文章编号：1000-8608(2008)01-0006-06

几何非线性连续体结构拓扑优化仿生方法

蔡　坤*，张洪武，周　强，陈飙松

（大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室，辽宁 大连 116024）

摘要：利用基于Wolff法则的仿生方法对几何非线性、线弹性连续体进行拓扑优化．该仿生方法中引入构造张量作为设计变量用于描述设计域内各点处材料微结构的几何特征及其宏观弹性本构．同时，引入参考应变区间并结合Wolff法则用于确定结构中某点处材料的更新方案．考查了结构最优拓扑的网格依赖性以及参考应变区间对结构的最优拓扑及材料分布的影响．数值算例表明，结构的最优拓扑无网格依赖性．几何非线性线弹性连续体结构的最优拓扑明显地依赖于参考应变区间的选取．如果参考应变区间长度为零且荷载为指定位移时，按同比例改变荷载及参考应变区间上确界，可得到相近的最优拓扑和材料的分布．

关键词：拓扑优化；几何非线性；Wolff法则；构造张量

中图分类号：O342　　**文献标志码**：A

0 引　言

在结构设计中，单纯对其形状和尺寸优化往往无法使得结构的性能达到最佳．为了弥补这种不足，有必要进行结构的拓扑优化，即结构中的材料布局优化．拓扑优化的对象包括骨架类结构和连续体结构，其中连续体拓扑优化研究始于20世纪80年代[1~9]．拓扑优化自引入连续体结构设计以来已得到广泛的应用．

按照寻优手段，连续体拓扑优化方法主要分为两大类：一类是数学规划等方法[1,2]；另一类为准则法[3~6]．准则法的优点在于概念简单，无需敏度分析，且计算效率高．本文将利用基于生物力学中的Wolff法则的仿生方法对结构进行拓扑优化．生物力学中的Wolff[10]法则是指骨骼结构中的骨小梁沿着主应力方向生长．从力学角度来看，骨骼是较为理想的承力结构，因此将骨骼重建过程看成优化过程[11]是合理的．本文所用仿生方法[6]的基本思想：待优化的结构是一块遵从Wolff法则生长的“骨骼”；最优拓扑的寻找过程比拟为“骨骼”的重建过程；“骨骼”的重建规律作为材料分布更新准则；“骨骼”中物质分布不再改变时，结构获得最优拓扑．

在以往的连续体结构拓扑优化中，待优化结构往往被假定为线弹性小变形．然而，许多情况下这种假定与实际问题不相吻合．为了能够使得数值分析对象更加与实际问题一致，本文将考虑线弹性结构发生大变形下的拓扑优化问题[7~9]．

结构中的材料初始为各向同性实体材料，在重建过程中表现为具有微结构的多孔材料．文中引入对称正定的二阶构造张量[12~15]描述物质点的微结构，并用它描述该点处的宏观正交各向异性弹性本构．若构造张量为各向同性张量，则该点处的宏观弹性本构呈各向同性．因此，优化过程中材料的微结构及宏观正交各向异性弹性本构张量的更新均通过构造张量的更新实现，并称此优化过程为各向异性生长过程．相应地，若在优化过程中总保持各点处的构造张量正比于二阶单位张量，则称此优化过程为各向同性生长过程．为了便于描述最优拓扑性质，本文只给出各向同性生长下的数值算例．

收稿日期：2006-06-15；　**修回日期**：2007-10-20．
基金项目：国家自然科学基金与创新群体基金资助项目(10225212；10421202；10402005)；长江学者和创新团队发展计划以及国家基础性发展规划资助项目(2005CB321704)．
作者简介：蔡　坤*(1978-)，男，博士生，E-mail:kuicansj@sohu.com；张洪武(1964-)，男，博士，长江学者奖励计划特聘教授，博士生导师．

1　基本理论

1.1　构造张量和弹性本构张量

构造张量

$$\boldsymbol{B}=\sum_{i=1}^{3} b_i \boldsymbol{q}_i \otimes \boldsymbol{q}_i \tag{1}$$

弹性张量

$$\boldsymbol{D}=\lambda \boldsymbol{B}\otimes \boldsymbol{B}+2\mu \boldsymbol{B}\underline{\otimes} \boldsymbol{B} \tag{2}$$

式中：b_i、$\boldsymbol{q}_i$ 为构造张量 $\boldsymbol{B}$ 在全局坐标系下的一个特征对，并且 $b_i\in[\delta,1.0]$，δ 为一个很小的正常数以确保构造张量正定，$\boldsymbol{q}_i$ 为材料的弹性对称轴向(即材料主方向)单位矢量；μ、λ 是指各向同性基础材料(结构中的固相)的弹性参数；“$\otimes$”和“$\underline{\otimes}$”表示两种不同形式的并矢积，对任意的同维二阶张量 $\mathbf{A}$、$\mathbf{C}$、$\mathbf{G}$，有

(a) $\mathbf{A}:\mathbf{G}=\mathrm{Tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{G})$

(b) $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{G}):\mathbf{C}=(\mathbf{G}:\mathbf{C})\mathbf{A}$

(c) $(\mathbf{A}\underline{\otimes}\mathbf{G}):\mathbf{C}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{G}^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{G}^{\mathrm{T}})$

式(2)所描述的弹性本构方式可参见文献[15].

1.2　多孔介质中物质点的相对密度定义

为了描述结构中的材料布局，首先需要知道各点的固相相对密度．此处用构造张量的不变量表示多孔介质的相对密度 ρ[6] 如下：

$$\rho=\begin{cases}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}^2)-2\mathrm{Det}(\boldsymbol{B}) & (\text{三维情况})\\ \mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}^2)-\mathrm{Det}(\boldsymbol{B}^2) & (\text{二维情况})\end{cases} \tag{3}$$

当构造张量 $\boldsymbol{B}$ 为单位阵时，式(3)中相对密度为1，材料无孔隙．

2　结构优化问题的表述

2.1　基本控制方程及边界条件

基本控制方程

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}:\boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}[\nabla \boldsymbol{u}+(\nabla \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}+(\nabla \boldsymbol{u})\cdot(\nabla \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}]\\ \nabla\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})+\boldsymbol{f}=\mathbf{0}\end{gathered} \tag{4}$$

其中“$\cdot$”表示一次张量缩并；“$:$”表示两次张量缩并．

边界条件

$$\begin{gathered}\Gamma_\sigma:(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{F}^*\\ \Gamma_u:\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*\end{gathered} \tag{5}$$

2.2　优化模型

$$\begin{aligned}&\text{Find }\{\boldsymbol{B}_m\}\ \&R_{\mathrm{V}}=\frac{1}{\mathrm{V}_\Omega}\sum_{m=1}^{N_e}\rho_m\cdot \mathrm{V}_m\\ &\text{s.t. } |\varepsilon_{i,k,m}|\in[\varepsilon_{\inf},\varepsilon_{\sup}]\\ &\qquad \boldsymbol{B}_m\ \text{正定}\end{aligned} \tag{6}$$

式(4)～(6)中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为第二 Piola-Kirchhoff 应力张量；$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为 Green-Lagrange 应变张量；$\boldsymbol{F}$ 为变形梯度张量；$\boldsymbol{u}$ 为位移矢量；$\boldsymbol{f}$ 为体力；$\boldsymbol{F}^*$ 为边界荷载；$\boldsymbol{u}^*$ 为给定的边界位移；$\varepsilon_{i,k,m}$为第 k 生长迭代步中第 m 个单元的第 i 个主应变；$[\varepsilon_{\inf},\varepsilon_{\sup}]$为参考应变区间；“$\nabla$”为梯度算子；$\boldsymbol{B}_m$ 为单元 m 的构造张量；N_e 为结构中单元总数；ρ_m、V_m 分别为单元 m 的相对密度和单元体积；V_Ω、R_{V} 分别为初始设计域的体积及迭代过程中固相的体积率；Γ_σ、Γ_u 分别为应力边界和位移边界．

2.3　参考应变区间的意义及优化准则

仿照骨骼的重建规律，连续体结构优化过程中材料的更新规律可描述如下：若某一物质点处在某一方向上的主应变的绝对值处于给定的参考应变区间里，微结构不发生变化；若主应变绝对值高于参考应变区间上确界时，则材料微结构中沿对应的材料主方向上出现物质“沉淀”，以增强该方向的抗变形能力；相反地，若主应变绝对值低于参考应变区间下确界时，沿对应材料主方向上出现物质“消散”，以降低该方向的抗变形能力．显然，参考应变区间对结构最优拓扑的影响很大．若给定的参考应变区间下确界太大，则最优结构中物质总量很少，结构柔度很大．相反地，若区间上确界太小，最优结构物质总量会很大，结构刚度很大．对于几何大变形小应变结构，参考应变区间对结构的拓扑影响和小变形结构下的情形相同，只是计算量增加．若结构处于大应变情况下，则两者最优拓扑对参考应变区间的依赖性应该不同．在线弹性小变形情况下，优化准则(即材料更新规律)的作用是促使整个结构中各点处的各个方向上的主应变都落在参考应变区间．而在大变形情况下参考应变区间并不能保证这一结论成立．因此，采用结构中固相体积率的收敛条件作为算法收敛判定准则．

3　算法表述

3.1　构造张量和弹性本构张量更新

构造张量的更新包括特征主值更新和特征主方向更新．特征主值更新可根据生长规律进行；

特征主方向更新可根据 Wolff 法则,即一点处第 k 步的主应力方向作为该点处第 $k+1$ 步构造张量的特征主方向(亦即材料主方向). 与小变形问题不同的是,结构处于几何大变形下,特征主方向更新依赖于物质点处材料主方向的刚体旋转.

对 k 步中第 m 个单元在 i 方向上的生长规律的数学描述为

$$\Delta b_{i,k,m}=\begin{cases} g_1>0;\ |\varepsilon_{i,k,m}|>\varepsilon_{\sup} \\ 0;\ 其他 \\ g_2<0;\ |\varepsilon_{i,k,m}|<\varepsilon_{\inf} \end{cases} \tag{7}$$

$$b_{i,k+1,m}=\begin{cases} 1.0;\ b_{i,k+1,m}\geqslant 1.0 \\ b_{i,k,m}+\Delta b_{i,k,m};\ 其他 \\ \delta;\ b_{i,k+1,m}\leqslant\delta \end{cases} \tag{8}$$

其中 g_1 为沉淀速度,g_2 为消散速度;式(7)中 $\Delta b_{i,k,m}=0$ 是指在 i 方向上材料处于重建平衡状态. 若在所有方向上都处于重建/生长平衡状态,则该点处于重建平衡状态.

构造张量与本构张量迭代式分别为

$$\boldsymbol{B}_{k+1,m}=\boldsymbol{Q}_{k,m}\mathbf{Diag}[b_{1,k+1,m},\cdots,b_{N_{\dim},k+1,m}]\boldsymbol{Q}_{k,m}^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{D}_{k+1,m}=\lambda^*\boldsymbol{B}_{k+1,m}\otimes\boldsymbol{B}_{k+1,m}+2\mu\boldsymbol{B}_{k+1,m}\underline{\otimes}\boldsymbol{B}_{k+1,m} \tag{10}$$

其中 $i=1,\cdots,N_{\dim}$,对于三维问题 $N_{\dim}=3$,$\boldsymbol{Q}_{k,m}=(\boldsymbol{q}_{1,k,m}\quad \boldsymbol{q}_{2,k,m}\quad \boldsymbol{q}_{3,k,m})$,对于平面问题 $N_{\dim}=2$,$\boldsymbol{Q}_{k,m}=(\boldsymbol{q}_{1,k,m}\quad \boldsymbol{q}_{2,k,m})$,

$$\lambda^*=\begin{cases} \lambda(三维或平面应变情况) \\ \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}(平面应力情况) \end{cases} \tag{11}$$

若结构按各向同性生长优化,则式(8)中构造张量的特征主值需要平均化以保证构造张量为各向同性张量

$$b_{i,k+1,m}^*=\frac{1}{N_{\dim}}\sum_{j=1}^{N_{\dim}}b_{j,k+1,m} \tag{12}$$

此时,各构造张量的特征主方向不必更新.

3.2 算法流程

(1)利用有限元离散结构,给定参考应变区间,初始化各参数:令 $\delta<b_{i,0}<1.0$,$k=1$;

(2)判断是否达到指定迭代次数,是则转(6),否则转(3);

(3)对结构进行有限元分析,获取单元的主应变和应力主方向;

(4)根据固相体积率判断算法是否收敛,是则转(6),否则转(5);

(5)更新各单元的构造张量和弹性本构张量,$k=k+1$,转(2);

(6)停止迭代.

为了提高计算效率,加速收敛,可设初始结构中材料呈均匀各向同性分布,各点处构造张量的所有特征主值均为 $b_{i,0}$,即初始材料参数小于1.0. 在第(3)步中的有限元分析中,材料性质在非线性分析[16]过程中并不改变. 单元的应力场和应变场是指结构进行非线性分析完毕后的应力场和应变场.

4 算 例

本文利用商业软件 ANSYS 的语言 APDL 编写拓扑优化算法程序,其中非线性分析过程采用 ANSYS 自带的求解器以保证计算结果可靠.

4.1 最优拓扑的网格依赖性分析

图1所示 1.0 m×1.0 m 正方形结构,厚度为 0.005 m. 材料的弹性模量和泊松比分别为 $E=210$ GPa 和 $\nu=0.333$. 结构四边 Z 向位移约束,中心点 P 处指定位移为 $u_Z=-0.05$ m,结构在 XY 面内无刚体运动. 取参考应变区间$[0.499\times10^{-2},0.500\times10^{-2}]$;初始材料参数 $b_{i,0}=0.5$,生长速度:第1至15步 $g_1=0.15$,$g_2=-0.09$;第16至25步 $g_1=0.05$,$g_2=-0.03$;第26步起,$g_1=0.017$,$g_2=-0.01$. 现将结构分别划分为(a) 40×40个;(b) 60×60个;(c) 80×80个壳单元以考查网格依赖性(见图2).

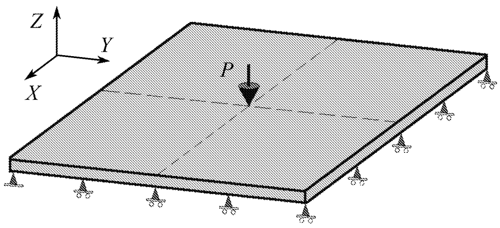
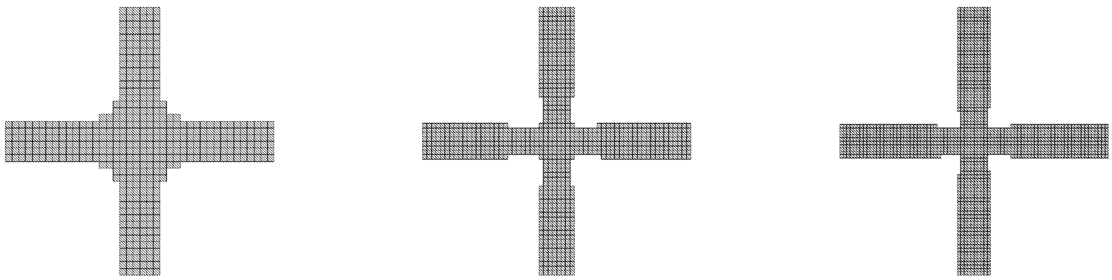


图1 初始设计域(1.0 m×1.0 m)

Fig.1 Initial design domain (1.0 m×1.0 m)

结构的最优拓扑结果表明,除了靠近结构形心处附近区域的物质分布有差异外,结构的最优拓扑并不随网格划分而不同,即最优拓扑无网格依赖性.

图3表明,结构中的固相体积率(V/V_0)经30步迭代后平稳下降. 采用40×40有限元划分方案时,结构的体积率收敛于14.7%;采用60×60划分方案时,体积率收敛于13.7%;采用80×80划分方案时,体积率收敛于13.3%. 因此,网格划分得较粗时,结构中固相体积率偏高. 当网格尺



(a) 40×40　　(b) 60×60　　(c) 80×80

图2　采用不同有限元网格划分方案下结构的最优拓扑（1.0 m×1.0 m）

Fig. 2　Optimal topologies of structure with different finite element meshing schemes (1.0 m×1.0 m)

寸细化时，结构中固相的体积率收敛于某一定值．考虑到计算效率，在进行结构分析时没有必要选取很小的单元尺寸．

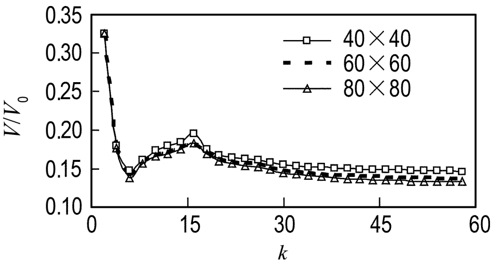


图3　采用不同有限元网格划分下结构体积率迭代历史（1.0 m×1.0 m）

Fig. 3　Iteration histories of volume ratios of structure with different finite element meshing schemes (1.0 m×1.0 m)

4.2　参考应变区间对最优拓扑的影响分析

图4所示2.0 m×2.0 m正方形结构，厚度为0.001 m．材料的E=210 GPa，ν=0.333．结构四边角点及边中点Z向固定，面内四点距离其最近的两条边的距离均为0.5 m的各点（P_1、P_2、P_3、P_4）处指定位移为$u_Z=-0.03$ m，结构在XY面内无刚体运动．初始材料参数$b_{i,0}=0.5$，生长速度：第1至15步$g_1=0.15$，$g_2=-0.09$；第16至25步$g_1=0.05$，$g_2=-0.03$；第26步起，$g_1=0.017$，$g_2=-0.01$．现将结构划分为40×40个壳单元；考虑取不同参考应变区间对结构拓扑的影响：(A) $[0.999\times10^{-4}, 1.000\times10^{-4}]$；(B) $[2.499\times10^{-4}, 2.500\times10^{-4}]$；(C) $[4.999\times10^{-4}, 5.000\times10^{-4}]$．

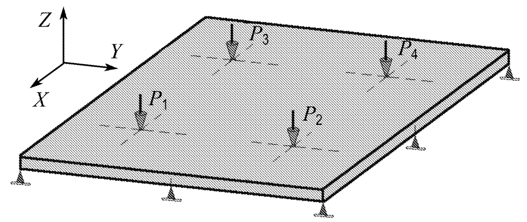


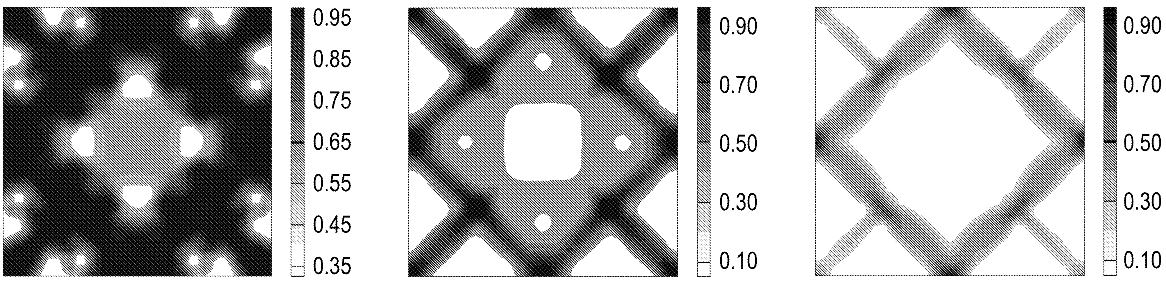
图4　初始设计域（2.0 m×2.0 m）

Fig. 4　Initial design domain (2.0 m×2.0 m)

由指定位移可知，结构变形属于大变形．在相同的加载条件及初始材料情况下，结构的最优拓扑明显不同（见图5（颜色深表示相对密度大，下同））．同时，从图6可知结构中固相的体积率分别收敛于(A)83.2%、(B)48.3%、(C)18.4%．因此，对于给定的边界条件下的结构，参考应变区间确定结构的最优拓扑及固相体积率．

4.3　结构最优拓扑不受变形影响的条件分析

图7所示0.26 m×0.26 m正方形结构内部含有0.11 m×0.11 m的方形洞，厚度为0.004 m．材料的E=210GPa，ν=0.333．结构4个外边角



(a) 条件A　　(b) 条件B　　(c) 条件C

图5　不同条件下结构拓扑（2.0 m×2.0 m）

Fig. 5　Optimal topologies of structure under the different conditions (2.0 m×2.0 m)

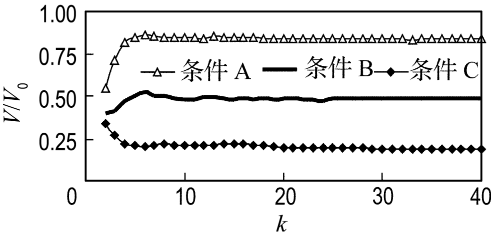


图 6 不同条件下结构体积率的迭代历史 (2.0 m×2.0 m)

Fig. 6 Iteration histories of volume ratios of structure under the different conditions (2.0 m×2.0 m)

点及外边中点固定. 初始材料参数 $b_{i,0}=0.5$,生长速度:第 1 至 15 步 $g_1=0.15$, $g_2=-0.09$;第 16 至 25 步 $g_1=0.05$, $g_2=-0.03$;第 26 步起, $g_1=0.017$, $g_2=-0.01$. 现将结构划分为1 200个壳单元;给出 4 种加载条件,即指定各个内角点(P_1、P_2、P_3、P_4)位移 u_Z 和参考应变区间[$\varepsilon_{\inf}$, $\varepsilon_{\sup}$]分别为

(D) $u_Z=-0.002$ m,[0.999×10^{-3}, 1.000×10^{-3}];

(E) $u_Z=-0.004$ m,[1.999×10^{-3}, 2.000×10^{-3}];

(F) $u_Z=-0.010$ m,[4.999×10^{-3}, 5.000×10^{-3}];

(G) $u_Z=-0.020$ m,[0.999×10^{-2}, 1.000×10^{-2}].

显然,(D)和(E)两种情况下,结构变形可看做是小变形,而(F)和(G)两种情况下,结构变形属于大变形.

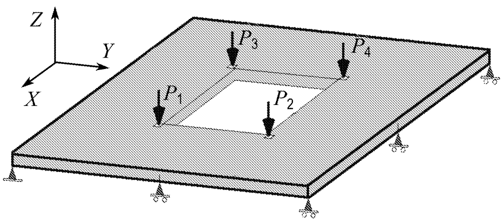
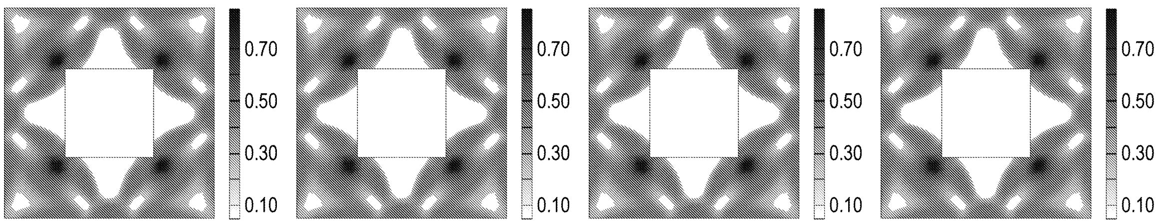


图 7 初始设计域 (0.26 m×0.26 m)

Fig. 7 Initial design domain (0.26 m×0.26 m)

图 8 给出了不同条件下结构的最优拓扑及结构中的物质相对密度分布方式. 图 9 给出了不同条件下结构中的固相体积率随迭代过程的变化规律. 条件(D)时,体积率收敛于 33.9%;条件(E)时,体积率收敛于 33.5%;条件(F)时,体积率收敛于 32.5%;条件(G)时,体积率收敛于 32.4%. 可发现在优化过程中,结构的最优拓扑及材料的分布方式相同,结构中的固相体积分数变化规律基本相同. 因此,对于线弹性结构而言,大变形下的分析结果也许可从小变形下(条件 G)分析得到,只需调整参考应变区间:当各加载点的指定位移成比例时,上确界也按同比例变化(参考应变区间长度趋于 0).



(a) 条件 D (b) 条件 E (c) 条件 F (d) 条件 G

图 8 不同条件下结构拓扑 (0.26 m×0.26 m)

Fig. 8 Optimal topologies of structure under the different conditions (0.26 m×0.26 m)

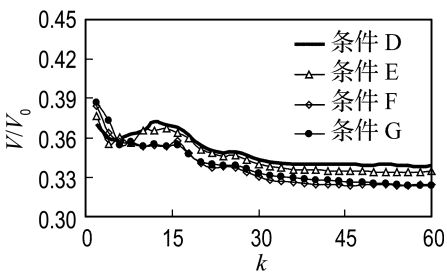


图 9 不同条件下结构体积率的迭代历史 (0.26 m×0.26 m)

Fig. 9 Iteration histories of volume ratios of structure under the different conditions (0.26 m×0.26 m)

5 结 论

(1)最优拓扑并不依赖于网格划分,但依赖于参考应变区间的选取以及结构的边界条件.

(2)与线弹性小变形的结构分析相比,大变形结构拓扑优化的迭代次数并没有明显增加,拓扑优化分析工作量的增加只是体现在结构非线性分析过程.

参考文献:

[1] BENDSΦE M P. Optimal shape design as a material

distribution problem [J]. **Struct Optim**, 1989, **1**(4): 193-202

[2] MEI Y L, WANG X M. A level set method for structural topology optimization and its applications [J]. **Adv Eng Software**, 2004, **35**(7): 415-441

[3] RODRIGUEZ-VELAZQUEZ J, SEIREG A. Optimizing the shapes of structures via a rule based computer program [J]. **Comput Mech Eng**, 1985, **4**(1): 2-28

[4] BAUMGARTNER A, HARZHEIM L, MATTHECK C. SKO (soft kill option): the biological way to find an optimum structure topology [J]. **Int J Fatigue**, 1992, **14**(6):387-393

[5] XIE Y M, STEVEN G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization [J]. **Comput & Struct**, 1993, **49**(5): 885-896

[6] 蔡　坤,张洪武,陈飙松. 基于Wolff法则的连续体结构拓扑优化方法[J]. 力学学报,2006,**38**(4):514-521

[7] BUHL T, PEDERSEN C B W, SIGMUND O. Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization [J]. **Struct Multidisc Optim**, 2000, **19**: 93-104

[8] BRUNS T E, TORTORELLI D A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms [J]. **Comput Methods Appl Mech Eng**, 2001, **190**:3443-3459

[9] GEA H C, LUO J H. Topology optimization of structures with geometrical nonlinearities [J]. **Comput & Struct**,2001, **79**: 1977 -1985

[10] WOLFF J. **The Law of Bone Remodelling** [M]. Berlin: Verlag, 1986

[11] BAGGE M. A model of bone adaptation as an optimization process [J]. **J Biomech**, 2000, **33**(11): 1349-1357

[12] HARRIGAN T P, MANN R W. Characterization of microstructural anisotropy in orthotropic materials using a second rank tensor [J]. **J Mater Sci**, 1984, **19**(3): 761-767

[13] COWIN S C. The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor [J]. **Mech Mater**, 1985, **4**(2): 137-147

[14] ODGAARD A, KABEL J, VAN RIETBERGEN B, *et al*. Fabric and elastic principal directions of cancellous bone are closely related [J]. **J Biomech**, 1997, **30**(5): 487-495

[15] ZYSSET P K, CURNIER A. An alternative model for anisotropic elasticity based on fabric tensors [J]. **Mech Mater**, 1995, **21**(4): 243-250

[16] 匡震邦. 非线性连续介质力学[M]. 上海:上海交通大学出版社,2003

Topology optimization of geometrical nonlinear continuum structures based on a bionics approach

CAI Kun*, ZHANG Hong-wu, ZHOU Qiang, CHEN Biao-song

(State Key Lab. of Struct. Anal. for Ind. Equip., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China)

Abstract: The topology optimization of geometrical nonlinear and linear elastic continuum structures is investigated by the bionics method based on Wolff's Law in biomechanics. In the present approach, the design variable is called as fabric tensor, which is introduced to express both of geometry of the microstructure and the elasticity properties of a material point in the design domain. Simultaneously, the interval of reference strain for the structure is adopted and is applied to renew the fabric tensor of a point together with Wolff's Law. The mesh-dependence of optimal topology of a structure and the influences of the interval of reference strain on the optimal topology are investigated. By numerical examples, several conclusions are drawn as follows: Firstly, the optimal topology of a structure is not dependent on the mesh-refine. Secondly, the optimal topology of a structure with geometric nonlinearity obviously depends on the specified interval of reference strain. Thirdly, if the length of the interval of reference strain equals to zero and the loading conditions are specified displacements on structure, then changing the superimum of the interval and the given displacements proportionally, the optimal topology and the amount of material of the final structure are approximately identical.

Key words: topology optimization; geometrical nonlinearity; Wolff's Law; fabric tensor