

基于动态刚度阵法的加筋板间能量流研究

周 平, 赵德有*

(大连理工大学 船舶工程系, 辽宁 大连 116024)

摘要: 采用动态刚度阵法研究耦合加筋板间的能量传输关系. 首先以带加筋的中厚矩形板为研究对象, 推导了加筋板的动态刚度阵, 为动态刚度阵法提供了一种新单元. 板的运动微分方程由 Mindlin 厚板理论给出, 同时还考虑了板平面内的振动. 对于板上加强筋的处理, 则通过 Hamilton 原理对板的运动方程作相应的修正, 最终得到加筋板的运动微分方程. 而方程的解析解直接用于单元刚度阵的推导, 所得加筋板单元的动态刚度阵结合均方响应表达式即可计算出加筋板的平均振动能量. 最后以 L 形耦合加筋板间为例, 采用动态刚度阵法计算其中高频区域内的振动能量比, 并通过与统计能量分析方法和有限元方法的计算结果比较, 验证了方法的可行性和高效性.

关键词: 动态刚度阵; 加筋板; Mindlin-Engesser 模型; 能量流

中图分类号: TB532 **文献标志码:** A

0 引言

目前, 在对中高频范围内的结构振动与声辐射研究中, 常用结构的平均振动能量来描述其动力特性. 耦合结构间的平均振动能量比直接反映了结构间的耦合程度强弱, 决定了结构间的能量流方向. 因此对它的研究显得尤为重要. 本文以 L 形耦合加筋板为对象研究其能量传输关系.

加筋板结构在船舶、航空航天和车辆等运载工程领域中有着极其广泛的应用, 对这类结构间高频范围内的能量传输常用统计能量分析 (SEA) 方法^[1]来分析计算. 该方法在分析频率范围内结构模态足够密集时, 可以较为准确地估算出结构的平均振动能量, 而当在模态数较少的中低频区域时, 该方法就不再适用. 因此, Simmons^[2]提出了用有限元方法来计算结构的平均振动能量. 它可以避免结构模态数多少的限制, 计算出离散频率下的振动能量. 但是, 当所需计算频率较高时, 有限元法就需要将单元网格划分很密, 这样不但大大地增加了计算量和计算时间, 而且还可能由于单元尺寸过小, 导致单元属性改变, 所以有限元方法在计算结构高频振动特性时误差较大. 为了避免上述统计能量分析与有限元方法存在的问

题, 本文采用动态刚度阵法来计算耦合加筋板的平均振动能量比.

动态刚度阵法由 Kolousek^[3]提出, 是与传统有限元方法十分相似的一种数值方法, 两者之间的不同之处在于动态刚度阵法中的单元刚度阵是从单元运动微分方程的解析解推导所得的, 其中的元素是频率的超越函数, 并同时具有质量和刚度属性; 而有限元方法的单元刚度阵则是通过取近似形函数推导而来的. 因此, 通常来说使用动态刚度阵法计算结构动力特性时, 仅需要极少的单元数, 即可获得较为准确的计算结果; 此外随着计算频率的升高动态刚度阵法也无需进一步细化单元^[4,5]. 正因如此, 动态刚度阵法可以用于计算从低频到高频较宽频率范围内的结构动力特性, 而且计算效率高, 计算结果准确.

本文首先推导考虑平面内振动影响的加筋 Mindlin 板单元的动态刚度阵, 并给出加筋板单元的空间平均的均方响应计算表达式, 再结合加筋板动能公式即可计算出整个空间平均的振动能量; 根据能量等效方法, 将沿两个方向的加强筋能量“平摊”至基板能量中, 以摆脱以往动态刚度阵法仅能沿单向加筋的限制; 最后通过一个 L 形耦

合加筋板结构的数值算例验证方法可行性和高效性。此外,本文进一步讨论平面内振动、剪切变形和转动惯量对结构间弯曲能量传输的影响。

1 加筋 Mindlin 板的动态刚度阵

以图 1 所示的加筋中厚矩形板为例,板的运动方程基于 Mindlin 厚板理论而来,且同时还考虑了平面内振动的影响,而对加强筋则采用 Engesser 模型来处理^[6],并通过 Hamilton 原理修正相应的板运动微分方程,最终得到“平推”后的加筋厚板运动微分方程;继而利用所得运动方程的解析解和节点处力与位移的关系即可推导出加筋 Mindlin 板单元的动态刚度阵;再结合传统有限元方法的单元组装及求解方法^[7]便可求得整体结构的动力响应。

1.1 加筋 Mindlin 板的动能和应变能

如图 1 所示的加筋板结构,基板为各向同性的均匀中厚矩形板,厚为 t ,长为 a ,宽为 b ,弹性模量为 E ,剪切模量为 G ,密度为 ρ ,泊松比为 ν ,并沿 x 和 y 方向布有互相垂直的加强筋。加强筋的材料属性与基板相同,且假设板和加强筋在变形时连接处不存在滑动。

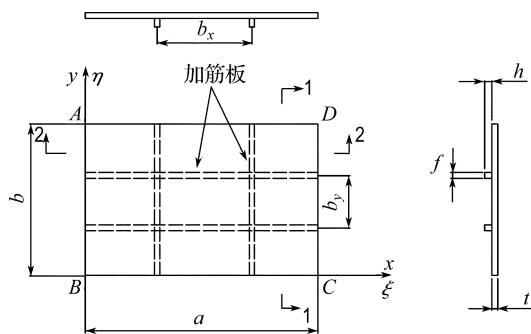


图 1 加筋板单元示意图

Fig. 1 Schematic of stiffened plate

由 Mindlin 厚板理论^[8]可知,板的位移可由下述向量表示:

$$\mathbf{u} = (u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y)^T \quad (1)$$

此处同时考虑了平面内的振动, u 和 v 分别表示板中面沿 x 和 y 方向的位移, w 是沿 z 方向位移。 θ_x 和 θ_y 分别表示板中面法线在 x - z 平面和 y - z 平面内的转角。其定义及正方向如图 2 所示。

Mindlin 板的应变能有如下形式:

$$U_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ B \left[u_{,x}^2 + v_{,y}^2 + 2\nu u_{,x} v_{,y} + \frac{1-\nu}{2} (v_{,x} + u_{,y})^2 \right] + D \left[\theta_{x,x}^2 + \theta_{y,y}^2 + \right. \right.$$

$$\left. 2\nu \theta_{x,x} \theta_{y,y} + \frac{1-\nu}{2} (\theta_{y,x} + \theta_{x,y})^2 \right\} dx dy + kGt \left[(\omega_{,x} + \theta_x)^2 + (\omega_{,y} + \theta_y)^2 \right] dx dy \quad (2)$$

式中: $B = \frac{E}{1-\nu^2}$, $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ 。下标“ $,x$ ”和“ $,y$ ”分别表示对 x 和 y 的导数。

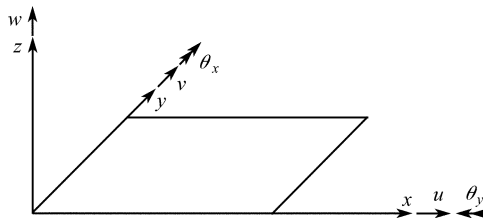


图 2 板单元的广义位移

Fig. 2 Generalized displacements of plate element

考虑平面内振动的 Mindlin 板动能可用式(3)来表示:

$$T_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \rho (t \dot{u}^2 + t \dot{v}^2 + t \dot{w}^2 + \frac{t^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{t^3}{12} \dot{\theta}_y^2) dx dy \quad (3)$$

式中各位移上的点号表示其对时间导数。

加强筋的动能和应变能根据 Engesser 理论作适当的修正而来:在原有基础上考虑了扭转和轴向拉伸的作用。同时,为了保证加强筋的广义位移向量与板单元完全一致,便于与板单元连接,对其动能和应变能进行了适当的简化。平行 x 轴方向具有对称截面的加强筋其动能和应变能如式(4)和(5)所示:

$$U_{sx} = \frac{1}{2} \int_0^a (k_x G A_x \phi_{xz}^2 + G J_x \theta_{y,x}^2 + E A_x u_{,x}^2 + E I_y \theta_{x,x}^2) dx \quad (4)$$

$$T_{sx} = \frac{1}{2} \int_0^a (\rho A_x \dot{u}^2 + \rho A_x \dot{w}^2 + \rho A_x r_{ix} \dot{\theta}_x^2 + \rho A_x r_{jx} \dot{\theta}_y^2) dx \quad (5)$$

式中 $\phi_{xz} = w_{,x} + \theta_x$; A_x 为加强筋的截面面积; k_x 为剪切修正系数,矩形截面通常取 5/6; I_y 为加强筋对 y 轴的惯性矩; J_x 为扭转常数; $r_{ix} = I_y/A_x$ 及 $r_{jx} = J_x/A_x$ 表示回转半径。

沿 y 轴方向的加强筋应变能和动能具体形式分别见式(6)和(7):

$$U_{sy} = \frac{1}{2} \int_0^b (k_y G A_y \phi_{yz}^2 + G J_y \theta_{x,y}^2 + E A_y v_{,y}^2 + E I_x \theta_{y,y}^2) dy \quad (6)$$

$$T_{sy} = \frac{1}{2} \int_0^b (\rho A_y \dot{v}^2 + \rho A_y \dot{w}^2 + \rho A_y r_{iy} \dot{\theta}_y^2 + \rho A_y r_{jy} \dot{\theta}_x^2) dy \quad (7)$$

式中: $\phi_{yz} = \omega_{yz} + \theta_y$; A_y 为加强筋的截面面积; k_y 为剪切修正系数, 矩形截面通常取 5/6; I_x 为加强筋对 x 轴的惯性矩; J_y 为扭转常数; $r_{iy} = I_x/A_y$ 及 $r_{jy} = J_y/A_y$ 表示回转半径。

1.2 加筋 Mindlin 板的运动方程

在已知结构动能和应变能的情况下, 可通过 Hamilton 原理来获得其运动微分方程。

$$\delta \Pi = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T_a - U_a) dt = 0 \quad (8)$$

式中 T_a 表示系统动能, U_a 为应变能, t_0 和 t_1 为对时间积分上下限。

为得到加筋 Mindlin 板的应变能和动能, 可将加强筋的应变能和动能平均分布到板上。以图 1 所示加筋板结构为例, 将沿平行 x 轴方向的加强筋的应变能(式(4))和动能(式(5))分别沿 y 方向积分, 再除以加强筋的平均间距, 即可得其平均能量, 具体形式分别见式(9)和式(10)。沿 y 轴方向的加强筋可按此方法同样进行处理, 其详细表达式在式(11)和式(12)中列出。

$$\bar{U}_{sx} = \left[\frac{1}{b_x} \right] \int_0^b U_{sx} dy \quad (9)$$

$$\bar{T}_{sx} = \left[\frac{1}{b_x} \right] \int_0^b T_{sx} dy \quad (10)$$

$$\bar{U}_{sy} = \left[\frac{1}{b_y} \right] \int_0^a U_{sy} dx \quad (11)$$

$$\bar{T}_{sy} = \left[\frac{1}{b_y} \right] \int_0^a T_{sy} dx \quad (12)$$

因此, 将式(2)、(9)和(11)相加即可得到加筋 Mindlin 板的应变能 U_a 。动能 T_a 则由式(3)、(10)和(12)求和而得。将加筋 Mindlin 板的应变能和动能代入到式(8)中, 通过变分运算即可获得基于 Mindlin-Engesser 理论的加筋板运动微分方程:

$$Cu = 0 \quad (13)$$

式中 C 为微分算子^[9]。

1.3 单元的动态刚度阵

板单元上所受广义力如图 3 所示。对于动态刚度阵来说, 通常假设单元的上下两个边简支, 则单元连接就可通过左右两个边来实现, 因此构建单元动态刚度阵时, 也只需要这两边的广义力与广义位移的关系即可。左右两边所受的广义力写为向量形式为

$$t_x = (N \quad T \quad Q_x \quad M_x \quad M_{xy})^T \quad (14)$$

由 Mindlin 板理论可知, 板单元所受广义力与广义位移之间存在如下关系:

$$t_x = T_x u \quad (15)$$

式中 T_x 表示内力微分算子, 为 5×5 的矩阵。

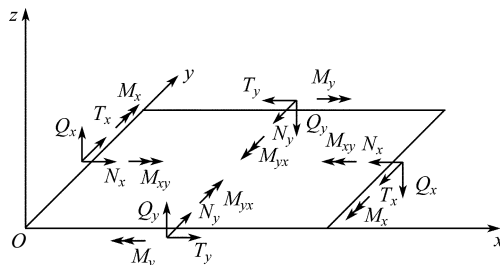


图 3 板单元的广义力

Fig. 3 Generalized forces of plate element

通常情况下, 如果板在简谐力作用下做简谐运动时, 它的解形式可设为如下形式:

$$u = U e^{i\omega t} \quad (16)$$

式中 $U = (U \quad V \quad W \quad \Phi \quad \Psi)^T$ 。向量中各项为与 x 和 y 相关的变量。又因为板在沿 x 轴的上下两个对边简支, 所以向量 U 中各个位移又可以用板的李维解来表示, 各自的具体形式见式(17)~(21):

$$U(x, y) = \sum_n U_n(x) \sin k_n y \quad (17)$$

$$V(x, y) = \sum_n V_n(x) \cos k_n y \quad (18)$$

$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin k_n y \quad (19)$$

$$\Phi(x, y) = \sum_n \Phi_n(x) \sin k_n y \quad (20)$$

$$\Psi(x, y) = \sum_n \Psi_n(x) \cos k_n y \quad (21)$$

式中 $k_n = n\pi/b$ ($n=1, 2, \dots, \infty$)。由 C 和 T_x 可知, 上述解的形式同样适用于平摊后的加筋板单元。将式(17)~(21)代入加筋 Mindlin 板运动微分方程(13)中, 并乘以式(22)中的主对角阵, 再将其沿 y 方向进行积分, 最终所得微分方程(23)仅与随 x 变化的幅值相关。

$$(\sin k_n y \quad \cos k_n y \quad \sin k_n y \quad \sin k_n y \quad \cos k_n y) \quad (22)$$

$$C_n u_n = 0 \quad (23)$$

式中: $u_n = (U_n \quad V_n \quad W_n \quad \Phi_n \quad \Psi_n)^T$, C_n 的形式与 C 相同, 仅是将其中对 y 的导数相关项用 k_n 的幂来替换。

同样, 利用上述解的形式, 并结合加筋 Mindlin 板广义力与广义位移的关系式(15), 即可获得广义力与向量 u_n 的关系:

$$t_n = T_n u_n \quad (24)$$

式中 T_n 与 C_n 类似, 是将 T_x 中对 y 的导数相关项

用 k_n 的幂来替换.

微分方程解通常可设为 $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_0 e^{\lambda x}$, 将它代入方程(23)中可得其相应的特征值问题.

$$\bar{\mathbf{C}}_n(\lambda) \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \quad (25)$$

此处 $\bar{\mathbf{C}}_n$ 是 $\mathbf{C}_n$ 中对 x 的导数项用 λ 的幂替换后的形式. $|\bar{\mathbf{C}}_n(\lambda)| = 0$ 对应的是一个 10 阶代数特征值问题, 可以使用符号运算工具或采用数值方法来求解它的特征值及特征向量.

$$\mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^{10} A_i \mathbf{u}_{0i} e^{\lambda_i x} = \mathbf{N}_n(y) \mathbf{A} \quad (26)$$

式中: λ_i 是它的特征值; $\mathbf{u}_{0i}$ 是与之相对应的特征向量; A_i 是复常数, 向量 $\mathbf{A}$ 由 A_i 组成; $\mathbf{N}_n$ 为 5×10 的矩阵, 它由特征值与对应特征向量相乘后组合而得.

从图 1 和图 2 中可以看出板单元整个广义位移是由 $x=0$ 和 $x=a$ 两处的广义位移向量组合而成的, 它具有式(27)中形式:

$$\mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_n(0) \\ \mathbf{N}_n(a) \end{bmatrix} \mathbf{A} = \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \quad (27)$$

式中 $\mathbf{a}_n^T = (\mathbf{u}_n^T(0) \quad \mathbf{u}_n^T(a))$ 表示板单元的整个广义位移向量; $\mathbf{P}_1$ 为 10×10 的矩阵.

与广义位移类似, 板单元的整体广义力向量为 $\mathbf{f}_n^T = (-\mathbf{t}_n^T(0) \quad \mathbf{t}_n^T(a))$, 将式(24)和(26)代入其中, 可得

$$\mathbf{f}_n = \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_n \mathbf{N}_n(0) \\ \mathbf{T}_n \mathbf{N}_n(a) \end{bmatrix} \mathbf{A} = \mathbf{P}_2 \mathbf{A} \quad (28)$$

式中 $\mathbf{P}_2$ 同样为 10×10 的矩阵.

为了获得板单元整个广义力和广义位移之间的关系, 可将式(27)和(28)中未知复常数向量 $\mathbf{A}$ 消去, 最终可得式(29):

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{a}_n = \mathbf{K}_n \mathbf{a}_n \quad (29)$$

其中 $\mathbf{K}_n$ 即为加筋 Mindlin 板单元的动态刚度阵.

整个结构的所有单元按照常规有限元方法进行组装^[4], 最终得到结构的系统方程:

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{Q}_n \mathbf{d}_n \quad (30)$$

式中: $\mathbf{d}_n$ 包含了结构所有节点位移; $\mathbf{q}_n$ 和 $\mathbf{Q}_n$ 分别为组装后的力向量和动态刚度阵.

2 强迫振动

如果在板单元的 (x_p, y_p) 位置有一个幅值为 $F_{jp} \delta(x - x_p) \delta(y - y_p)$ 并垂直 $x-y$ 平面的集中简谐力作用, 则加筋厚板的运动微分方程(13)的右端不再为零, 而需要按照 Hamilton 原理增加相应的外力向量. 然后同样按上述方法处理: 将解

代入后乘以主对角阵(22), 并沿 y 方向积分. 对于此处垂直 $x-y$ 平面的集中力而言, 经上述处理后的形式为

$$\left\{ \frac{2}{b} \sin k_n y \right\} F_{jp} \delta(x - x_p) \quad (31)$$

式(31)即为外力向量中对应垂向位移 w 的外力值. 如果单元不再受其他力作用, 则外力向量中除此之外其他各项均为零. 实际计算时, 在作用力位置 $x = x_p$ 处必须存在节点, 这样一来上述外力向量就可以在单元组装过程中直接叠加到相应节点力中去.

3 加筋板的振动能量

对于中高频振动而言, 使用结构整体的均方响应来衡量结构的振动特性比单独采用各个节点的响应要来得更为方便易用. 将单元节点处响应表达式(26)在单元面内积分并平均便可得到单元各个自由度的均方响应, 具体形式如下:

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{A}^T \mathbf{\Gamma}_{rk} \mathbf{A}^* \quad (k=1, 2, 3, 4, 5) \quad (32)$$

式中: $\mathbf{s}_k$ 表示单元第 k 个自由度的均方响应; $\mathbf{A}^*$ 是复常数向量 $\mathbf{A}$ 的共轭; $\mathbf{\Gamma}_{rk}$ 为 10×10 的矩阵, 其中的元素由下式确定. $\lambda_i + \lambda_j^* = 0$ 时,

$$(\mathbf{\Gamma}_{rk})_{ij} = \frac{1}{4} a b \mathbf{u}_{0ik} \mathbf{u}_{0jk}^* \quad (33)$$

$\lambda_i + \lambda_j^* \neq 0$ 时,

$$(\mathbf{\Gamma}_{rk})_{ij} = \frac{1}{4} b \mathbf{u}_{0ik} \mathbf{u}_{0jk}^* \{ e^{(\lambda_i + \lambda_j^*)a} - 1 \} / (\lambda_i + \lambda_j^*) \quad (34)$$

式中: $i, j = 1, 2, \dots, 10$; $\mathbf{u}_{0ik}$ 表示特征向量 $\mathbf{u}_{0i}$ 中的第 k 个元素; $\mathbf{u}_{0jk}^*$ 表示特征向量 $\mathbf{u}_{0j}$ 中的第 k 个元素的共轭. 利用式(32)可以计算出单元的任意一个自由度空间平均的均方响应, 再结合加筋板的动能表达式即可求得单元的平均动能.

计算加筋板受集中简谐力作用的响应和振动能量时, 对应每一个特定的频率 ω 和波数 k_n , 方程(30)都可按一般方程组的求解方法来计算, 求出 n 取不同值时的未知向量 $\mathbf{d}_n$, 并对其进行叠加即可获得激励频率 ω 时各个节点处的位移响应值, 同理由式(32)可得加筋板的均方响应. 为了避免共振时计算出现奇异值, 必须引入适当的阻尼. 本文通过引入结构阻尼 η 来避免上述情况的出现, 计算时仅需将弹性模量 E 替换为 $E(1 + i\eta)$ 即可.

4 数值算例

以图 4 所示的 L 形耦合加筋板为例,采用动态刚度阵法来计算其能量传输关系. 计算结果分别与统计能量分析方法和有限元方法进行比较. 在下文的图与表中 DSM 代表动态刚度阵法计算结果,SEA 和 FEM 分别代表统计能量分析方法和有限元法的计算结果. 加筋板详细尺寸和具体参数见表 1,加强筋的截面高度为 0.02 m,宽度 0.008 m,材料属性与板相同.

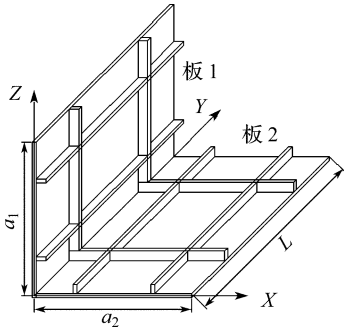


图 4 L 形耦合加筋板示意图

Fig. 4 Schematic of L-shaped stiffened plate

表 1 加筋板的具体参数

Tab. 1 Parameters of stiffened plates

板	连接边长度/m	其他边长度/m	板厚/m	E/Pa	G/Pa	$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	ν	内损耗因子
板 1	1.0	0.8	0.008	7.0×10^{10}	2.69×10^{10}	2 700	0.3	0.03
板 2	1.0	0.8	0.008	7.0×10^{10}	2.69×10^{10}	2 700	0.3	0.03

为了计算结构在空间和频域内平均的振动能量,需要对结构进行互不相关的随机力激励. 本文在计算时对加筋板 1 进行激励输入,计算加筋板间的平均弯曲能量比. 为了模拟互不相关的随机激励输入,在加筋板 1 上随机选取 10 个激励点位置,激励点的分布位置如图 5 所示,并分别对它们进行简谐集中力激励作用,计算每一次的加筋板 1 和加筋板 2 的振动能量,最后通过平均即可得到空间平均的振动能量.

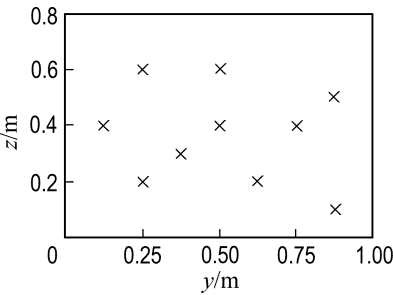


图 5 输入激励点位置示意图

Fig. 5 The locations of input force

图 6 给出了 0.5~10 kHz 离散频率下的空间平均弯曲能量比 E_2/E_1 计算结果,其中 E_1 和 E_2 分别表示加筋板 1 和 2 的振动能量. 图 6 中还同时给出相同模型的有限元计算结果和统计能量分析程序 AutoSEA 的计算值. 采用有限元方法计算时,为了保证单元的长厚比满足 Mindlin 板理论的要求,每块加筋板划分为 40×40 个单元. 又因为有限元计算结果在每个波长下至少有 6 个线性单元才能满足精度要求,因此,由本文的单元划

分密度可知,该模型最高可计算频率在 5 kHz 左右. 从图 6 的计算结果比较中也可以看出在 2 kHz 以内,动态刚度法与有限元法的能量比接近,在 5 kHz 以上,动态刚度法与统计能量法 (SEA)接近. 图中的 SEA 曲线是由 AutoSEA 程序计算所得结果.

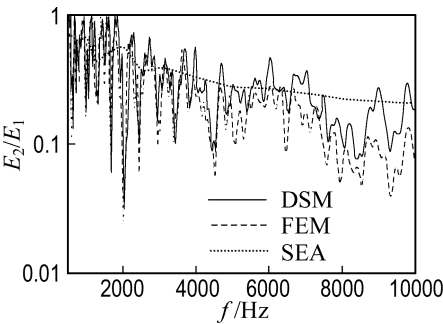


图 6 离散频率下的加筋板间弯曲能量比 E_2/E_1

Fig. 6 Flexural energy ratio E_2/E_1 of stiffened plates at discrete frequencies

为了更清晰地比较计算结果,将所得离散能量按 1/3 倍频程积分,所得计算结果在图 7 中列出. 从图中可以看出:AutoSEA 的计算结果没有考虑剪切变形和转动惯量对能量传输的影响,所以与动态刚度阵法相比,其值在高频域内要略大一些;而有限元结果受单元数目的影响,其计算结果在 5 kHz 以后明显偏小. 这主要是因为有限元方法受到单元数目的影响,其计算结果在中高频率范围内并不可靠. 而动态刚度阵法由于是从单

元运动微分方程的解析解出发,仅需要极少的单元数,即能较为准确地计算结构动力特性,且计算效率高,尤为适合结构中频范围内的能量流研究。

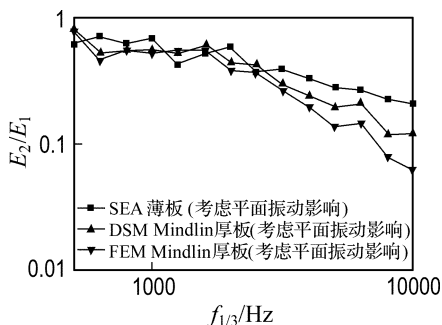


图7 加筋板间的弯曲能量比 E_2/E_1 (1/3 倍频程)

Fig. 7 Flexural energy ratio E_2/E_1 of stiffened plates (1/3 octave band)

图8为不考虑剪切变形和转动惯量影响薄板理论下的加筋板间能量比曲线,图中分别列出了动态刚度阵法和 AutoSEA 计算所得结果.从图中可以看出两种方法的计算结果吻合得较好,进一步验证了本文计算方法和程序的准确性和可靠性。

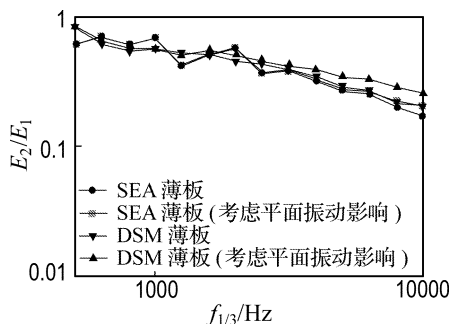


图8 薄板理论下的加筋板间弯曲能量比 E_2/E_1 (1/3 倍频程)

Fig. 8 Flexural energy ratio E_2/E_1 with thin plate theory (1/3 octave band)

为了进一步研究平面振动、剪切变形和转动惯量对结构间弯曲能量传输的影响,本文采用动态刚度阵法分别计算了基于薄板和厚板理论下的加筋板间弯曲能量比,以及计及平面内振动影响情况下的加筋板间弯曲能量比,计算结果在图9中列出。

从图9中可以看出:在中低频范围内,平面内振动与剪切变形和转动惯量对结构间的振动能量传输影响不大;在高频范围时,由于平面内振动的影响,加筋板间的弯曲能量比 E_2/E_1 在高频范围

内显著提高,就本文计算模型而言,平面振动产生明显影响是在 5 kHz 后;而由于受剪切变形和转动惯量的影响,加筋板间的弯曲能量比要明显减小,且它的影响频率范围比平面振动的要低,本文模型剪切变形和转动惯量开始产生较为明显影响是出现在 2.5 kHz 后;当平面内振动与剪切变形和转动惯量同时作用时,加筋板间的弯曲能量比值要略有提高。

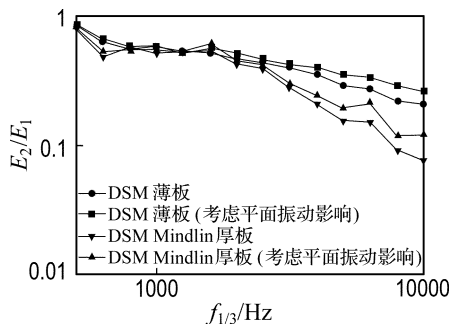


图9 薄板和厚板理论下的加筋板间弯曲能量比 E_2/E_1 (1/3 倍频程)

Fig. 9 Flexural energy ratio E_2/E_1 of different plate theories (1/3 octave band)

5 结 语

从上述数值算例分析中可以看出:采用动态刚度阵方法研究耦合加筋板间的能量传输关系时,可以计算较宽范围内的结构平均振动能量,尤其是对中频范围内结构动力特性研究更为有效,弥补了有限元方法和统计能量分析方法在该区域内应用的不足;而且在计算时,随着频率的升高也无需进一步细划单元即可获得较为准确的计算结果,此外,由于该方法所用单元数目较少,计算速度和效率都要比有限元方法高很多。

另通过计算比较可知:平面内振动在高频范围内对结构的振动弯曲能量传输影响较大,通常可以提高能量传输;而剪切和转动惯量的影响也较为明显,往往会减小结构的弯曲能量传输,且产生明显作用的频率范围比平面内振动影响要略低。

加筋板结构在船舶、航空航天和车辆工程等领域有着极其广泛的应用.在结构振动和声辐射中,常采用有限元方法计算双向加筋板间低频段能量流传递问题,采用统计能量方法计算双向加筋板间高频段能量流传递问题,而计算双向加筋板间中频段能量流传递问题尚未解决.本文提出

用动态刚度阵法来研究双向加筋板间中频段能量流传递问题,对计算双向加筋板间中频段能量流传递问题是一种新的探索.

参考文献:

- [1] LYON R H. **Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems: Theory and Applications** [M]. London: The MIT Press, 1975
- [2] SIMMONS C. Structure-borne sound transmission through plate junctions and estimates of the SEA coupling loss factors using the finite element method [J]. **J Sound Vib**, 1991, **144**(2): 215-227
- [3] KOLOUSEK V. **Dynamic in Engineering Structures** [M]. London: Butterworths, 1973
- [4] LI Jun, SHEN Rong-ying, JIN Xian-ding, *et al.* Coupled bending and torsional vibration of axially loaded Bernoulli-Euler beams including warping effects [J]. **Appl Acoust**, 2004, **65**(2): 153-170
- [5] BANERJEE J R, WILLIAMS F W. Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix of an axially loaded Timoshenko beam element [J]. **Int J Solids and Struct**, 1994, **31**(6): 749-762
- [6] LIEW K M, HUNG K C. Formulation of Mindlin-Engesser model for stiffened plate vibration [J]. **Comput Methods in Appl Mech and Eng**, 1955, **120**(3-4): 339-353
- [7] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003
- [8] MINDLIN R D. Influence of rotary inertia and shear in flexural motion of isotropic, elastic plates [J]. **J Appl Mech**, 1951, **18**(1): 31-38
- [9] 周平, 赵德有. 带有加强筋的 Mindlin 板动态刚度阵法[J]. 振动与冲击, 2007, **26**(6): 139-145

Analysis of energy flow in stiffened thick plate structures based on dynamic stiffness matrix technique

ZHOU Ping, ZHAO De-you*

(Dept. of Naval Archit. & Ocean Eng. , Dalian Univ. of Technol. , Dalian 116024, China)

Abstract: The dynamic stiffness matrix technique is applied to analyze the energy flow of the coupled stiffened plates. At first, a new dynamic stiffness matrix of stiffened moderate thick plate is derived. The plate differential equations are based on Mindlin thick plate theory and include the in-plane vibrations. The stiffeners are taken to be smeared over the surface of the element, and Hamilton's principle is used to derive the appropriate modifications which must be made to the plate differential equations. The resulting differential equations are solved exactly to yield the dynamic stiffness matrix for the element. Any number of elements may be assembled to model the cross-section of a building-up structure by using classical finite element techniques. The equation governing the complete structure can also be solved by employing classical techniques to obtain the dynamic responses of structures. Combined with the formulation of mean squared displacement for the stiffened plate, the averaged vibratory energy of each stiffened plate can be obtained. Finally, a numerical example of L-shaped stiffened plate is considered and the energy flow between each plate is calculated by dynamic stiffness matrix method. To verify the efficiency and feasibility of the presented method, the calculated results are compared with those obtained by finite element method and statistical energy analysis method.

Key words: dynamic stiffness matrix; stiffened plate; Mindlin-Engesser model; energy flow