第47卷第6期 大连理工大学学报 Vol. 47, No. 6
2007年11月 Journal of Dalian University of Technology Nov. 2007

应用数学

文章编号：1000-8608(2007)06-0925-06

完全 i 部图 $N[(X_1,X_2,\cdots,X_i),k]$ 计数公式

杨利民*[1,2]， 王天明[1]， 年四洪[1]

（1. 大连理工大学 应用数学系，辽宁 大连 116024；
2. 大理学院 数学与计算机学院，云南 大理 671000）

摘要：采用组合卷积公式方法，研究图的 $S^{(n)}$- 因子的计数问题. 首先获得完全 2- 部图的恰有 k 个分支的 $S^{(n)}$- 因子的计数公式，并用同样方法获得完全 i- 部图的恰有 k 个分支的 $S^{(n)}$- 因子的计数公式，从而给出完全 i- 部图的所有因子数计数公式. 进一步研究了完全 i- 部图的组合恒等式，并通过组合计算技巧，获得了完全 i- 部图、完全 2- 部图和完全 3- 部图的组合恒等式. 该研究对图论及组合学具有理论和应用价值.

关键词：完全 i 部图；卷积公式；第一类 Stirling 数；因子
中图分类号：O157.5；O157.1 **文献标识码**：A

0 引 言

本文利用组合数学卷积公式方法讨论完全 i 部图的恰有 k 个分支 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$- 因子的计数问题. $S^{(n)}$- 因子特殊情况是 1- 因子，$S^{(n)}$- 因子的定义内容与 (g,f)- 因子的定义极其不同，当 $S^{(n)}$- 因子特殊情况恰有 k 个分支都为某一个完全图，具有惟一的 k- 因子时，$S^{(n)}$- 因子问题即变为 (g,f)- 因子问题. $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$- 因子研究有如下意义：(1) 组合价值[5]；(2) 图论计数；(3) 计算机和组合码（正则 m 叉树[4]）；(4) 其他方面（The mean colour number $\mu(G)$），本文对此进行研究.

1 定义和引理

定义 1 设 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$，$n\geqslant 1$，其中 K_i 为 i 个顶点完全图，若 M 是图 G 的子图，且 M 的每一个分支都同构于 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$ 中的某一个元素，则 M 叫做 $S^{(n)}$- 子图，若 M 为 G 的生成子图，则 M 叫做 G 的一个 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$- 因子.

记 $N(G,k)$ 为图 G 的恰有 k 个分支 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$- 因子数. $A(G)$ 是 G 的所有 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$- 因子数，即 $A(G)=\sum_{k=1}^{n}N(G,k)$.

定义 2 设图 $G=(X_1,X_2,\cdots,X_i)$，X_j 为 $|X_j|$ 个顶点集合 $(1\leqslant j\leqslant i)$，若 X_j 中任意两点都没有边 $(1\leqslant j\leqslant i)$，图 G 中任意两个顶点都有边相连，则称 $G=(X_1,X_2,\cdots,X_i)$ 为完全 i 部图.

特殊 $i=2$ 时，$G=(X_1,X_2)=(X,Y)$ 为完全二部图.

引理 1 $[t]_i=t(t-1)\cdots(t-i+1)=\prod_{k=1}^{i}(t-k+1)$.

引理 2[1] $[t]_k=\sum_{l=0}^{k}s(k,l)t^l$，其中 $s(k,l)$ 是第一类 Stirling 数.

引理 3[3] 若图 G 无 K_3 图，n 为图 G 的顶点数，则当 $1\leqslant k<n/2$ 时，$N(G,k)=0$

引理 4 若 $\overline{G}$ 为 G 的补图，则图 G 的色多项式 $f(G,t)=\sum_{k=1}^{n}N(\overline{G},k)\prod_{i=1}^{k}(t-i+1)$.

证明 图 G 的色多项式 $f(G,t)=\sum_{k=1}^{n}N(\overline{G},k)[t]_k$（见文献[3]），由引理 1 得到

收稿日期：2005-12-03； 修回日期：2007-09-20.
作者简介：杨利民*(1965-)，男，博士，教授.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$f(G,t)=\sum_{k=1}^{n}N(\overline{G},k)\prod_{i=1}^{k}(t-i+1)$$

引理5 若 $\overline{G}$ 为图 G 的补图,则图 G 的色多项式 $f(G,t)=\sum_{r=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}N(\overline{G},k)s(k,r)\right]t^{r}$,其中 $s(k,r)$ 为第一类 Stirling 数.

证明 $f(G,t)=\sum_{k=1}^{n}N(\overline{G},k)\prod_{i=1}^{k}(t-i+1)=\sum_{k=1}^{n}N(\overline{G},k)\sum_{l=0}^{k}s(k,l)t^{l}$

$$f(G,t)=\sum_{r=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}N(\overline{G},k)s(k,r)\right]t^{r}$$

引理6 若图 G 为完全 i 部图($i\geqslant 2$),则 G 无 K_{i+1} 图.

2 卷积公式

定理1 设 $G=(X_1,X_2,\cdots,X_i)$ 为完全 i 部图,则 $N(G,k)$ 卷积公式为

$$\sum_{k=1}^{n}N(G,k)\prod_{j=1}^{k}(t-j+1)=\prod_{k=1}^{|X_1|}(t-k+1)\prod_{k=1}^{|X_2|}(t-k+1)\cdots\prod_{k=1}^{|X_i|}(t-k+1)$$

其中 $|X_1|+|X_2|+\cdots+|X_i|=n$.

证明 若 $G=(X_1,X_2,\cdots,X_i)$ 为完全 i 部图,则

$$\overline{G}=K_{|X_1|}\cup K_{|X_2|}\cup\cdots\cup K_{|X_i|},$$

$$K_{|p|}\cap K_{|q|}=\varnothing,\ 1\leqslant p,\ q\leqslant i,\ p\neq q$$

图 $\overline{G}$ 的色多项式

$$f(\overline{G},t)=f(K_{|X_1|},t)f(K_{|X_2|},t)\cdots f(K_{|X_i|},t)$$

$$f(\overline{G},t)=\prod_{k=1}^{|X_1|}(t-k+1)\prod_{k=1}^{|X_2|}(t-k+1)\cdots\prod_{k=1}^{|X_i|}(t-k+1)$$

另外,图 $\overline{G}$ 的色多项式

$$f(\overline{G},t)=\prod_{k=1}^{n}N(G,k)\prod_{j=1}^{k}(t-j+1)$$

其中 $N(G,k)$ 为完全 i 部图 k 个分支 $S^{(n)}$- 因子个数.

所以

$$\sum_{k=1}^{n}N(G,k)\prod_{j=1}^{k}(t-j+1)=\prod_{k=1}^{|X_1|}(t-k+1)\prod_{k=1}^{|X_2|}(t-k+1)\cdots\prod_{k=1}^{|X_i|}(t-k+1)$$

其中 $|X_1|+|X_2|+\cdots+|X_i|=n$.

推论1 完全二部图 $G=(X,Y)$,则 $N(G,k)$ 卷积公式为

$$\sum_{k=m}^{2m}N(G,k)\prod_{j=1}^{k}(t-j+1)=\prod_{k=1}^{m}(t-j+1)^{2}$$

其中 $|X|=|Y|=m$.

证明 图 $G=(X,Y)$ 为完全二部图,据引理6得到图 G 无 K_3 子图,据引理3得,当 $1\leqslant k<n/2$ 时,$N(G,k)=0$,由于 $|X|=|Y|=m,n=2m$,根据定理1得到

$$\sum_{k=m}^{2m}N(G,k)\prod_{j=1}^{k}(t-j+1)=\prod_{k=1}^{m}(t-k+1)\prod_{k=1}^{m}(t-k+1)=\prod_{k=1}^{m}(t-k+1)^{2}$$

推论2 若图 $G=(X_1,X_2,\cdots,X_i)$ 为完全 i 部图,$i\geqslant 3$,则 $N(G,k)$ 卷积公式为

$$\sum_{k=m}^{im}N(G,k)\prod_{j=1}^{k}(t-j+1)=\prod_{k=1}^{m}(t-k+1)^{i}$$

其中 $|X_1|=|X_2|=\cdots=|X_i|=m$.

证明 略.

3 完全 i 部图 $N[(X_1,X_2,\cdots,X_i),k]$ 计数公式

定理2 若 $G=(X,Y)$ 为完全二部图,$|X|=|Y|=m$,则 $N(G,k)$ 计数公式为

$$N(G,k)=\boldsymbol{M}_k,1\leqslant k\leqslant 2m$$

其中

$$M_k=\begin{pmatrix} s(1,1) & s(2,1) & \cdots & \sum_{l+p=1}s(m,l)s(m,p) & \cdots & s(n-1,1) & s(n,1) \\ 0 & s(2,2) & \cdots & \sum_{l+p=2}s(m,l)s(m,p) & \cdots & s(n-1,2) & s(n,2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{l+p=n-1}s(m,l)s(m,p) & \cdots & s(n-1,n-1) & s(n,n-1) \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{l+p=n}s(m,l)s(m,p) & \cdots & 0 & s(n,n) \end{pmatrix}$$

证明 图 $G=(X,Y)$ 为完全二部图,$N(G,k)$ 卷积公式为

$$\sum_{k=1}^{2m}N(G,k)\prod_{j=1}^{k}(t-j+1)=\prod_{k=1}^{m}(t-k+1)\prod_{k=1}^{m}(t-k+1)$$

$$\sum_{r=1}^{2m}\left[\sum_{k=1}^{2m}N(G,k)s(k,r)\right]t^{r}=\sum_{l=0}^{m}s(m,l)t^{l}\sum_{p=0}^{m}s(m,p)t^{p}$$

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\sum_{r=1}^{2m}\Big[\sum_{k=1}^{2m}N(G,k)s(k,r)\Big]t^r=\sum_{r=0}^{2m}\Big[\sum_{l+p=r}s(m,l)s(m,p)\Big]t^r$$

$$\sum_{k=1}^{2m}N(G,k)s(k,r)=\sum_{l+p=r}s(m,l)s(m,p),\quad 1\leqslant r\leqslant 2m$$

$$\begin{cases} s(1,1)N(G,1)+s(2,1)N(G,2)+\cdots+s(2m,1)N(G,2m)=\sum\limits_{l+p=1}s(m,l)s(m,p)\\ s(1,2)N(G,1)+s(2,2)N(G,2)+\cdots+s(2m,2)N(G,2m)=\sum\limits_{l+p=2}s(m,l)s(m,p)\\ \cdots\cdots\\ s(1,n-1)N(G,1)+s(2,n-1)N(G,2)+\cdots+s(2m,n-1)N(G,2m)=\sum\limits_{l+p=n-1}s(m,l)s(m,p)\\ s(1,n)N(G,1)+s(2,n)N(G,2)+\cdots+s(2m,n)N(G,2m)=\sum\limits_{l+p=n}s(m,l)s(m,p)\end{cases}$$

$n=2m$，令

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} s(1,1) & s(2,1) & \cdots & s(n-1,1) & s(n,1)\\ s(1,2) & s(2,2) & \cdots & s(n-1,2) & s(n,2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ s(1,n-1) & s(2,n-1) & \cdots & s(n-1,n-1) & s(n,n-1)\\ s(1,n) & s(2,n) & \cdots & s(n-1,n) & s(n,n)\end{pmatrix}$$

由于 $k>n$ 时，$s(n,k)=0$，$s(n,k)$ 为第一类 Stirling 数，$s(1,1)=s(2,2)=\cdots=s(n,n)=1$，

$$|\boldsymbol{M}|=\begin{vmatrix} s(1,1) & s(2,1) & \cdots & s(n-1,1) & s(n,1)\\ 0 & s(2,2) & \cdots & s(n-1,2) & s(n,2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & s(n-1,n-1) & s(n,n-1)\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s(n,n)\end{vmatrix}=$$

$s(1,1)s(2,2)\cdots s(n,n)=1$

得到

$N(G,k)=\dfrac{\boldsymbol{M}_k}{|\boldsymbol{M}|}=\boldsymbol{M}_k$，$1\leqslant k\leqslant n=2m$，其中 $\boldsymbol{M}_k$ 为把

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} s(1,1) & s(2,1) & \cdots & s(n-1,1) & s(n,1)\\ 0 & s(2,2) & \cdots & s(n-1,2) & s(n,2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & s(n-1,n-1) & s(n,n-1)\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s(n,n)\end{pmatrix}$$

中第 k 列换成

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{l+p=1}s(m,l)s(m,p)\\ \sum\limits_{l+p=2}s(m,l)s(m,p)\\ \vdots\\ \sum\limits_{l+p=n-1}s(m,l)s(m,p)\\ \sum\limits_{l+p=n}s(m,l)s(m,p)\end{pmatrix}$$，即

$$\boldsymbol{M}_k=\begin{pmatrix} s(1,1) & s(2,1) & \cdots & \sum\limits_{l+p=1}s(m,l)s(m,p) & \cdots & s(n-1,1) & s(n,1)\\ 0 & s(2,2) & \cdots & \sum\limits_{l+p=2}s(m,l)s(m,p) & \cdots & s(n-1,2) & s(n,2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sum\limits_{l+p=n-1}s(m,l)s(m,p) & \cdots & s(n-1,n-1) & s(n,n-1)\\ 0 & 0 & \cdots & \sum\limits_{l+p=n}s(m,l)s(m,p) & \cdots & 0 & s(n,n)\end{pmatrix}$$

证毕.

定理 3　若图 $G=(X_1,X_2,\cdots,X_i)$ 为完全 i 部图，$i\geqslant 2$，$|X_1|+|X_2|+\cdots+|X_i|=n$，则 $N(G,k)$ 计数公式为

$N[(X_1,X_2,\cdots,X_i),k]=\boldsymbol{M}_k$，$1\leqslant k\leqslant n$，其中

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$M_k=\begin{pmatrix} s(1,1) & s(2,1) & \cdots & \sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=1}\prod\limits_{j=1}^{i} s(|X_j|,l_j) & \cdots & s(n-1,1) & s(n,1) \\ 0 & s(2,2) & \cdots & \sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=2}\prod\limits_{j=1}^{i} s(|X_j|,l_j) & \cdots & s(n-1,2) & s(n,2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=n-1}\prod\limits_{j=1}^{i} s(|X_j|,l_j) & \cdots & s(n-1,n-1) & s(n,n-1) \\ 0 & 0 & \cdots & \sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=n}\prod\limits_{j=1}^{i} s(|X_j|,l_j) & \cdots & 0 & s(n,n) \end{pmatrix}$$

$s(n,k)$ 为第一类 Stirling 数.

证明 图 $G=(X_1,X_2,\cdots,X_i)$ 为完全 i 部图,$N(G,k)$ 卷积公式为

$$\sum_{k=1}^{n} N(G,k)\prod_{j=1}^{k}(t-j+1)=\prod_{k=1}^{|X_1|}(t-k+1)\prod_{k=1}^{|X_2|}(t-k+1)\cdots\prod_{k=1}^{|X_i|}(t-k+1)$$

$$\sum_{r=1}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{n} N(G,k)s(k,r)\Big]t^r=\sum_{r=1}^{n}\sum_{l_1=0}^{|X_1|}s(|X_1|,l_1)t^{l_1}\sum_{l_2=0}^{|X_2|}s(|X_2|,l_2)t^{l_2}\cdots\sum_{l_i=0}^{|X_i|}s(|X_i|,l_i)t^{l_i}$$

$$\sum_{r=1}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{n} N(G,k)s(k,r)\Big]t^r=\sum_{r=1}^{n}\Big[\sum_{l_1+l_2+\cdots+l_i=r} s(|X_1|,l_1)s(|X_2|,l_2)\cdots s(|X_i|,l_i)\Big]t^r$$

$$\sum_{k=1}^{n} N(G,k)s(k,r)=\sum_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=r}\prod_{j=1}^{i} s(|X_j|,l_j),\quad 1\leqslant r\leqslant n$$

其中 $|X_1|+|X_2|+\cdots+|X_i|=n$.

$$\begin{cases} s(1,1)N(G,1)+s(2,1)N(G,2)+\cdots+s(n,1)N(G,n)=\sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=1}\prod\limits_{j=1}^{i} s(|X_j|,l_j) \\ s(1,2)N(G,1)+s(2,2)N(G,2)+\cdots+s(n,2)N(G,n)=\sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=2}\prod\limits_{j=1}^{i} s(|X_j|,l_j) \\ \cdots\cdots \\ s(1,n-1)N(G,1)+s(2,n-1)N(G,2)+\cdots+s(n,n-1)N(G,n)=\sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=n-1}\prod\limits_{j=1}^{i} s(|X_j|,l_j) \\ s(1,n)N(G,1)+s(2,n)N(G,2)+\cdots+s(n,n)N(G,n)=\sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=n}\prod\limits_{j=1}^{i} s(|X_j|,l_j) \end{cases} \tag{*}$$

令

$$M=\begin{pmatrix} s(1,1) & s(2,1) & \cdots & s(n-1,1) & s(n,1) \\ s(1,2) & s(2,2) & \cdots & s(n-1,2) & s(n,2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s(1,n-1) & s(2,n-1) & \cdots & s(n-1,n-1) & s(n,n-1) \\ s(1,n) & s(2,n) & \cdots & s(n-1,n) & s(n,n) \end{pmatrix}$$

当 $k>n$,$s(n,k)=0$,$s(n,k)$ 为第一类 Stirling 数,

$$|M|=\begin{vmatrix} s(1,1) & s(2,1) & \cdots & s(n-1,1) & s(n,1) \\ 0 & s(2,2) & \cdots & s(n-1,2) & s(n,2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s(n-1,n-1) & s(n,n-1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s(n,n) \end{vmatrix}=1$$

由(*)得到

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$N(G,k)=\frac{\boldsymbol{M}_k}{|\boldsymbol{M}|}=\boldsymbol{M}_k,\ 1\leqslant k\leqslant n$$

其中 $\boldsymbol{M}_k$ 为把

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} s(1,1) & s(2,1) & \cdots & s(n-1,1) & s(n,1) \\ 0 & s(2,2) & \cdots & s(n-1,2) & s(n,2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s(n-1,n-1) & s(n,n-1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s(n,n) \end{pmatrix}$$

中第 k 列换成

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=1}\prod\limits_{j=1}^{i} s(|X_j|,l_j) \\ \sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=2}\prod\limits_{j=1}^{i} s(|X_j|,l_j) \\ \vdots \\ \sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=n-1}\prod\limits_{j=1}^{i} s(|X_j|,l_j) \\ \sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=n}\prod\limits_{j=1}^{i} s(|X_j|,l_j) \end{pmatrix}$$

即为

$$\boldsymbol{M}_k=\begin{pmatrix} s(1,1) & s(2,1) & \cdots & \sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=1}\prod\limits_{j=1}^{i} s(|X_j|,l_j) & \cdots & s(n-1,1) & s(n,1) \\ 0 & s(2,2) & \cdots & \sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=2}\prod\limits_{j=1}^{i} s(|X_j|,l_j) & \cdots & s(n-1,2) & s(n,2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=n-1}\prod\limits_{j=1}^{i} s(|X_j|,l_j) & \cdots & s(n-1,n-1) & s(n,n-1) \\ 0 & 0 & \cdots & \sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=n}\prod\limits_{j=1}^{i} s(|X_j|,l_j) & \cdots & s(n,n-1) & s(n,n) \end{pmatrix}$$

证毕.

推论 3　若 $G=(X_1,X_2,\cdots,X_i)$ 是完全 i 部图，$|X_1|=|X_2|=\cdots=|X_i|=m$，则 $N(G,k)$ 计数公式为

$$N[(X,X,\cdots,X),k]=\boldsymbol{M}_k;\ 1\leqslant k\leqslant im=n$$

其中

$$\boldsymbol{M}_k=\begin{pmatrix} s(1,1) & s(2,1) & \cdots & \sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=1}\prod\limits_{j=1}^{i} s(m,l_j) & \cdots & s(n-1,1) & s(n,1) \\ 0 & s(2,2) & \cdots & \sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=2}\prod\limits_{j=1}^{i} s(m,l_j) & \cdots & s(n-1,2) & s(n,2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=n-1}\prod\limits_{j=1}^{i} s(m,l_j) & \cdots & s(n-1,n-1) & s(n,n-1) \\ 0 & 0 & \cdots & \sum\limits_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i} l_j=n}\prod\limits_{j=1}^{i} s(m,l_j) & \cdots & s(n,n-1) & s(n,n) \end{pmatrix}$$

定理 4　若 $G=(X_1,X_2,\cdots,X_i)$ 图为完全 i 部图，$i\geqslant 2$，则所有 k 个分支 $N(G,k)$ 个数为

$$A(G)=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{M}_k$$

其中 $|X_1|+|X_2|+\cdots+|X_i|=n$.

证明　略.

4　组合等式

定理 5　若图 $G=(X_1,X_2,\cdots,X_i)$ 为完全 i 部图，则 $N(G,k)$ 有组合等式

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\sum_{k=1}^{n} k!N(G,k)\binom{n}{k} = \frac{(n!)^i}{[(i-1)n]!} \times \binom{(i-1)n}{n-|X_1|, n-|X_2|, \cdots, n-|X_i|}$$

其中 $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_i| = n$.

证明 由定理1,令 $t = n$,则

$$\sum_{k=1}^{n} k!N(G,k)\prod_{j=1}^{k}(n-j+1) = \prod_{k=1}^{|X_1|}(n-k+1)\prod_{k=1}^{|X_2|}(n-k+1)\cdots\prod_{k=1}^{|X_i|}(n-k+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k!N(G,k)\binom{n}{k} = |X_1|!\binom{n}{|X_1|}\cdot|X_2|! \times \binom{n}{|X_2|}\cdot\cdots\cdot|X_i|!\binom{n}{|X_i|} = \prod_{j=1}^{i}|X_j|!\binom{n}{|X_j|}$$

$$\prod_{j=1}^{i}|X_j|!\binom{n}{|X_j|} = \frac{(n!)^i}{(n-|X_1|)!(n-|X_2|)!\cdots(n-|X_i|)!} = \frac{(n!)^i}{[(i-1)n]!}\binom{(i-1)n}{n-|X_1|, n-|X_2|, \cdots, n-|X_i|}$$

其中 $(n-|X_1|) + (n-|X_2|) + \cdots + (n-|X_i|) = (i-1)n$.

得到

$$\sum_{k=1}^{n} k!N(G,k)\binom{n}{k} = \frac{(n!)^i}{[(i-1)n]!} \times \binom{(i-1)n}{n-|X_1|, n-|X_2|, \cdots, n-|X_i|}$$

其中 $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_i| = n$.

推论4 若 $G = (X_1, X_2)$ 为完全二部图,$|X_1| = |X_2| = m$,则

$$\sum_{k=1}^{2m} k!N(G,k)\binom{2m}{k} = (2m)!\binom{2m}{m,m}$$

推论5 若图 $G = (X_1, X_2, X_3)$ 为完全三部图,$|X_1| = |X_2| = |X_3| = m$,则

$$\sum_{k=1}^{3m} k!N(G,k)\binom{3m}{k} = (m!)^3\binom{3m}{m,m}^3$$

证明 略.

5 结 语

本文利用 $N(G,k)$ 卷积公式,解决了完全 i 部图 $N[(X_1, X_2, \cdots, X_i), k]$ 的计数等式并给出其组合公式.

参考文献:

[1] LOUIS C. **Advanced Combinatorics** [M]. Boston: D. Reidel Publishing Company, 1974

[2] BONDY J A, MURTY U S R. **Graph Theory with Applications** [M]. London: MacMillan Press, 1976

[3] WANG Tian-ming, YANG Li-min. Enumeration of ideal subgraphs [M] // **Graph Theory Combinatiorisc, Algorithms, and Applications**. Philadelphia: SIAM, 1991

[4] YANG Li-min, YAO Hong. A recurrence formula of the number of $S^{(n)}$-factor of a regular m-furcating tree [J]. **J Math Res & Exposition**, 2003, **23**(2): 632-636

[5] YANG Li-min, WANG Tian-ming. A formula convolutions of $N(K_n, k)$ and partition upper bounds [J]. **J Math Res & Exposition**, 1999, **19**(3): 631-632

[6] HARARY F, PALMER E M. **Graphical Enumeration** [M]. New York: Academic Press Inc., 1973

[7] AMAHASHI A, KANO M. On factors with given components [J]. **Discrete Math**, 1982, **42**: 1-6

Counting formulas $N[(X_1, X_2, \cdots, X_i), k]$ of complete i-partite graphs

YANG Li-min*[1,2], WANG Tian-ming[1], NIAN Si-hong[1]

(1. Dept. of Appl. Math., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China;
2. School of Math. and Comput., Dali Univ., Dali 671000, China)

Abstract: By using convolution formulas, counting problems of $S^{(n)}$-factors are studied. The counting formula of $S^{(n)}$-factors exactly with k components of complete 2-partite graphs is obtained. By the same way, the counting formula of $S^{(n)}$-factors exactly with k components of complete i-partite graphs is obtained. Furthermore, the counting formula of all $S^{(n)}$-factors exactly with k components of complete i-partite graphs is obtained. Also the combinatorial identities on complete i-partite graphs are researched, and the new methods from combinatorial methods is adopted. Finally, a number of combinatorial identities of complete i-partite graphs, complete 2-partite graphs, complete 3-partite graphs are presented. The results are valuable for combinatorics and graph theory.

Key words: complete i-partite graph; convolution formula; Stirling number of the first kind; factor

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net