文章编号：1000-8608(2008)01-0105-07

复杂不均匀地层中地下结构波动响应频域分析

林 皋*[1]， 任红梅[1,2]

（1.大连理工大学 土木水利学院，辽宁 大连 116024；
2.同济大学 土木工程防灾国家重点实验室，上海 200092）

摘要： 研究了不均匀岩土介质中隧洞衬砌的波动响应.比例边界有限元法被用来求解这一类问题.这种方法的优点是只需在边界上用有限元进行离散；无限介质的辐射条件自动得到满足；对一般不均匀介质的分析可不增加额外的工作量.方法的有效性得到二维无限空间中圆形孔洞在水平向SV波入射作用下波动响应的验证.计算了马蹄形隧洞衬砌周边的应力分布.不均匀的围岩介质包含几种情况：一是含两种不同特性介质的不连续界面；另一是围岩中含软弱夹层.数值结果表明：在两种不同特性介质的不连续界面附近，以及在软弱夹层附近都会出现应力集中现象.两种介质特性差别愈大，应力集中程度愈高.此外入射波的频率愈高，应力集中现象也愈明显.这些结论对于地下结构的抗震设计将具有重要参考价值.

关键词： 比例边界有限元法；地下结构；波动响应；不均匀岩土介质
中图分类号： TU43；TU9；U45 **文献标志码：** A

0 引 言

由于城市建设的发展，地下空间已经作为一种重要资源被广泛利用.地下工程建设规模日益发展壮大.我国是一个多地震的国家，据不完全统计，我国大、中型城市80%以上位于地震区，地下结构的抗震安全受到人们广泛关注.地下结构地震响应分析实质上是求解地下结构与围岩无限介质的动力相互作用问题，在无限远处要求满足Sommerfeld辐射条件.由于问题的复杂性，一般文献中都将围岩作为均匀无限介质处理，使问题得到一定程度的简化.然而，地下结构多处于复杂的地质环境条件下，因此，研究复杂不均匀地层中地下结构的地震响应具有十分重要的意义.本文在比例边界有限元的基础上，提出复杂不均匀介质中地下结构地震响应的求解途径.比例边界有限元法(SBFEM)[1,2]和有限元法、边界元法一样，是求解大型科学与工程问题的有效数值计算方法，同时兼具有有限元法和边界元法的优点.这种方法由Wolf和Song提出，只需在求解域的边界上进行离散，从而可以达到对问题降维的目的，节省了计算工作量；但又不必像边界元法那样需要求得问题的基本解，避免了求解奇异问题的复杂数学处理.这种方法的一个突出优点是可以方便地求解结构与无限介质的动力相互作用问题，自动满足无限远处的Sommerfeld辐射条件，对于复杂不均匀的无限介质基本上不增加多少工作量.

1 比例边界有限元法的基本方程

在SBFEM中首先选择相似中心O(图1)，然后进行边界离散.离散只在边界$ABCD$上进行，并且从O点发出的射线边界AA'、DD'也不必离散.然后进行比例边界坐标变换.在二维情况下的变换方程形式如下：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(\eta) &= \mathbf{N}(\eta)\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}(\eta) &= \mathbf{N}(\eta)\boldsymbol{y} \end{aligned} \tag{1}$$

式中：ξ、η为比例边界坐标，在边界$ABCD$上$\xi=1$，无限域内$\xi>1$；$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$为η的函数；$\mathbf{N}$表示形函数；坐标$\hat{x}$、$\hat{y}$为ξ、η的函数，如下式所示：

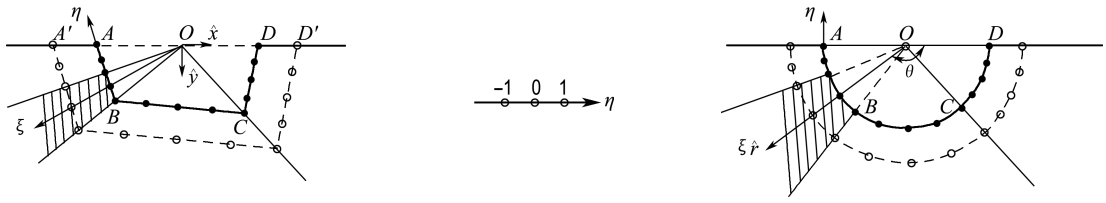
$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}(\xi,\eta) &= \xi\mathbf{N}(\eta)\boldsymbol{x} \\ \hat{\boldsymbol{y}}(\xi,\eta) &= \xi\mathbf{N}(\eta)\boldsymbol{y} \end{aligned} \tag{2}$$

类似地，对计算域内任一点的位移成立以下关系：

$$\boldsymbol{u}(\xi,\eta) = \mathbf{N}(\eta)\boldsymbol{u}(\xi) \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{u}(\xi)$为从O点发出的射线上坐标为ξ点的位移.

收稿日期： 2006-01-10； **修回日期：** 2007-12-11.
作者简介： 林 皋*(1929-)，男，教授，博士生导师，中国科学院院士.



(a) 相似中心 O 及边界 $ABCD$ 离散　　(b) 边界单元　　(c) 计算域的变换

图 1　比例边界坐标

Fig. 1　Scaled boundary coordinates

地下结构地震响应的基本方程为以位移表示的弹性力学方程，其频率域的形式为

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}+\omega^2\rho\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \tag{4}$$

式中：$\boldsymbol{L}$ 表示微分算子；$\boldsymbol{\sigma}$ 表示应力；ρ 表示质量密度.

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial\hat{x}} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial\hat{y}}\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial\hat{y}} & \dfrac{\partial}{\partial\hat{x}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

经过比例边界坐标变换和加权余量处理后，方程(4) 可转化为[1]

$$\boldsymbol{E}^0\xi^2\boldsymbol{u}(\xi)_{,\xi\xi}+(\boldsymbol{E}^0-\boldsymbol{E}^1+\boldsymbol{E}^{1\mathrm{T}})\xi\boldsymbol{u}(\xi)_{,\xi}-\boldsymbol{E}^2\boldsymbol{u}(\xi)+\omega^2\boldsymbol{M}^0\xi^2\boldsymbol{u}(\xi)=\boldsymbol{0} \tag{6}$$

这是二阶齐次线性常微分方程组，其系数矩阵的表达式如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^0&=\int_{-1}^{+1}\boldsymbol{B}^{1\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^1\mid\boldsymbol{J}\mid\mathrm{d}\eta\\ \boldsymbol{E}^1&=\int_{-1}^{+1}\boldsymbol{B}^{2\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^1\mid\boldsymbol{J}\mid\mathrm{d}\eta\\ \boldsymbol{E}^2&=\int_{-1}^{+1}\boldsymbol{B}^{2\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^2\mid\boldsymbol{J}\mid\mathrm{d}\eta\\ \boldsymbol{M}^0&=\int_{-1}^{+1}\rho\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mid\boldsymbol{J}\mid\mathrm{d}\eta\end{aligned} \tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{B}^1$、$\boldsymbol{B}^2$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{J}$ 等的含义与有限元求解相同. 注意到 $\boldsymbol{E}^0$、$\boldsymbol{E}^1$、$\boldsymbol{E}^2$、$\boldsymbol{M}^0$ 只包含边界 $ABCD$ 上的单元特性.

由方程(6)、(7) 和有限元方程的比较可以看出 SBFEM 的优点和特点. 有限元方程需要全域离散，经过变分后可以获得全域节点变量的代数方程组进行求解. 而 SBFEM 只对计算域边界进行离散，得到变量 $\boldsymbol{u}(\xi)$ 的常微分方程组，可以解析求解. 也就是说，对从相似中心 O 发出的任何射线，$\boldsymbol{u}(\xi)$ 沿 ξ 方向的变化规律是精确解.

对于地下结构地震响应的求解来说，求出边界节点无限域的频域动力刚度 $\boldsymbol{S}^\infty$ 比按式(6) 直接求解位移 $\boldsymbol{u}(\xi)$ 可能更为方便. $\boldsymbol{S}^\infty$ 的表达式可以导出如下[1]：

$$(\boldsymbol{S}^\infty(\omega)+\boldsymbol{E}^1)(\boldsymbol{E}^0)^{-1}(\boldsymbol{S}^\infty(\omega)+\boldsymbol{E}^{1\mathrm{T}})-\omega\boldsymbol{S}^\infty(\omega)_{,\omega}-\boldsymbol{E}^2+\omega^2\boldsymbol{M}^0=0 \tag{8}$$

$\boldsymbol{S}^\infty(\omega)$ 可以化为级数形式进行求解[3]

$$\boldsymbol{S}^\infty(\omega)=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{C}_\infty+\boldsymbol{K}_\infty-\boldsymbol{Y}^{(1)}(\omega)^{-1} \tag{9}$$

求解特征值问题

$$\boldsymbol{M}^0\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{E}^0\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}^2 \tag{10}$$

则 $\boldsymbol{C}_\infty$、$\boldsymbol{K}_\infty$ 和级数 $\boldsymbol{Y}^{(1)}(\omega)$ 都可以通过 $\boldsymbol{\Phi}$、$\boldsymbol{\Lambda}$、$\boldsymbol{E}^0$、$\boldsymbol{E}^1$ 等进行求解[3].

2　地下结构的地震响应

实际的地震观测和模型试验都表明[4]，地下结构受周围岩土介质的严重约束，地震作用下结构的惯性力和阻尼力的影响一般可以忽略. 于是，地下结构地震响应的基本方程可表示为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}_{\mathrm{ii}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{ib}}\\ \boldsymbol{K}_{\mathrm{bi}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{bb}}+\boldsymbol{S}^\infty\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{t}}\\ \boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{t}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{S}^\infty\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{g}}\end{pmatrix} \tag{11}$$

亦可一般地简写为

$$(\boldsymbol{K}_{\mathrm{b}}+\widetilde{\boldsymbol{S}}^\infty)\boldsymbol{U}^{\mathrm{t}}=\widetilde{\boldsymbol{S}}^\infty\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{g}} \tag{12}$$

式中：$\boldsymbol{K}_{\mathrm{b}}$ 为地下结构衬砌的静力刚度，可由有限元法或 SBFEM 求出；$\boldsymbol{S}^\infty$ 为无限地基的动力刚度，按上节方法求出；$\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{g}}$ 为地下结构与围岩接触面节点由于地震波传播所产生的地基介质的位移，需根据围岩介质的自由场位移考虑地下结构孔洞所产生的散射影响求出；$\widetilde{\boldsymbol{S}}^\infty$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{g}}$ 为 $\boldsymbol{S}^\infty$ 和 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{g}}$ 扩阶后的表达式

$$\widetilde{\boldsymbol{S}}^\infty=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{S}^\infty\end{pmatrix};\quad\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{g}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{g}}\end{pmatrix} \tag{13}$$

地震波散射场位移 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{g}}$ 的计算一般比较困难，利用以下关系式求解[4] 比较方便：

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{g}}=(\boldsymbol{S}^\infty)^{-1}(\boldsymbol{S}^\infty+\boldsymbol{S}_{\mathrm{bb}}^{\mathrm{e}})\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{f}} \tag{14}$$

式中：$\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{f}}$ 为地下结构不存在时地震波传播在地下结构与围岩接触面节点上的自由场位移；$\boldsymbol{S}_{\mathrm{bb}}^{\mathrm{e}}$ 为地下结构部分由围岩介质填充在边界节点所产生的动刚度，可由静力刚度阵与质量阵求出.

由于无限介质的动力刚度 $\boldsymbol{S}^\infty(\omega)$ 为激励频率的函数，式(11) 宜在频率域内进行求解. 但也可设法在时间域进行求解[5].

3　方法的验证及算例讨论

为了检验方法的有效性，计算了一圆形孔洞在 SV 波入射下的位移和应力响应，并与解析解

的结果进行了比较.然后,研究了复杂不均匀地层中马蹄形隧洞衬砌的波动响应.

3.1　SBFEM 的验证

建立如图 2 所示坐标系,设 SV 型平面剪切谐波水平入射于圆柱形孔洞周围的介质中.波动方程可表示为

$$\boldsymbol{u}=\nabla\varphi+\nabla\times(\boldsymbol{e}_z\Psi) \tag{15}$$

入射波

$$\Psi^{(i)}=\Psi_0 e^{i(\beta x-\omega t)},\quad \varphi^{(i)}=0$$

从而

$$\varphi=\varphi^{(r)},\quad \Psi=\Psi^{(i)}+\Psi^{(r)} \tag{16}$$

式中:$\boldsymbol{\Psi}_0$ 为波的幅值;ω 为圆频率;$\beta=\omega/c_s$ 为波数,c_s 为剪切波速;$\boldsymbol{e}_z$ 代表隧洞轴向的单位矢量;上标(i)和(r)分别代表入射波和反射波.

将计算结果以量纲一形式加以表示.量纲一频率 a_0、位移 u_0 和应力 τ_0 的表达式分别表示如下:

$$a_0=\frac{\omega r_0}{c_s},\quad u_0=i\beta\Psi_0,\quad \tau_0=-\mu\beta^2\Psi_0$$

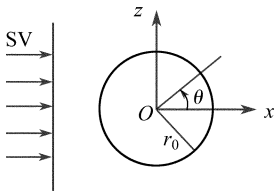


图 2　圆形孔洞

Fig. 2　Cylindrical cavity

计算时取圆孔半径 $r_0=2.5$;介质剪切模量 μ 和密度 ρ 均为单位值;泊松比 $\nu=0.25$.

根据所求得的地基介质的动力阻抗矩阵,可以求解圆孔周边散射场的径向位移 $\boldsymbol{u}_r$ 和环向应力 $\boldsymbol{\tau}_\theta$.计算结果如图 3 所示.从图中可以看出,计算结果和解析解比较吻合.计算值取自文献[6],

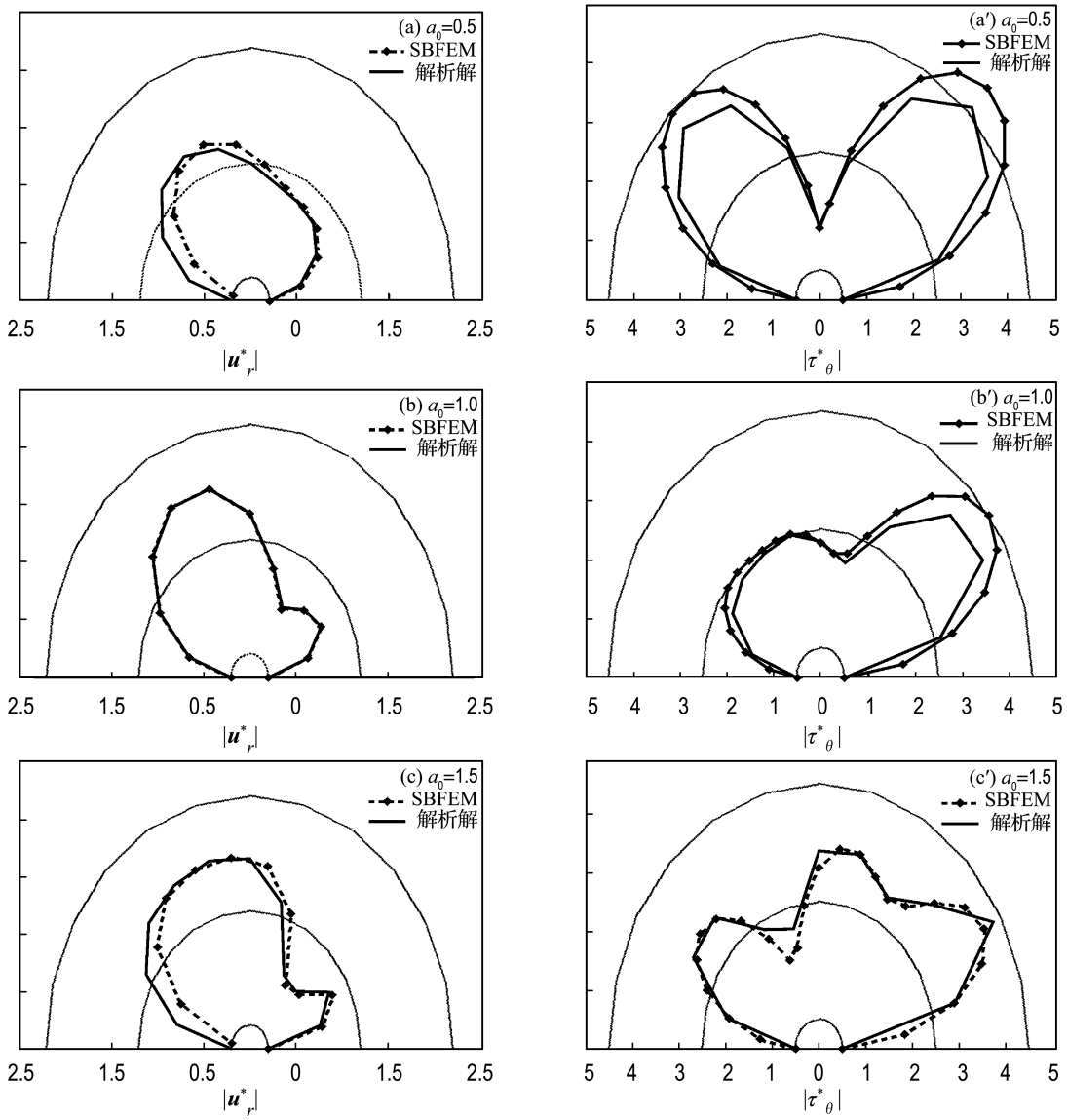


图 3　SV 波入射时圆形孔洞数值解与解析解的比较

Fig. 3　Comparison between numerical and analytical solution of the cylindrical cavity subjected to vertical SV wave

其中无限地基刚度按近似公式计算. 如果采用文献[3]的表达式计算无限地基刚度,计算精度有望进一步提高.

3.2 复杂不均匀介质中隧洞的波动响应

以马蹄形隧洞为例研究了地下结构的波动响应. 隧洞断面如图 4 所示. 洞宽 30 m,顶拱高 8 m,顶拱半径 18 m,混凝土衬砌厚度 1 m. 围岩介质与衬砌的力学参数如表 1 和表 2 所示. 考虑了 4 种不均匀地层的情况,其计算模型如图 5 所示. 对于均匀围岩介质(图 4)介质剪切模量等于 G_1. 对于不均匀围岩介质(图 5(a)、5(b)、5(c)),考虑了两种情况:第一种 $G_a=G_1$,$G_b=G_2$;第二种 $G_a=G_1$,$G_b=G_3$. 对于含软弱夹层的围岩介质(图 5(d)),$G_a=G_1$,$G_b=G_3$. 各种情况,衬砌内圈和外圈的环向应力 τ_θ 分布如图 6 至图 9 所示. 图 6 对应于均匀围岩介质;图 7 对应于第一种不均匀围岩介质;图 8 对应于第二种不均匀围岩介质;图 7、8 中的(a)、(b)、(c)分别对应于图 5 中的工况(a)、(b)、(c);图 9 对应于含软弱夹层的围岩介质. 平面振动波从底部向上垂直入射. 对于不均匀地层在两种介质的界面处发生波的透射和反射. 入射 SV 波将产生反射的 P 波和 SV 波以及透射的 P 波和 SV 波. 对于含有软弱夹层的复杂围岩情况(图 5(d)),SV 波入射时将发生多次反复的 P 波和 SV 波的透射和反射. 为了简化计算,对于含软弱夹层的情况,只研究了 SH 波入射的情况.

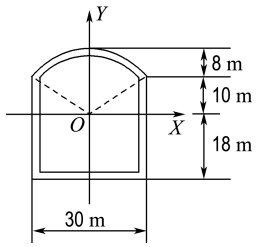


图 4 地下结构计算模型

Fig. 4 Model of the underground structure

表 1 围岩介质力学参数

Tab. 1 Parameters of unbounded media

围岩介质	c_s/(m·s^{-1})	ρ/(kg·m^{-3})	ν
G_1	2 236	2 500	0.20
G_2	1 141	2 400	0.23
G_3	884	2 000	0.25

表 2 衬砌介质力学参数

Tab. 2 Parameters of underground structure

衬砌	G/Pa	ρ/(kg·m^{-3})	ν
L_1	1.25×10^{10}	2 500	0.2

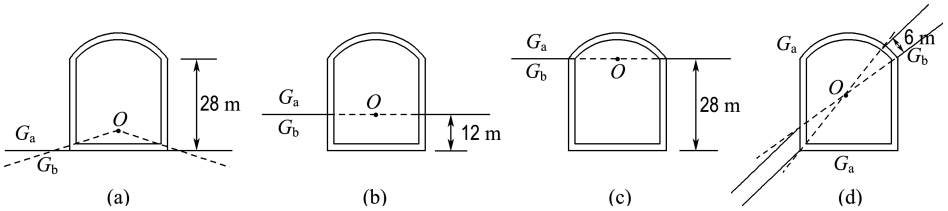
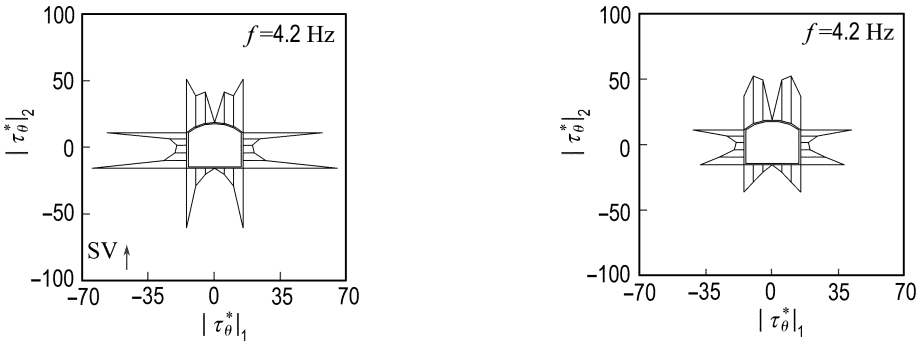


图 5 不均匀介质中地下结构计算模型与相似中心位置

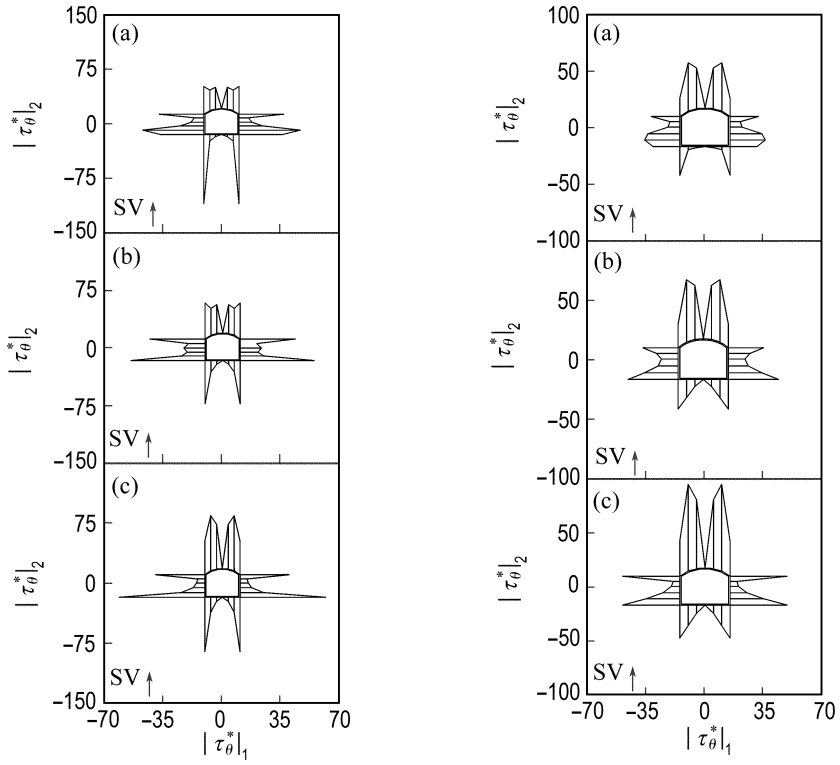
Fig. 5 Model of the underground structure lying in the nonuniform soil medium and the position of scaling center



(a) 内 (b) 外

图 6 均匀介质 SV 波垂直入射时衬砌的 τ_θ 分布

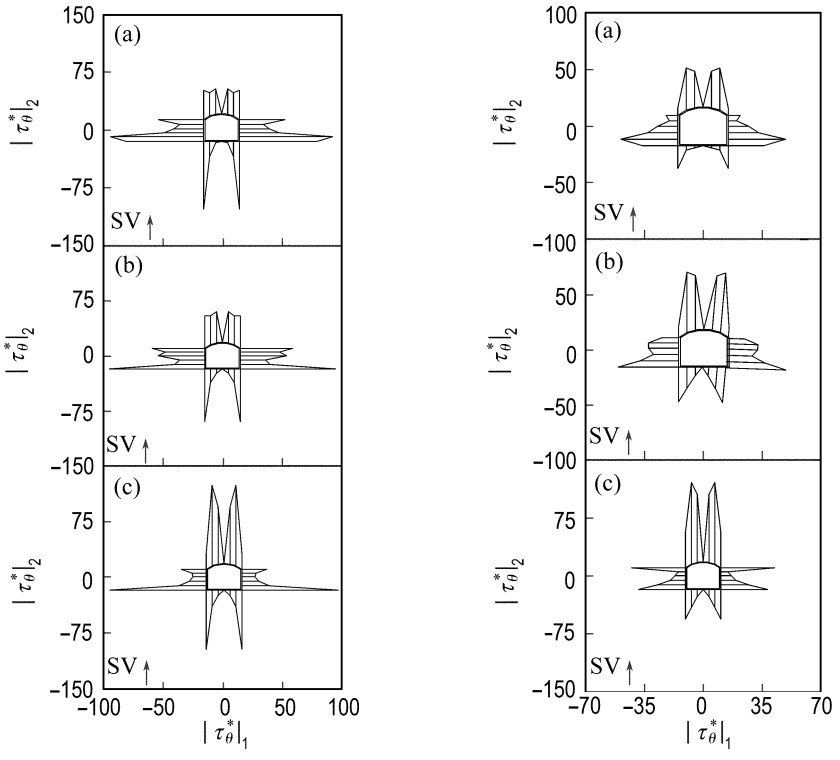
Fig. 6 Distribution of τ_θ for tunnel lining subjected to vertical incident SV wave in case of uniform medium



(a) 内　　(b) 外

图 7　SV 波垂直入射时不均匀介质中衬砌的 τ_0 分布之一

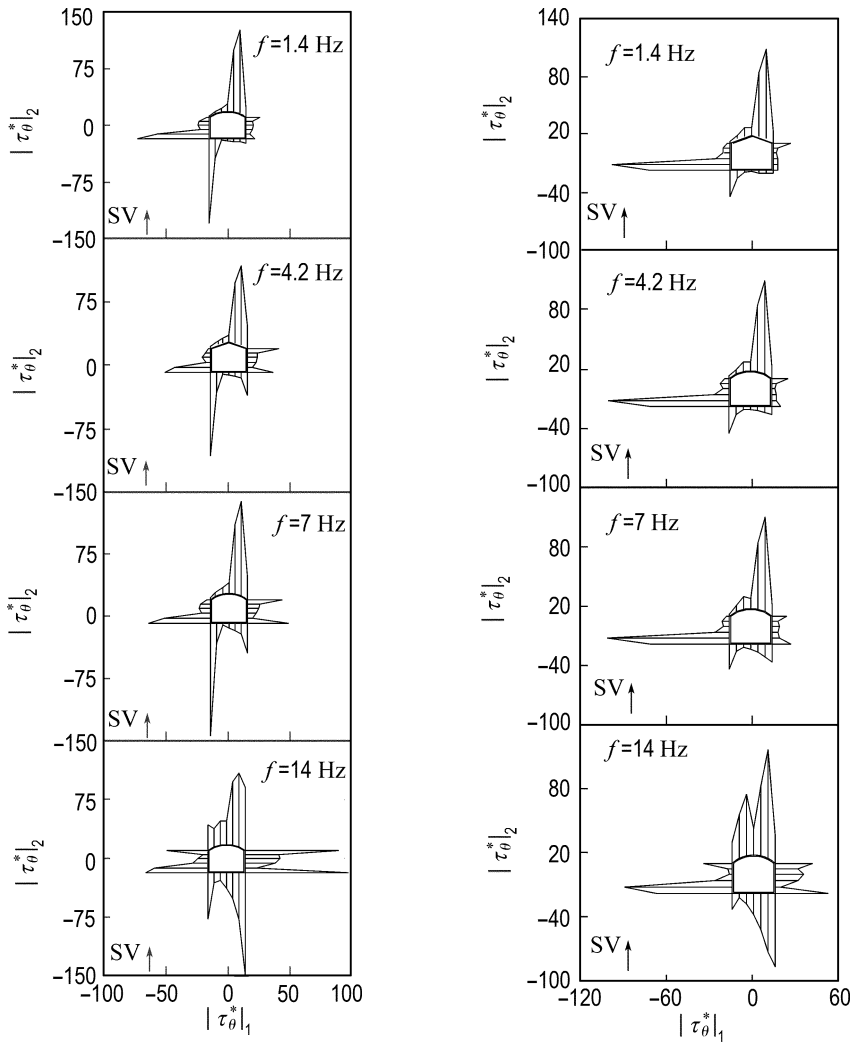
Fig. 7　Distribution of τ_0 for tunnel lining subjected to vertical incident SV wave in case of nonuniform medium (1)



(a) 内　　(b) 外

图 8　SV 波垂直入射时不均匀介质中衬砌的 τ_0 分布之二

Fig. 8　Distribution of τ_0 for tunnel lining subjected to vertical incident SV wave in case of nonuniform medium (2)



(a) 内 (b) 外

图 9 有软弱夹层地基在不同频率的 SH 波垂直入射下的隧洞衬砌的 τ_θ 分布

Fig. 9 Distribution of τ_θ for tunnel lining subjected to vertical incident SH wave in case of medium with weak interlayer

对于计算结果的分析,获得了以下认识:

(1)对于均匀围岩介质情况,衬砌 4 个角点上的环向应力都大于其他各点的应力;内边界上的应力大于外边界上的应力. 还计算了一些其他工况,由于篇幅所限,没有在文中显示. 其中值得指出的是, SV 波入射时的应力一般高于 P 波入射时的应力,SV 波入射时的应力分布与 P 波入射时的应力分布也有所不同,主要是底板上的应力相对较大;入射波频率增高时,应力也相应增大.

(2)对于不均匀围岩介质的情况,由于波的反射和透射,围岩的波动场发生变化,衬砌的应力一般随之增大. 两种介质剪切模量差别愈大,衬砌应力的增长幅度也愈大. 以频率 $f=4.2$ Hz 的入射 SV 波为例,第一种不均匀介质较均匀介质应力平均增大约 30%;第二种不均匀介质则较均匀介质应力平均增大约 50%.

(3)围岩介质中含软弱夹层时,在夹层处衬砌应力明显增大,在地下结构抗震设计时,有必要加以注意.

4 结 论

(1)应用 SBFEM 可以方便地进行复杂不均匀地层中地下结构的波动响应分析.

(2)算例表明,在两种介质分界面处明显出现应力集中现象,并且随着地基非均匀性的增加,应力呈增加趋势,应力集中现象亦愈加明显.

(3)含有软弱夹层的地基,和均匀介质相比,在夹层范围内应力明显增大,出现应力集中现象. 进行地下结构的抗震设计时应加以考虑. 对于高频响应这种现象更为明显.

参考文献：

[1] WOLF J P, SONG Chong-min. The scaled boundary finite element method — a primer: derivations [J]. **Comput and Struct**, 2000, **78**: 191-210

[2] SONG Chong-min, WOLF J P. The scaled boundary finite element method — a primer: solution procedures [J]. **Comput and Struct**, 2000, **78**: 211-225

[3] BAZYAR M H, SONG Chong-min. A continued-fraction based high-order transmitting boundary for wave propagation in unbounded domains of arbitrary geometry [J]. **Int J for Numer Methods in Eng**, 2007: DOI: 10.1002/nme.2147

[4] 林　皋，梁青槐. 地下结构的抗震设计[J]. 土木工程学报，1996，**29**(1): 15-24

[5] WOLF J P, SONG Chong-min. **Finite-Element Modelling of Unbounded Media** [M]. West Sussex: John Wiley & Sons, Inc, 1997

[6] 任红梅. 应用比例边界有限元法进行复杂不均匀介质中地下结构的地震响应分析[D]. 大连：大连理工大学，2005

Frequency domain analysis of dynamic response of underground structures embedded in nonuniform soil medium

LIN Gao[*1], REN Hong-mei[1,2]

(1. School of Civil and Hydraul. Eng., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China;
2. State Key Lab. for Disaster Reduction in Civil Eng., Tongji Univ., Shanghai 200092, China)

Abstract: Wave motion response of tunnel lining embedded in unbounded nonuniform soil medium is studied. The scaled boundary finite element method is employed to deal with this kind of problem. It has the advantages that only the boundary is discretized with finite elements, the radiation condition for unbounded medium is satisfied automatically and the general nonuniform medium can be analyzed without additional efforts. The wave scattering at the boundary of cylindrical circular cavity in 2D infinite space under horizontal incident SV waves was evaluated to validate the effectiveness of present approach. Stress distributions along the periphery of horse hoof-shaped tunnel lining were investigated. Several cases of nonuniform soil medium have been taken into consideration, i.e. the unbounded space with discontinuous interface of two media characterized with different shear modulus of elasticity and unbounded space with weak interlayer. Numerical results demonstrate that stress concentration is found in the vicinity of discontinuous interface of two soil media with different character and in the vicinity of weak interlayer. The larger the difference between the characteristic parameters of two soil media, the higher the degree of stress concentration becomes. In addition, stress concentration becomes more evident when the frequency of incident wave tends to be higher. This result has practical significance for the seismic design of underground structures.

Key words: scaled boundary finite element method; underground structure; wave motion response; nonuniform soil medium