第48卷第1期
2008年1月
大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology
Vol. 48, No. 1
Jan. 2008

工程物理、工程力学
文章编号：1000-8608(2008)01-0001-05

哈密顿体系下的弹性圆板热屈曲问题

徐新生*， 邱文彪， 周震寰， 褚洪杰

（大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室，辽宁 大连 116024）

摘要：以工程中由于温度引起的结构屈曲为研究背景，以最基本的结构之一的圆板热屈曲问题为研究对象，建立了由于温度引起的弹性圆板屈曲问题的哈密顿体系. 在辛体系下将临界温度和屈曲模态归结为辛本征值和本征向量问题，即每一个辛本征值和本征向量对应一个临界温度和屈曲模态. 这种辛方法克服了传统振型函数方法的局限性，并可直接得到轴对称和非轴对称的屈曲模态. 本征解空间的完备性确保可得到所有的临界温度和对应的屈曲模态. 数值结果显示了临界温度的变化规律和屈曲模态的特点. 这种辛方法也为求解其他问题提供了一条路径.

关键词：弹性圆板；热屈曲；哈密顿体系；临界温度；屈曲模态

中图分类号：O343.9　　**文献标志码**：A

0 引 言

随着科学技术的发展，各种机械和结构更加精密，对各方面的要求更高. 由于温度引起的结构屈曲、失效甚至破坏问题更加受到重视. 圆板结构在工程中是常见的基本结构，其稳定性一直受到关注. 板的热屈曲是一个重要的失稳形式，对于此类问题的研究一直没有间断. 在圆板屈曲问题的研究中，经常采用 H 变换方法[1]、二次分叉方法[2]、Rayleigh-Ritz 方法[3,4]、Mindlin 理论方法[5]、超越方程方法[6]、样条函数法[7]、有限差分方法[8]和有限元方法[9]等. 对于板的热屈曲问题，Raju 等[10]对轴对称圆盘进行了有限元分析并讨论了简支和固支情况下的热荷载参数. Murphy等[11]基于能量方法对固支板的热屈曲进行了研究，并与实验结果进行了对比. Wu[12]在研究简支板的热屈曲时，讨论了尺寸及横向剪力的影响. Matsunaga[13]应用二维全局高阶变形理论讨论了多层层合板的热屈曲问题并给出了数值结果. Jones[14]采用等效荷载方法对层合板在均匀受热时的屈曲问题进行了研究，给出了几种屈曲形式. 然而这些方法都属于一类变量的拉格朗日体系，需求解高阶偏微分方程. 人们所采用的"振型函数"展开方法[15,16]是将偏微分方程问题简化为常微分方程问题，但很难确定是否还有其他形式的屈曲模态. 辛方法是一种直接方法，可以克服振型函数方法的局限性. 本文将哈密顿体系引入热弹性圆板屈曲问题中，采用辛方法研究和分析临界温度和屈曲模态与辛本征值和本征解的关系，进一步揭示其规律和特点.

1 基本问题

考虑一热弹性圆板，半径为 a，厚为 h，弹性模量为 E，泊松比为 ν. 选取柱坐标 (r,θ,z)，z 沿板的厚度方向，坐标原点为板心，在 3 个方向的位移为 (u,v,w). 假设板的两个面是绝热的且沿厚度方向温度是均匀的，即 $T=T(r,\theta)$. 内力和弯矩与应变和曲率的关系可以写成

$$\begin{cases} N_r=K(\varepsilon_r+\nu\varepsilon_\theta)-AT \\ N_\theta=K(\varepsilon_\theta+\nu\varepsilon_r)-AT \\ N_{r\theta}=K(1-\nu)\varepsilon_{r\theta}/2; \end{cases} \quad \begin{cases} M_r=D(\kappa_r+\nu\kappa_\theta) \\ M_\theta=D(\kappa_\theta+\nu\kappa_r) \\ M_{r\theta}=D(1-\nu)\kappa_{r\theta} \end{cases} \tag{1}$$

式中：抗弯刚度 $D=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$；抗拉刚度 $K=Eh/(1-\nu^2)$；热力系数 $A=E\alpha h/(1-\nu)$，α 为

收稿日期：2006-11-18； **修回日期**：2007-09-23.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10672031).
作者简介：徐新生*(1957-)，男，教授，博士生导师，E-mail：xsxu@dlut.edu.cn.

材料的热膨胀系数. 应变和曲率与位移的几何关系[11,12]为

$$\begin{cases}\varepsilon_r=\partial_r u\\ \varepsilon_\theta=(\partial_\theta v)/r+u/r\\ \varepsilon_{r\theta}=(\partial_\theta u)/r+\partial_r v-v/r\end{cases}\qquad\begin{cases}\kappa_r=-\partial_r^2 w\\ \kappa_\theta=-[(\partial_\theta^2 w)/r^2+(\partial_r w)/r]\\ \kappa_{r\theta}=-\partial_r[(\partial_\theta w)/r]\end{cases}\tag{2}$$

这里$\partial_r=\partial/\partial r,\partial_\theta=\partial/\partial\theta$. 应变能密度函数可表示为

$$U=\frac{K}{2}\left[(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta)^2-2(1-\nu)\left(\varepsilon_r\varepsilon_\theta-\frac{1}{4}\varepsilon_{r\theta}^2\right)\right]+\frac{D}{2}[(\kappa_r+\kappa_\theta)^2-2(1-\nu)(\kappa_r\kappa_\theta-\kappa_{r\theta}^2)]\tag{3}$$

只考虑弯曲变形,不妨记 $\dot{F}=\partial_\theta F$,其中用 θ 坐标模拟时间坐标. 定义 θ 坐标方向的转角 $\varphi=-\dot{w}/r$. 拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}L(w,\dot{w},\varphi,\dot{\varphi})={}&rU(w,\dot{w},\varphi,\dot{\varphi})+N_T[r(\partial_r w)^2+\dot{w}^2/r]/2=Dr\{[\partial_r^2 w+(\partial_r w)/r-\dot{\varphi}/r]^2-2(1-\nu)[(\partial_r^2 w)\times\\&((\partial_r w)/r+\ddot{w}/r^2)-((\partial_r\dot{w})/r-\dot{w}/r^2)^2]-(\varphi+\dot{w}/r)\times\\&[(\partial_r^2\dot{w})/r+(\partial_r\dot{w})/r^2+\dddot{w}/r^3]\}/2+N_T[r(\partial_r w)^2+\dot{w}^2/r]/2\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $N_T=[E\alpha h/(1-\nu)]T$,为温度引起的内力. 哈密顿作用量为$\int_0^{2\pi}\int_0^a L(w,\dot{w},\varphi,\dot{\varphi})\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,由哈密顿原理知$\delta\int_0^{2\pi}\int_0^a L(w,\dot{w},\varphi,\dot{\varphi})\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=0$. 在拉格朗日体系中,控制方程和侧边界条件都可以由方程(4)的变分得到. 此方程用位移形式表示,这种位移法只含有一种变量并且属于拉格朗日体系.

2 哈密顿体系与正则方程

为了引入哈密顿体系,将广义位移向量写成 $\boldsymbol{q}=(w\quad\varphi)^{\mathrm{T}}$. 相应地,拉格朗日函数(4)可以写成 $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=L(w,\varphi,\dot{w},\dot{\varphi})$. 哈密顿体系下的对偶变量为

$$\boldsymbol{p}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}=\begin{Bmatrix}-D[(\partial_r^2\dot{w})/r+(\partial_r\dot{w})/r^2+\dddot{w}/r^3]+N_T\dot{w}/r\\ -D[\partial_r^2 w+(\partial_r w)/r-\dot{\varphi}/r]\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}Q\\ M\end{Bmatrix}\tag{5}$$

很明显 $Q=Q_\theta$ 为 θ 方向的剪力,$M=(M_r+M_\theta)/(1+\nu)$为一等效弯矩. 基于对偶向量 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{p}$,可引入哈密顿函数

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}}-L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=rM^2/(2D)+M\partial_r(r\partial_r w)-r\varphi Q+N_T r[\varphi^2+(\partial_r w)^2]/2\tag{6}$$

变分方程为

$$\delta\int_0^{2\pi}\int_0^a[\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}}-H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})]\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=0\tag{7}$$

进一步得到哈密顿体系下的对偶正则方程

$$\begin{Bmatrix}\dot{w}\\ \dot{\varphi}\\ \dot{Q}\\ \dot{M}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\delta H/\delta Q\\ \delta H/\delta M\\ -\delta H/\delta w\\ -\delta H/\delta\varphi\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-r&0&0\\ \partial_r(r\partial_r)&0&0&r/D\\ N_T\partial_r(r\partial_r)&0&0&-\partial_r(r\partial_r)\\ 0&-N_T r&r&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w\\ \varphi\\ Q\\ M\end{Bmatrix}\tag{8}$$

注意到从方程(7)到方程(8)用到了分部积分,则可在得到正则方程的同时得到相应的边界条件. 若仅考虑问题的边界沿径向无广义位移或广义力的作用,这样问题为齐次边界条件,则有

$$\begin{cases}w\cdot[(2-\nu)\partial_r M+(1-\nu)M/r+D(1-\nu)(1/r)\partial_r^2(r\partial_r w)+N_T\partial_r w]|_{r=a}=0\\ (\partial_r w)\cdot[D(1-\nu)\partial_r^2 w-\nu M]|_{r=a}=0\end{cases}\tag{9}$$

式中可以验证$(2-\nu)\partial_r M+(1-\nu)M/r+D(1-\nu)\times(1/r)\partial_r^2(r\partial_r w)+N_T\partial_r w=V_r+N_T\partial_r w=Q_r+\partial_\theta M_{r\theta}/r+N_T\partial_r w$,这里 V_r 为等效剪力,$N_T\partial_r w$为中面轴力引起的剪力;$\nu M-D(1-\nu)\partial_r^2 w=M_r$. 这样边界条件可有多种组合,以固支和简支条件为例分别为

$$w|_{r=a}=0;\ \partial_r w|_{r=a}=0\tag{10}$$

$$w|_{r=a}=0;\ [D(1-\nu)\partial_r^2 w-\nu M]|_{r=a}=0\tag{11}$$

这里简支条件是指板法向位移和弯矩为零,而径向位移被限制为无移动. 同时也注意到正则方程是齐次方程,若对正则方程有一扰动,所得的扰动方程与正则方程完全相同,以下不再区别之.

3 辛本征值与本征解

令状态向量 $\boldsymbol{\Psi}=(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$,方程(8)可表达为

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Psi}\tag{12}$$

将方程(12)的解写成(广义分离变量法)$\boldsymbol{\Psi}(r,\theta)=$

$\boldsymbol{\Psi}_n(r)\mathrm{e}^{\mu_n\theta}$，其中 μ_n 是本征值，而本征向量 $\boldsymbol{\Psi}_n(r)$ 满足本征方程

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Psi}_n=\mu_n\boldsymbol{\Psi}_n \tag{13}$$

注意到相容条件 $\boldsymbol{\Psi}(r,0)=\boldsymbol{\Psi}_n(r)=\boldsymbol{\Psi}(r,2\pi)=\boldsymbol{\Psi}_n(r)\mathrm{e}^{2\mu_n\pi}$，可得 $\mu_n=\mathrm{i}n(n=0,\pm1,\cdots)$．求解式(13)，并考虑物理解(在 r 为 0 时有界)可得到本征向量 $\boldsymbol{\Psi}_n=(w_n\quad \varphi_n\quad Q_n\quad M_n)^{\mathrm{T}}$ 为

$$\boldsymbol{\Psi}_n=\mathrm{C}_1\begin{pmatrix} r^n\\ -\mathrm{i}nr^{n-1}\\ -\mathrm{i}n\mathrm{N}_{\mathrm{T}}r^{n-1}\\ 0\end{pmatrix}+\mathrm{C}_2\begin{pmatrix} \mathrm{J}_n(\lambda r)\\ -\mathrm{i}n\mathrm{J}_n(\lambda r)r^{-1}\\ 0\\ \mathrm{D}\lambda^2\mathrm{J}_n(\lambda r)\end{pmatrix} \tag{14}$$

这里 $\lambda^2=\mathrm{N}_{\mathrm{T}}/\mathrm{D}$；$\mathrm{J}_n(*)$为第一类 Bessel 函数．当 $n=0$ 时为零本征值本征解，对应的是轴对称问题．可以证明[17,18]由本征函数向量组成的本征向量空间是完备的；任意状态向量 $\boldsymbol{\Psi}$ 总可由本征函数向量的线性组合表示．

4　临界载荷和屈曲模态

使解(14)满足边界条件(10)或(11)，得

$$\begin{pmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12}\\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{C}_1\\ \mathrm{C}_2\end{pmatrix}=\mathbf{0} \tag{15}$$

其中 $\mathrm{A}_{11}=a^n$，$\mathrm{A}_{12}=\mathrm{J}_n(\lambda a)$．对于固支边界条件(10)，$\mathrm{A}_{21}=na^n$，$\mathrm{A}_{22}=2[n\mathrm{J}_n(\lambda a)-\lambda a\mathrm{J}_{n+1}(\lambda a)]$；对于简支边界条件(11)，$\mathrm{A}_{21}=2n(n-1)a^n$，$\mathrm{A}_{22}=[2n(n-1)-(1+3\nu)a^2\lambda^2/(1-\nu)]\mathrm{J}_n(\lambda a)+2\lambda a\mathrm{J}_{n+1}(\lambda a)$．若解(14)恒为零即为均匀压缩问题．若圆板发生屈曲则解式(14)不恒为零，此时式(15)系数行列式须为零，即

$$|\mathrm{A}_{ij}|=0 \tag{16}$$

或对于固支边界条件，$\mathrm{J}_{n+1}(\lambda a)=0$；对于简支边界条件，$\lambda^2a^2[4\nu\mathrm{J}_n(\lambda a)-(1-\nu)(\mathrm{J}_{n-2}(\lambda a)+\mathrm{J}_{n+2}(\lambda a))]+4n(n-1)(1-\nu)\mathrm{J}_n(\lambda a)=0$．临界热载荷 N_{T} 或 λ 可由上式确定，临界温度 $T_{\mathrm{cr}}=\mathrm{N}_{\mathrm{T}}(1-\nu)/(E\alpha h)$．注意到对于任一个给定的 n，临界载荷也是无穷多的，不妨记根为 $\lambda_{nm}(n=0,1,2,3,\cdots;\ m=1,2,3,\cdots)$．相应的本征向量或屈曲模态可通过式(15)和(14)得到：

$$\boldsymbol{\Psi}_{nm}(r)=\begin{pmatrix}(r/a)^n\mathrm{J}_n(\lambda_{nm}a)+\mathrm{J}_n(\lambda_{nm}r)\\ -\mathrm{i}n(r/a)^n\mathrm{J}_n(\lambda_{nm}a)r^{-1}-\mathrm{i}n\mathrm{J}_n(\lambda_{nm}r)r^{-1}\\ -\mathrm{i}n\mathrm{N}_{\mathrm{T}}(r/a)^n\mathrm{J}_n(\lambda_{nm}a)r^{-1}\\ \mathrm{D}\lambda_{nm}^2\mathrm{J}_n(\lambda_{nm}r)\end{pmatrix} \tag{17}$$

这样对于具体问题的解总可以表示为本征函数向量的线性组合

$$\boldsymbol{\Psi}=\sum_{n,m}C_{nm}\boldsymbol{\Psi}_{nm}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{18}$$

5　数值结果

为进行数值计算，先将问题量纲一化，令 $R=r/a$，$W=w/a$，$\widetilde{M}=Ma/D$，$\widetilde{Q}=Qa^2/D$，临界温度 $T_{\mathrm{cr}}=\alpha T=N_Ta^2/D=\lambda_{nm}^2(h/a)^2/(1+\nu)$，取 $\nu=0.25$．不妨称代表周向屈曲波纹的 n 为第 n 阶；表示径向情况的 m 为第 m 分支．从式(16)可确定第 n 阶第 m 分支的临界温度 $T_{\mathrm{cr}}(n,m)$．考虑固支边界条件，图 1 给出前 4 阶($n=0,1,2,3$)及前 11 个分支($m=1,2,\cdots,11$)的临界温度随板厚的变化规律．在图中临界温度最小的曲线是第 1 分支曲线，依次是第 2 分支曲线等．从图中可以看到随板厚变薄临界温度降低且曲线变得密集，即更容易发生屈曲．临界温度对每一个 n 都有许多分支曲线．对同样的分支较大的 n 对应的临界温度也高．图 2 比较了固支和简支圆板第 4 阶前 6 分支的临界温度($n=4$)，表明固支对应的临界温度要比简支情况高，但它们的曲线形状和趋势是相同的．

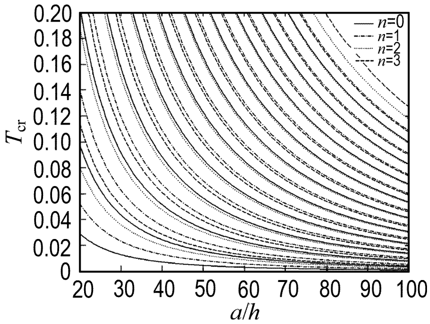


图 1　圆板临界温度随厚度的变化规律

Fig. 1　Variation of buckling critical temperatures of the circular plates with the thickness

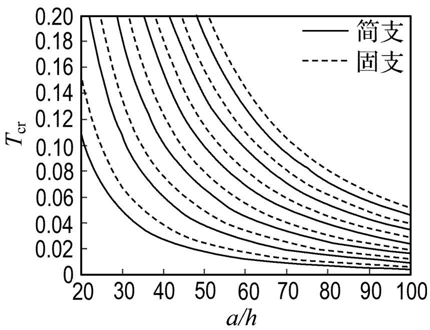
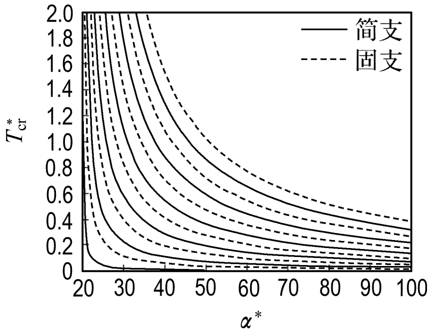


图 2　固支和简支圆板临界温度的比较

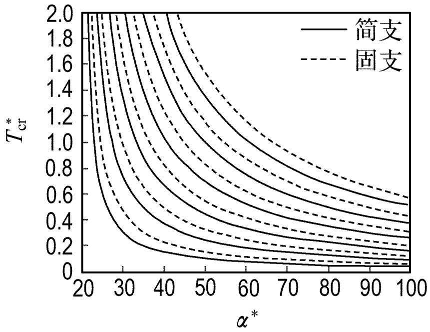
Fig. 2　Comparison of critical temperatures of plates with fixed and simple boundaries

为讨论材料的热膨胀系数 α 对临界温度的影响，让初始温度 $T_0>0$ 作为特征温度．这时的临界温度定义为 $T_{\mathrm{cr}}^*=T/T_0$，参数 $\alpha^*=\alpha T_0$，取板厚

$h/a=0.05$. 图3给出了两种边界条件下前6分支的临界温度随热膨胀系数的变化,其中(a)为轴对称问题($n=0$),(b)为第3阶临界温度问题($n=3$). 可以看出随热膨胀系数的增加各阶临界温度降低,此外比较(a)和(b)知高阶临界温度相对也高,同时固支圆板的临界温度比简支情况的要高,这与前面的讨论一致. 说明热膨胀系数大的结构更容易发生屈曲. 从以上的数值结果可以看出,其现象和规律与物理直观是一致的.



(a) $n=0$

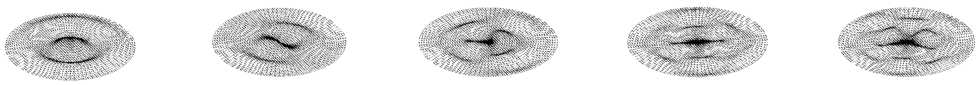


(b) $n=3$

图3 临界温度随热膨胀系数变化

Fig. 3 Variation of buckling critical temperatures with the coefficient of thermal expansion

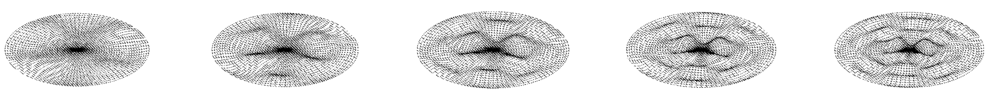
图4给出了固支圆板0到4阶中第3分支的临界温度对应的屈曲模态. 计算中取板厚$h/a=0.05$,所得到的临界温度分别为0.076 0、0.185 5、0.333 9、0.521 5和0.748 6;对应的屈曲模态分别由图4(a)~(e)给出. 从屈曲模态图中可明显地看出n表示周向屈曲波纹的多少,即随着n增大周向屈曲波纹增多. 特别值得一提的是$n=0$对应轴对称问题,这种情况的临界载荷要比其他阶同分支的临界载荷低,换句话说轴对称屈曲更容易发生. 对于简支圆板的情况也完全类似. 为说明不同分支临界温度对应的屈曲模态特点,以简支圆板为例,图5展示了几个典型的屈曲模态. 其中图5(a)~(e)对应$n=3$,第1到第5分支(临界温度分别为0.207 0、0.270 0、0.338 8、0.413 1和0.493 0)的屈曲模态. 可见高阶分支的临界温度对应的屈曲模态在径向屈曲波纹多且复杂.



(a) n=0 (b) n=1 (c) n=2 (d) n=3 (e) n=4

图4 固支圆板第3分支的临界温度对应的屈曲模态

Fig. 4 Buckling modes of the fixed circular plate for the branch 3 of critical temperatures



(a) m=1 (b) m=2 (c) m=3 (d) m=4 (e) m=5

图5 简支圆板第3阶临界温度对应的屈曲模态

Fig. 5 Buckling modes of the simple circular plate for critical temperatures of the order 3

6 结 语

传统的振型函数方法是讨论弹性圆板非轴对称屈曲问题的一种有效方法,它将偏微分方程问题简化为常微分方程问题,但解的形式与假定的函数有关,不能保证得到所有的解. 本文的辛方法可以给出一个完备的本征解空间,或圆板热屈曲问题的模态空间. 在哈密顿体系下临界载荷和屈曲模态归结为辛本征值和本征向量问题,其中零本征值本征解和非零本征值本征解分别揭示圆板轴对称和非轴对称屈曲问题. 对于一些结构,特别是简支边界条件的结构,热屈曲问题是不能被忽视的.

参考文献:

[1] 何福保,侯 宇. 用弹性力学方法研究平夹支圆板的稳定问题[J]. 上海大学学报(自然科学版), 1995, **1**(3):254-258

[2] WANG A W. Axisymmetric postbuckling and

secondary bifurcation buckling of circular plates [J]. **Int J Non-Linear Mech**, 2000, **35**(2): 279-292

[3] LAURA P A A, GUTIÉRREZ R H, SANZI H C, *et al*. Buckling of circular, solid and annular plates with an intermediate circular support [J]. **Ocean Eng**, 2000, **27**(7): 749-755

[4] CIANCIO P M, REYES J A. Buckling of circular, annular plates of continuously variable thickness used as internal bulkheads in submersibles [J]. **Ocean Eng**, 2003, **30**(11): 1323-1333

[5] WANG C M, XIANG Y, CHAKRABARTY J. Elastic/plastic buckling of thick plates [J]. **Int J Solids Struct**, 2001, **38**(48-49): 8617-8640

[6] AUNG T M, WANG C M. Buckling of circular plates under intermediate and edge radial loads [J]. **Thin-Walled Struct**, 2005, **43**(12): 1926-1933

[7] 侯朝胜，吴双文．环形薄板轴对称非线性屈曲的样条函数解法[J]．计算力学学报，2006，**23**(1)：124-128

[8] KOSEL F, BREMEC B. Elastoplastic buckling of circular annular plates under uniform in-plane loading [J]. **Thin-Walled Struct**, 2004, **42**(1): 101-117

[9] OZAKCA M, TAYSI N, KOLCU F. Buckling analysis and shape optimization of elastic variable thickness circular and annular plates—I. Finite element formulation [J]. **Eng Struct**, 2003, **25**(2): 181-192

[10] RAJU K K, NAIDU N R, RAD G V, *et al*. Thermal buckling of circular plates with localized axisymmetric damages [J]. **Comput & Struct**, 1996, **60**(6): 1105-1109

[11] MURPHY K D, FERREIRA D. Thermal buckling of rectangular plates [J]. **Int J Solids Struct**, 2001, **38**(22-23): 3979-3994

[12] WU L. Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate [J]. **Compos Struct**, 2004, **64**(2): 211-218

[13] MATSUNAGA H. Thermal buckling of cross-ply laminated composite and sandwich plates according to a global higher-order deformation theory [J]. **Compos Struct**, 2005, **68**(4): 439-454

[14] JONES R M. Thermal buckling of uniformly heated unidirectional and symmetric cross-ply laminated fiber-reinforced composite uniaxial in-plane restrained simply supported rectangular plates [J]. **Composites: Part A Appl Sci Manuf**, 2005, **36**(10): 1355-1367

[15] JAMAL M, LAHLOU L. A semi-analytical buckling analysis of imperfect cylindrical shells under axial compression [J]. **Int J Solids Struct**, 2004, **40**(5): 1311-1327

[16] SOFIYEV A H, AKSOGAN O. Buckling of a conical thin shell with variable thickness under a dynamic loading [J]. **J Sound Vib**, 2004, **270**(4-5): 903-915

[17] 钟万勰．弹性力学求解新体系[M]．大连：大连理工大学出版社，1995

[18] ZHONG W X. **Duality System in Applied Mechanics and Optimal Control** [M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2004

Thermal buckling problem of elastic circular plates in Hamiltonian system

XU Xin-sheng*, QIU Wen-biao, ZHOU Zhen-huan, CHU Hong-jie

(State Key Lab. of Struct. Anal. for Ind. Equip., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China)

Abstract: The buckling of structures, which is aroused by temperature, is discussed as the primary problem. The circular plate is as one of basal structures and its thermal buckling is studied with a new method. For researching, a Hamiltonian system is presented for the thermal buckling of elastic circular plates. In the symplectic system, critical temperatures and buckling modes are corresponding to eigenvalues and eigenvectors, namely, every symplectic eigenvalue and eigenvector correspond to a critical temperature and the respective buckling mode. In the symplectic method, the axisymmetric and non-axisymmetric buckling modes can be obtained directly. Since the eigen solution space is complete, all critical temperatures and corresponding buckling modes are able to be obtained. Numerical results show the characteristics of critical temperatures and buckling modes. The symplectic method provides a way for solving other problems.

Key words: elastic circular plate; thermal buckling; Hamiltonian system; critical temperature; buckling mode