时省略不写. 记 $K(x) = [T(x)]$ 表示 (x) 未来存活的整数年, 则有

$$P\{K(x) = k\} = P\{k \leq T(x) < k + 1\} = {}_k p_x - {}_{k+1} p_x = {}_k p_x \cdot q_{x+k}; k = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

2.2 多重生命函数

本文只考虑两个生命 (x) 和 (y) 的情形,且假设 $T(x)$ 和 $T(y)$ 相互独立.

定义 1 如果 (x) 和 (y) 都活着时为存在,而当其中有一人死亡时为消失,则称这样的状态是

二元联合生存状态(joint-life status),记为 (xy) ; 如果 (x) 与 (y) 中至少有一人活着时为存在, (x) 与 (y) 均死亡时为消失,则称这样的状态是二元最后生存者状态(last-survivor status),记为 $(\overline{xy})$.

定理 1 以 $T(xy)$ 表示二元联合生存状态消失的时间,则 (xy) 至少在 t 年内存在的概率为 ${}_t p_{xy} = {}_t p_x \cdot {}_t p_y$, $T(xy)$ 的密度函数为 $f_{T(xy)}(t) = {}_t p_x \times {}_t p_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t})$; 以 $T(\overline{xy})$ 表示二元最后生存者状态消失的时间,则 $(\overline{xy})$ 至少在 t 年内存在的概率为 ${}_t p_{\overline{xy}} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x \cdot {}_t p_y$, $T(\overline{xy})$ 的密度函数为 $f_{T(\overline{xy})}(t) = {}_t p_x \mu_{x+t} + {}_t p_y \mu_{y+t} - {}_t p_{xy} (\mu_{x+t} + \mu_{y+t})$, $(\overline{xy})$ 在 k 与 $k + 1$ 年之间消失的概率为 ${}_k q_{\overline{xy}} = {}_k p_x - {}_{k+1} p_x + {}_k p_y - {}_{k+1} p_y + {}_{k+1} p_x \cdot {}_{k+1} p_y - {}_k p_x \cdot {}_k p_y$.

证明 ${}_t p_{xy} = P\{\min[T(x), T(y)] > t\} = P\{T(x) > t, T(y) > t\} = P\{T(x) > t\} P\{T(y) > t\} = {}_t p_x \cdot {}_t p_y$

$$f_{T(xy)}(t) = \frac{d}{dt}(1 - {}_t p_x {}_t p_y) = -\left(\frac{d {}_t p_x}{dt} {}_t p_y + \frac{d {}_t p_y}{dt} {}_t p_x\right) = {}_t p_x {}_t p_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t})$$

$$\begin{aligned} {}_t p_{\overline{xy}} &= P\{\max[T(x), T(y)] > t\} = \\ &1 - P\{\max[T(x), T(y)] \leq t\} = \\ &1 - P\{T(x) \leq t\} P\{T(y) \leq t\} = \\ &{}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x \cdot {}_t p_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{T(\overline{xy})}(t) &= \frac{d}{dt}(1 - {}_t p_x - {}_t p_y + {}_t p_{xy}) = -\frac{d {}_t p_x}{dt} - \\ &\frac{d {}_t p_y}{dt} + \frac{d {}_t p_{xy}}{dt} = {}_t p_x \mu_{x+t} + {}_t p_y \mu_{y+t} - \\ &{}_t p_x \cdot {}_t p_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_k q_{\overline{xy}} &= P\{k \leq T(\overline{xy}) < k + 1\} = P\{T(\overline{xy}) < \\ &k + 1\} - P\{T(\overline{xy}) < k\} = {}_k p_{\overline{xy}} - \\ &{}_{k+1} p_{\overline{xy}} = {}_k p_x - {}_{k+1} p_x + {}_k p_y - {}_{k+1} p_y + \\ &{}_{k+1} p_x {}_{k+1} p_y - {}_k p_x \cdot {}_k p_y \end{aligned}$$

3 纯保费的计算

对利息随机性本文采用息力累积函数建模,即

$$y(t) = \delta t + \beta |B_t| + \gamma Z_t \tag{3}$$

其中 $|B_t|$ 是反射 Brownian 运动, Z_t 是 Poisson 过程,且 B_t 与 Z_t 相互独立, δ, β, γ 是与 t 无关的实常

数. 假设缴费期为 $h(h \leq \min\{m, n\})$ 年, 保费在 (x) 、 (y) 同时活着时年初缴付, 对于寿险和年金两种情形分别计算被保险方未来收益的精算现值和均衡年保费, 再求和即得总保费.

3.1 寿 险

先考虑单个 (x) 的情况. 以 $\bar{A}_x$ 记 (x) 死亡后立刻提供赔付额 1 的精算现值, 赔付额 1 在投保时的现值为随机变量 $e^{-y(t)}$, 由

$$Ee^{-\beta|B_t|} = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\beta w} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{w^2}{2t\sigma^2}} dw = 2e^{\frac{1}{2}t\sigma^2\beta^2} [1 - \Phi(\sqrt{t}\beta\sigma)] \tag{4}$$

其中

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt; \\ E(e^{-\gamma Z_t}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\gamma k} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} = e^{\lambda t(e^{-\gamma}-1)} \tag{5}$$

有

$$\bar{A}_x = E_B E_Z E(e^{-y(t)}) = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} E(e^{-\beta|B_t|}) E(e^{-\gamma Z_t}) f_T(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\delta t + \frac{1}{2}t\sigma^2\beta^2 + \lambda t(e^{-\gamma}-1)} [1 - \Phi(\sqrt{t}\beta\sigma)] f_T(t) dt \tag{6}$$

对于本文中的寿险, 可先设被保险人死亡时赔付额为 1, 则其责任可视为如下两部分的组合:

(i) 在二元联合生存状态 (xy) 结束时, 赔付额为 1; (ii) 在二元最后生存者状态 $(\overline{xy})$ 结束时, 赔付额为 1. 记(i)、(ii)两种情况的精算现值和均衡年保费分别为 $\bar{A}_{xy}$ 及 ${}_hP_1$ 、 $\bar{A}_{\overline{xy}}$ 及 ${}_hP_2$, 则

$$\bar{A}_{xy} = E_B E_Z E(e^{-y(T(xy))}) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\delta t + \frac{1}{2}t\sigma^2\beta^2 + \lambda t(e^{-\gamma}-1)} [1 - \Phi(\sqrt{t}\beta\sigma)] \times {}_t p_x \cdot {}_t p_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) dt \tag{7}$$

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = E_B E_Z E(e^{-y(T(\overline{xy}))}) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\delta t + \frac{1}{2}t\sigma^2\beta^2 + \lambda t(e^{-\gamma}-1)} [1 - \Phi(\sqrt{t}\beta\sigma)] \times [{}_t p_x \cdot \mu_{x+t} + {}_t p_y \cdot \mu_{y+t} - {}_t p_{xy}(\mu_{x+t} + \mu_{y+t})] dt \tag{8}$$

均衡年保费是 h 年内当 (xy) 存在时每年年初支付的, 第 $k(0 \leq k \leq h)$ 年的支付额为 1 的精算现值记为 ${}_n\ddot{a}_{xy:\overline{h}|}$, 则

$${}_n\ddot{a}_{xy:\overline{h}|} = 2 \sum_{k=0}^{h-1} \left(\int_k^{k+1} e^{-\delta t + \frac{1}{2}t\sigma^2\beta^2 + \lambda t(e^{-\gamma}-1)} [1 - \right.$$

$$\left. \Phi(\sqrt{t}\beta\sigma)] dt \right) ({}_k p_x + {}_k p_y) \tag{9}$$

根据平衡原理, 投保时, 保费的精算现值应与保单责任的精算现值相等, 得到平衡方程

$$\bar{A}_{xy} = {}_hP_1 \cdot \ddot{a}_{xy:\overline{h}|}, \bar{A}_{\overline{xy}} = {}_hP_2 \cdot \ddot{a}_{xy:\overline{h}|}$$

于是

$${}_hP_1 = \bar{A}_{xy}/\ddot{a}_{xy:\overline{h}|}, {}_hP_2 = \bar{A}_{\overline{xy}}/\ddot{a}_{xy:\overline{h}|} \tag{10}$$

3.2 年 金

a. 该年金是 $(\overline{xy})$ 延期 m 年的定期 $n - m$ 年的年金, 其精算现值记为 ${}_m|_{n-m}\ddot{a}_{\overline{xy}}$, 以 ${}_hP_3$ 记其均衡年保费, 则

$${}_m|_{n-m}\ddot{a}_{\overline{xy}} = 2 \sum_{k=m}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} e^{-\delta t + \frac{1}{2}t\sigma^2\beta^2 + \lambda t(e^{-\gamma}-1)} [1 - \Phi(\sqrt{t}\beta\sigma)] dt \right) ({}_k p_x + {}_k p_y - {}_k p_y \cdot {}_k p_x) \tag{11}$$

$${}_hP_3 = {}_m|_{n-m}\ddot{a}_{\overline{xy}}/\ddot{a}_{xy:\overline{h}|} \tag{12}$$

b. 以 ${}_n\ddot{a}_{\overline{xy}}$ 和 ${}_hP_4$ 记此情形的精算现值和均衡年保费, 于是

$${}_n\ddot{a}_{\overline{xy}} = 2 \sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_k^{k+1} e^{-\delta t + \frac{1}{2}t\sigma^2\beta^2 + \lambda t(e^{-\gamma}-1)} [1 - \Phi(\sqrt{t}\beta\sigma)] dt \right) \times [{}_k p_x (1 - {}_k p_y) + {}_k p_y (1 - {}_k p_x)] = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{k+n}^{k+n+1} e^{-\delta t + \frac{1}{2}t\sigma^2\beta^2 + \lambda t(e^{-\gamma}-1)} [1 - \Phi(\sqrt{t}\beta\sigma)] dt \right) \times [{}_k p_x (1 - {}_k p_y) + {}_k p_y (1 - {}_k p_x)] \tag{13}$$

$${}_hP_4 = {}_n\ddot{a}_{\overline{xy}}/\ddot{a}_{xy:\overline{h}|} \tag{14}$$

c. 以 ${}_n\ddot{a}_{xy}$ 及 ${}_hP_5$ 记此情形的精算现值和均衡年保费, 则

$${}_n\ddot{a}_{xy} = 2 \sum_{k=n}^{\infty} {}_k p_{xy} \int_k^{k+1} e^{-\delta t + \frac{1}{2}t\sigma^2\beta^2 + \lambda t(e^{-\gamma}-1)} \times [1 - \Phi(\sqrt{t}\beta\sigma)] dt = 2 \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+n} p_{xy} \int_{k+n}^{k+n+1} e^{-\delta t + \frac{1}{2}t\sigma^2\beta^2 + \lambda t(e^{-\gamma}-1)} \times [1 - \Phi(\sqrt{t}\beta\sigma)] dt \tag{15}$$

$${}_hP_5 = {}_n\ddot{a}_{xy}/\ddot{a}_{xy:\overline{h}|} \tag{16}$$

综上可得本文中保单的均衡年保费为

$${}_hP = R_1({}_hP_1 + {}_hP_2) + R_2({}_hP_3 + {}_hP_4) + aR_2 \cdot {}_hP_5 \tag{17}$$

假定在每个保单年度内死亡是均匀发生的,

将保险期 $[0, n)$ 分成 n 等份, $[0, n) = \bigcup_{k=0}^{n-1} [k, k+1)$, 则在每一 $[k, k+1)$ 上, T 服从均匀分布, 在这种情况下, 对任意的 $t \in [k, k+1)$, $f_T(t) =$

${}_t p_x \cdot q_{x+t}$ ，于是式(1) 成为

$$f_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot I_{[k,k+1)} \tag{18}$$

对由 l_0 个新生生命组成的群体，在 x 年还生存的人数为 l_x ，在第 x 年内死亡的人数为 $d_x = l_x - l_{x+1}$ ，于是

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}, q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} \tag{19}$$

将式(18)、(19) 分别代入式(6) ~ (9)、(11)、(13)、(15)，并且注意到

$$\begin{aligned} &\int_k^{k+1} e^{-\delta t + \frac{1}{2} t \sigma^2 \beta^2 + \lambda t (e^{-\gamma} - 1)} [1 - \Phi(\sqrt{t} \beta \sigma)] dt = \\ &\int_k^{k+1} e^{-\delta t + \frac{1}{2} t \sigma^2 \beta^2 + \lambda t (e^{-\gamma} - 1)} dt \int_{\sqrt{t} \beta \sigma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx = \\ &\frac{\beta \sigma [\Phi(\sqrt{2(k+1)b_1}) - \Phi(\sqrt{2kb_1})]}{b_2 \sqrt{2b_1}} + \frac{e^{(k+1)b_2}}{b_2} [1 - \\ &\Phi(\sqrt{k+1} \beta \sigma)] - \frac{e^{kb_2}}{b_2} [1 - \Phi(\sqrt{k} \beta \sigma)] \end{aligned}$$

其中 $b_1 = \delta - \lambda(e^{-\gamma} - 1)$ ， $b_2 = \frac{1}{2} \sigma^2 \beta^2 - \delta + \lambda(e^{-\gamma} - 1)$ 。则

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &= \frac{2}{l_x b_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_{x+k} \left\{ \beta \sigma [\Phi(\sqrt{2(k+1)b_1}) - \Phi(\sqrt{2kb_1})] \right. \\ &\quad \left. \right\} / \sqrt{2b_1} + e^{(k+1)b_2} [1 - \Phi(\sqrt{k+1} \beta \sigma)] - e^{kb_2} [1 - \Phi(\sqrt{k} \beta \sigma)] \Big\} \tag{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{xy} &= \frac{2}{l_x l_y b_2} \sum_{k=0}^{\infty} (d_{x+k} l_{y+k} + d_{y+k} l_{x+k}) \times \\ &\quad \left\{ \frac{\beta \sigma [\Phi(\sqrt{2(k+1)b_1}) - \Phi(\sqrt{2kb_1})]}{\sqrt{2b_1}} + \right. \\ &\quad \left. e^{(k+1)b_2} [1 - \Phi(\sqrt{k+1} \beta \sigma)] - e^{kb_2} [1 - \Phi(\sqrt{k} \beta \sigma)] \right\} \tag{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{xy} &= \frac{2}{l_x l_y b_2} \sum_{k=0}^{\infty} (l_y d_{x+k} + l_x d_{y+k} - l_{y+k} d_{x+k} - \\ &\quad l_{x+k} d_{y+k}) \left\{ \frac{\beta \sigma [\Phi(\sqrt{2(k+1)b_1}) - \Phi(\sqrt{2kb_1})]}{\sqrt{2b_1}} + \right. \\ &\quad \left. e^{(k+1)b_2} [1 - \Phi(\sqrt{k+1} \beta \sigma)] - e^{kb_2} [1 - \Phi(\sqrt{k} \beta \sigma)] \right\} \tag{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{xy:\overline{h}|} &= \frac{2}{l_x l_y b_2} \sum_{k=0}^{h-1} l_{x+k} l_{y+k} \left\{ \beta \sigma [\Phi(\sqrt{2(k+1)b_1}) - \Phi(\sqrt{2kb_1})] \right. \\ &\quad \left. \right\} / \sqrt{2b_1} + e^{(k+1)b_2} [1 - \Phi(\sqrt{k+1} \beta \sigma)] - e^{kb_2} [1 - \Phi(\sqrt{k} \beta \sigma)] \Big\} \tag{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_{m|n-m} \ddot{a}_{xy} &= \frac{2}{l_x l_y b_2} \sum_{k=m}^{n-1} (l_y l_{x+k} + l_x l_{y+k} - l_{x+k} l_{y+k}) \times \\ &\quad \left\{ \frac{\beta \sigma [\Phi(\sqrt{2(k+1)b_1}) - \Phi(\sqrt{2kb_1})]}{\sqrt{2b_1}} + \right. \\ &\quad \left. e^{(k+1)b_2} [1 - \Phi(\sqrt{k+1} \beta \sigma)] - e^{kb_2} [1 - \Phi(\sqrt{k} \beta \sigma)] \right\} \tag{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_n \ddot{a}_{xy} &= \frac{2}{l_x l_y b_2} \sum_{k=0}^{\infty} (l_{x+k+n} d_{y+k+n} + l_{y+k+n} d_{x+k+n}) \times \\ &\quad \left\{ \beta \sigma [\Phi(\sqrt{2(k+n+1)b_1}) - \Phi(\sqrt{2(k+n)b_1})] \right. \\ &\quad \left. \right\} / \sqrt{2b_1} + e^{(k+n+1)b_2} [1 - \Phi(\sqrt{k+n+1} \beta \sigma)] - e^{(k+n)b_2} [1 - \Phi(\sqrt{k+n} \beta \sigma)] \Big\} \tag{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_n \ddot{a}_{xy} &= \frac{2}{l_x l_y b_2} \sum_{k=0}^{\infty} l_{x+k+n} l_{y+k+n} \times \\ &\quad \left\{ \beta \sigma [\Phi(\sqrt{2(k+n+1)b_1}) - \Phi(\sqrt{2(k+n)b_1})] \right. \\ &\quad \left. \right\} / \sqrt{2b_1} + e^{(k+n+1)b_2} [1 - \Phi(\sqrt{k+n+1} \beta \sigma)] - e^{(k+n)b_2} [1 - \Phi(\sqrt{k+n} \beta \sigma)] \Big\} \tag{26} \end{aligned}$$

利用生命表可以容易地进行计算。

4 结 论

本文以一对夫妻作为被保险人，研究连生寿险的双随机模型。考虑到保费的实际投资情况以及突发事件对利率的影响，将随机利率采用反射 Brownian 运动和 Poisson 过程联合建模，给出了纯保费精算现值的计算公式，并在死亡均匀分布的条件下，得到纯保费精算现值的简洁计算公式，经过数值计算结果理想。本文的研究方法也可用于两个以上保险人的情况。

对随机利息的建模不仅考虑了保险公司的利益,同时考虑了投保人的权益,运用这些公式进行保险费的计算,可以确保保险经营的正常进行,最终使投保人和承保人都有所收获.

参考文献:

- [1] 伍超标. 博士后研究报告《概率统计的若干应用问题》之 4.4[R]. 上海:华东师范大学,1995:84-92
- [2] BEEKMAN J A, FUELLING C P. Interest and mortality randomness in some annuities [J]. *Insurance: Math and Econ*, 1990, **9**:185-196
- [3] BEEKMAN J A, FUELLING C P. Extra randomness in certain annuity models[J]. *Insurance: Math and Econ*,1991,**10**:275-287
- [4] BEEKMAN J A , FUELLING C P. One approach to dual randomness in life insurance [J]. *Scand Actuar J*, 1993,**2**:173-182
- [5] DE SCHEPPER A, DE VYLDER F, GOOVAERTS M, *et al.* Interest randomness in annuities certain [J]. *Insurance: Math and Econ*, 1992,**11**(4):271-281
- [6] DE SCHEPPER A , GOOVAERTS M. Some further results on annuities certain with random interest [J]. *Insurance: Math and Econ*, 1992, **11**(4):283-290
- [7] DE SCHEPPER A, GOOVAERTS M, DELBAEN F. The Laplace transform of annuities certain with exponential time distribution [J]. *Insurance: Math and Econ*, 1992, **11**(4):291-294
- [8] 何文炯,蒋庆荣. 随机利率下的增额寿险[J]. 高校应用数学学报, 1998,**13A**(2):145-152
- [9] 刘凌云,汪荣明. 一类随机利率下的增额寿险[J]. 应用概率统计, 2001,**17**(3):283-290
- [10] 邹 焱,许谨良,赵学林. 夫妻联合两全养老金保险 [J]. 经济数学,1992,**9**(1):93-97
- [11] 吴耀华,蔡新中,吴之强. 一种夫妻联合养老金(附死亡) 保险的计算问题[J]. 中国科学技术大学学报,1998,**28**(4):439-445
- [12] 王丽燕,冯恩民. 一种家庭联合保险的双随机模型 [J]. 工程数学学报,2003,**20**(8):69-72

Joint-life insurance under random rates of interest

WANG Li-yan^{*1,2}, ZHAO Jing¹, YANG De-li²

(1. College of Inf. Eng. , Dalian Univ. , Dalian 116622, China;

2. School of Manage. , Dalian Univ. of Technol. , Dalian 116024, China)

Abstract: To simplify the calculation, traditional actuarial theories usually use fixed interest rate to calculate premium. But in practice, interest rate is stochastic, and the risk resulting from interest rate fluctuation is important to the insurance company. Taking a couple as the insurants, the dual stochastic model of joint-life insurance was researched. The model contains the couple's whole life insurance and annuities. Considering the influence of the actual investment of premiums and the outburst cases on interest rate, the random interest rate is decided by both reflected Brownian motion and Poisson process, then the formulas of the actuarial present value of net premium are obtained. Finally, the concise formulas are given on the condition that the death happens uniformly in every policy year. The calculation results show that the formulas are practicable.

Key words: actuarial present value; annual level premium; life insurance; annuity; reflected Brownian motion; Poisson process