

脉冲作用对环境污染中单种群动力学行为影响

张弘^{*1,2}, 孟新柱³, 陈兰荪^{1,4}

(1. 大连理工大学 应用数学系, 辽宁 大连 116024;
2. 江苏大学 数学系, 江苏 镇江 212013;
3. 山东科技大学 理学院, 山东 青岛 266510;
4. 福建师范大学 闽南科技学院, 福建 泉州 362332)

摘要: 研究了一个在污染环境中的单种群模型, 该模型考虑外界污染源在固定时刻排放毒素到本环境中以及在同一时刻考虑通过一些因素作用使该种群生物体排泄毒素. 利用脉冲微分方程的比较定理及周期单种群 Logistic 模型的一些已知结论, 证明了当脉冲周期小于某个阈值时, 该种群灭绝, 反之, 则该种群持续生存. 并且还证明了上述的持续生存条件也能确保该系统存在惟一的全局渐近稳定的正周期解.

关键词: 脉冲; 污染环境; 周期解; 持续生存; 灭绝; 全局渐近稳定

中图分类号: O175 **文献标志码:** A

0 引言

在当今社会中, 环境污染是一个非常严重的问题. 它影响到人类的生活质量、物种的持续生存以及栖息地的生态变迁^[1,2]. Hallam 等在 20 世纪 80 年代早期通过假设种群密度的增长率线性依赖于对毒素的吸收来研究这种毒素排放到环境中对生物种群的影响^[3~5], 从而揭开了这方面研究的序幕. 在近十几年中, 毒素对各种生态系统的影响已被学者用数学模型研究过^[6~9].

脉冲微分方程^[10~12]在很多领域都得到了广泛的运用, 诸如航空器的控制、营运研究中的视察进程、药品管理、癌症化疗、生物学中的阈值理论等. 在过去的 10 年中, 脉冲微分方程有了重大的发展. 但关于环境污染的文献较少^[13]. 在现实世界中, 污染源排放污染物通常都是不连续的. 例如, 化学杀虫剂在农业和林业中经常使用, 它在有效杀死害虫的同时也造成了严重的环境污染. 与此同时, 在该污染环境中生活的生物体内也会积聚一定量的毒素, 除了自身具有的净化作用

可以排除体内毒素, 当然也可以采取一些辅助的手段帮其排毒. 例如, 经常食用的海鲜产品——扇贝可以通过瞬时的电击来促使其排泄毒素. 本文主要借鉴文献^[3~9,13]中的一些建模思想建立新的脉冲微分方程, 用来模拟毒素对单一种群的影响, 通过现有的脉冲微分方程理论来研究该模型的动力学性态.

1 模型的建立

考虑的模型是基于下面的污染环境中毒素作用下的单种群模型:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(r_0 - r_1 c_0(t) - f(x(t))) \\ \dot{c}_0(t) = k c_e(t) - g c_0(t) - m c_0(t) \\ \dot{c}_e(t) = -k_1 c_e(t) x(t) - h c_e(t) + g_1 c_0(t) x(t) + u(t) \\ x(0) > 0, c_0(0) > 0, c_e(0) > 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x(t)$ 表示 t 时刻种群的密度; $c_0(t)$ 表示 t 时刻生物体内毒素的浓度; $c_e(t)$ 表示 t 时刻环境中的毒素浓度; r_0 表示无毒素时种群的内在增长

收稿日期: 2005-09-20; 修回日期: 2007-08-17.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471117; 10771104).

作者简介: 张弘^{*}(1978-), 男, 博士; 陈兰荪(1938-), 男, 教授, 博士生导师.

率; $r_1 c_0(t)$ ($r_1 > 0$) 表示种群吸收了毒素以后而导致种群减少的反应函数; f 表示种群密度制约系数; $k c_e(t)$ 表示 t 时刻个体从环境中吸收的毒素; $g c_0(t)$ 表示 t 时刻个体体内毒素的排泄率; $m c_0(t)$ 表示由于新陈代谢作用 t 时刻个体体内毒素的净化率; $-k_1 c_e(t) x(t)$ 表示种群的全体成员吸收环境中毒素而导致环境中毒素浓度的降低; $h c_e(t)$ 表示由于生物转移、挥发、细菌的退化与死亡, 以及光合作用等因素所引起的毒素量的减少; $g_1 c_0(t) x(t)$ 表示种群向环境中排泄的毒素; $u(t)$ 表示外界污染源排放到环境中的毒素量且假设它是有界的, 满足 $0 \leq u_0 \leq u(t) \leq u_1 < \infty$. 模型(1)中 $x(t)$ 的变化适用 Logistic 方程, 毒素引起种群的线性减少. 本文假设环境的容量相对于种群规模很大, 种群对环境中毒素的吸收和其体内毒素向环境的排泄对环境中毒素的浓度改变影响不大, 故此, 在模型(1)中 $-k_1 c_e(t) x(t)$ 和 $g_1 c_0(t) x(t)$ 可以忽略不计.

引理 1^[9] 如果假设 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u^*$, 那么对于模型(1)有以下结论:

$$(c1) \lim_{t \rightarrow \infty} c_e(t) = \frac{u^*}{h} \equiv c_e^*;$$

$$(c2) \lim_{t \rightarrow \infty} c_0(t) = \frac{k u^*}{h(g+m)} \equiv c_0^*;$$

$$(c3) \text{ 如果 } r_0 \leq r_1 c_0^*, \text{ 那么 } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0;$$

$$(c4) \text{ 如果 } r_0 > r_1 c_0^*, \text{ 那么 } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{r_0}{f} - \frac{r_1 k u^*}{f h(g+m)}.$$

引理 2^[10] 假设下列条件成立:

(A₀) 时间序列 $\{t_k\}$ 满足 $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$;

(A₁) $m \in PC^1[\mathbf{R}_+, \mathbf{R}]$, 且 $m(t)$ 在 t_k 时刻是左连续的, $k=1, 2, \dots$;

(A₂) 对于 $k=1, 2, \dots, t \geq t_0$,

$$m'(t) \leq p(t) m(t) + q(t), t \neq t_k$$

$$m(t_k^+) \leq d_k m(t_k) + b_k$$

其中 $q, p \in [\mathbf{R}_+, \mathbf{R}]$, $d_k \geq 0$ 且 b_k 都是常数. 则

$$m(t) \leq m(t_0) \prod_{t_0 < t_k < t} d_k \exp\left(\int_{t_0}^t p(s) ds\right) + \sum_{t_0 < t_k < t} \left(\prod_{t_k < t_j < t} d_j \exp\left(\int_{t_k}^t p(s) ds\right) \right) +$$

$$\int_{t_0}^t \prod_{s < t_k < t} d_k \exp\left(\int_s^t p(\sigma) d\sigma\right) q(s) ds, t \geq t_0$$

引理 3^[14] 系统

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -ru; t \neq n\tau \\ u(t^+) = u(t) + p; t = n\tau \\ u(0^+) = u_0 \end{cases} \quad (2)$$

存在一个正周期解 $u^*(t)$ 且对于系统(2)的每个解 $u(t)$ 都有

$$|u(t) - u^*(t)| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$$

而且, 如果

$$u_0 \geq \frac{p}{1 - e^{-r\tau}}$$

有

$$u(t) \geq u^*(t)$$

如果

$$u_0 < \frac{p}{1 - e^{-r\tau}}$$

有

$$u(t) < u^*(t)$$

其中 $u^*(t) = \frac{pe^{-r(t-n\tau)}}{1 - e^{-r\tau}}, t \in (n\tau, (n+1)\tau], n \in \mathbf{N}$.

$$\mathbf{N}. u^*(0^+) = \frac{p}{1 - e^{-r\tau}}.$$

现将模型(1)中毒素的连续输入和生物体对毒素的连续排泄去掉, 建立如下简化模型, 仅考虑外界污染源在固定脉冲时刻排放毒素以及由人为因素导致生物体排毒的单种群模型:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(r_0 - r_1 c_0(t) - f x(t)) \\ \dot{c}_0(t) = k c_e(t) - m c_0(t) \\ \dot{c}_e(t) = -h c_e(t); t \neq n\tau, n \in \mathbf{N}, \\ \Delta x(t) = 0, \Delta c_0(t) = -g, \Delta c_e(t) = b; \\ t = n\tau, n \in \mathbf{N} \\ x(0) > 0, 1 \geq c_0(0) \geq 0, 1 \geq c_e(0) \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\Delta x(t) = x(t^+) - x(t)$, $\Delta c_0(t) = c_0(t^+) - c_0(t)$, $\Delta c_e(t) = c_e(t^+) - c_e(t)$. $r_0, r_1, f, k, g, m, h, b$ 都是正数, $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$, τ 是脉冲作用的周期, b 是每次污染源向环境中排放的毒素量, g 是由于人为因素和生物体自身特性而使其排泄出的毒素量, 其他系数的生物意义与模型(1)的相同.

在模型(3)中, $c_0(t)$ 与 $c_e(t)$ 分别表示生物体内和环境中毒素的浓度, 因此满足

$$0 \leq c_0(t) \leq 1, 0 \leq c_e(t) \leq 1, 0 \leq t < \infty \quad (4)$$

故此,有下面的定理.

定理1 对于模型(3)的任一解,不等式(4)成立的条件为

$$\begin{aligned} b &\leq 1 - e^{-h\tau}, \\ k &\leq m \left[\frac{1 - e^{-m\tau} + g \left(\frac{e^{-m\tau} - e^{-nm\tau}}{1 - e^{-nm\tau}} \right)}{1 - e^{-m\tau}} \right], \\ n &\in \mathbf{N} \end{aligned} \quad (5)$$

证明 设条件(5)成立,接下来证明对具有初值条件

$$x(0) > 0, 1 \geq c_0(0) \geq 0, 1 \geq c_e(0) \geq 0$$

的任一解满足式(4).显然,对所有的 $t \geq 0$ 都有 $c_0(t) \geq 0, c_e(t) \geq 0$ 成立.再由脉冲微分方程的基本理论可知

$$\begin{aligned} c_e(t) &= c_e(0)e^{-ht} + \sum_{0 \leq (n-1)\tau < t} be^{-h(t-(n-1)\tau)} = \\ &= c_e(0)e^{-ht} + \frac{be^{-h(t-(n-1)\tau)}(1 - e^{-h(n-1)\tau})}{1 - e^{-h\tau}}, \\ &t \in ((n-1)\tau, n\tau] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_e((n-1)\tau^+) &= c_e(0)e^{-h(n-1)\tau} + \frac{b(1 - e^{-h(n-1)\tau})}{1 - e^{-h\tau}} \leq \\ &= c_e(0)e^{-h(n-1)\tau} + 1 - e^{-h(n-1)\tau} = \\ &= (c_e(0) - 1)e^{-h(n-1)\tau} + 1 \leq 1 \end{aligned}$$

因此, $t \in ((n-1)\tau, n\tau], n \in \mathbf{N}$ 时,有

$$c_e(t) = c_e((n-1)\tau^+)e^{-h(t-(n-1)\tau)} \leq 1$$

从而对所有的 $t \geq 0$, 都有 $c_e(t) \leq 1$.

再考虑模型(3)中的第二和第四个方程

$$\begin{cases} \dot{c}_0(t) = kc_e(t) - mc_0(t) \leq \\ m \left[\frac{1 - e^{-m\tau} + g \left(\frac{e^{-m\tau} - e^{-nm\tau}}{1 - e^{-nm\tau}} \right)}{1 - e^{-m\tau}} \right] - \\ mc_0(t); t \neq n\tau, n \in \mathbf{N} \\ \Delta c_0(t) = -g; t = n\tau, n \in \mathbf{N} \\ 1 \geq c_0(0) \geq 0, 1 \geq c_e(0) \geq 0 \end{cases}$$

由引理2可得

$$\begin{aligned} c_0(t) &\leq c_0(0)e^{-mt} + \int_0^t e^{-m(t-s)} m \{ [1 - e^{-m\tau} + \\ &g((e^{-m\tau} - e^{-nm\tau})/(1 - e^{-nm\tau}))]/(1 - e^{-m\tau}) \} ds - \\ &[ge^{-m(t-(n-1)\tau)}(1 - e^{-m(n-1)\tau})]/(1 - e^{-m\tau}) \leq \\ &e^{-mt} + \int_0^t e^{-m(t-s)} m \{ [1 - e^{-m\tau} + g((e^{-m\tau} - e^{-nm\tau})/(1 - e^{-nm\tau}))]/(1 - e^{-m\tau}) \} ds - \\ &[ge^{-m(t-(n-1)\tau)}(1 - e^{-m(n-1)\tau})]/(1 - e^{-m\tau}) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[(1 - e^{-m\tau})e^{-mt} + g((e^{-m\tau} - e^{-nm\tau})/(1 - e^{-nm\tau}))](1 - e^{-m\tau}) + 1 - e^{-mt} - (1 - e^{-m\tau}) \times \\ &e^{-mt} - g(1 - e^{-m(n-1)\tau})e^{-m(t-(n-1)\tau)}] / \\ &(1 - e^{-m\tau}) \leq 1 \end{aligned} \quad \square$$

因此,在本文研究中,总假设(5)成立.

2 持续与灭绝

$$\begin{cases} \dot{c}_0(t) = kc_e(t) - mc_0(t) \\ \dot{c}_e(t) = -hc_e(t), t \neq n\tau, n \in \mathbf{N} \\ \Delta c_0(t) = -g, \Delta c_e(t) = b, t = n\tau, n \in \mathbf{N} \\ 1 \geq c_0(0) \geq 0, 1 \geq c_e(0) \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

定理2 系统(6)存在惟一的一个 τ 周期解 $(\tilde{c}_0(t), \tilde{c}_e(t))$, 对于系统(6)的任意解 $(c_0(t), c_e(t))$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 都有 $c_0(t) \rightarrow \tilde{c}_0(t), c_e(t) \rightarrow \tilde{c}_e(t)$. 而且, 如果 $c_0(0) > \tilde{c}_0(0), c_e(0) > \tilde{c}_e(0)$, 那么对所有的 $t \geq 0$, 都有 $c_0(t) > \tilde{c}_0(t), c_e(t) > \tilde{c}_e(t)$, 其中对于 $t \in ((n-1)\tau, n\tau], n \in \mathbf{N}$, 有

$$\begin{cases} \tilde{c}_0(t) = \tilde{c}_0(0)e^{-m(t-(n-1)\tau)} + [bk(e^{-m(t-(n-1)\tau)} - e^{-h(t-(n-1)\tau})]/(1 - e^{-h\tau})(h - m) \\ \tilde{c}_e(t) = \frac{be^{-h(t-(n-1)\tau)}}{1 - e^{-h\tau}} \\ \tilde{c}_0(0) = \frac{bk(e^{-m\tau} - e^{-h\tau})}{(1 - e^{-m\tau})(1 - e^{-h\tau})(h - m)} - \frac{g}{1 - e^{-m\tau}} \\ \tilde{c}_e(0) = \frac{b}{1 - e^{-h\tau}} \end{cases}$$

证明 令 $C(t)$ 是相应于系统(6)的齐次方程的标准化的基解矩阵, 那么

$$C(t) = \begin{bmatrix} e^{-mt} & \frac{k(e^{-mt} - e^{-ht})}{h - m} \\ 0 & e^{-ht} \end{bmatrix}$$

由文献[11], 系统(6)的解 $c(t) = (c_0(t), c_e(t))$ 具有如下形式:

$$c(t) = C(t)c(0) + \sum_{0 \leq n\tau < t} C(t)C^{-1}((n\tau)^+) \begin{bmatrix} -g \\ b \end{bmatrix}$$

其中 $c(0) = \begin{bmatrix} c_0(0) \\ c_e(0) \end{bmatrix}$. 若 $c(\tau^+) = c(0)$,

$$[I - C(\tau^+)]c(0) = \begin{bmatrix} -g \\ b \end{bmatrix} \quad (7)$$

那么系统(6)的解 $c(t) = (c_0(t), c_e(t))$ 是 τ 周期的.

由于系统(6)的齐次方程的单值矩阵 $C(\tau)$ 的乘子 $\mu_1 = e^{-m\tau}, \mu_2 = e^{-h\tau}$ 都小于 1, 方程(7)有惟一

$$\text{解 } \tilde{c}(0) = \begin{bmatrix} \tilde{c}_0(0) \\ \tilde{c}_e(0) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{c}(0) = \begin{bmatrix} \tilde{c}_0(0) \\ \tilde{c}_e(0) \end{bmatrix} = [\mathbf{I} - \mathbf{C}(\tau^+)]^{-1} \begin{bmatrix} -g \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{bk(e^{-m\tau} - e^{-h\tau})}{(1 - e^{-m\tau})(1 - e^{-h\tau})(h - m)} - \frac{g}{1 - e^{-m\tau}} \\ \frac{b}{1 - e^{-h\tau}} \end{bmatrix}$$

于是可得到系统(6)的惟一的 τ 周期解, 记为

$\tilde{c}(t)$, 则对于 $t \in ((n-1)\tau, n\tau]$, $n \in \mathbf{N}$, 有

$$\begin{cases} \tilde{c}_0(t) = \tilde{c}_0(0)e^{-m(t-(n-1)\tau)} + \frac{bk(e^{-m(t-(n-1)\tau}) - e^{-h(t-(n-1)\tau})}{(1 - e^{-h\tau})(h - m)} \\ \tilde{c}_e(t) = \frac{be^{-h(t-(n-1)\tau)}}{1 - e^{-h\tau}} \end{cases}$$

由系统(6)的第二和第三个方程以及引理3, 得

$$c_e(t) = \left[c_e(0) - \frac{b}{1 - e^{-h\tau}} \right] e^{-ht} + \tilde{c}_e(t), \quad t \in ((n-1)\tau, n\tau], \quad n \in \mathbf{N} \quad (8)$$

因此, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有

$$c_e(t) \rightarrow \tilde{c}_e(t) \quad (9)$$

再由系统(6)的第一和第三个方程, 得

$$c_0(t) \leq c_0(0)e^{-mt} + \int_0^t kc_e(s)e^{-m(t-s)} ds - \frac{ge^{-m(t-(n-1)\tau)}(1 - e^{-m(n-1)\tau})}{1 - e^{-m\tau}} \quad (10)$$

将式(8)代入式(10)并经过归纳和计算可得

$$c_0(n\tau) = c_0(0)e^{-mn\tau} + \frac{kc_e(0)}{h-m} [e^{-mn\tau} - e^{-hn\tau}] + \frac{kb}{h-m} \frac{e^{-m\tau} - e^{-h\tau}}{1 - e^{-h\tau}} \left[\frac{1 - e^{-m(n-1)\tau}}{1 - e^{-m\tau}} - \frac{e^{-h(n-1)\tau} - e^{-m(n-1)\tau}}{1 - e^{-(h-m)\tau}} \right] - \frac{ge^{-m\tau}(1 - e^{-m(n-1)\tau})}{1 - e^{-m\tau}}$$

显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_0(n\tau) = \frac{kb}{h-m} \frac{e^{-m\tau} - e^{-h\tau}}{1 - e^{-h\tau}} - \frac{ge^{-m\tau}}{1 - e^{-m\tau}}$$

易知

$$c_0(n\tau) \rightarrow \tilde{c}_0(n\tau) = \tilde{c}_0(0), \quad n \rightarrow \infty$$

因此对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $n-1 > N$ 时, 有

$$|c_0((n-1)\tau) - \tilde{c}_0((n-1)\tau)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

由式(9)可知存在 $T > N\tau$ 使得 $t > T$ 时, 有

$$|c_e(t) - \tilde{c}_e(t)| < \frac{\varepsilon}{2k\tau}$$

故此, 对于 $t > T + \tau$, $t \in ((n-1)\tau, n\tau]$, $n \in \mathbf{N}$, 有

$$|c_0(t) - \tilde{c}_0(t)| = \left| c_0((n-1)\tau)e^{-m(t-(n-1)\tau)} + \int_{(n-1)\tau}^t kc_e(s)e^{-m(t-s)} ds - \tilde{c}_0((n-1)\tau)e^{-m(t-(n-1)\tau)} - \int_{(n-1)\tau}^t k\tilde{c}_e(s)e^{-m(t-s)} ds \right| \leq |c_0((n-1)\tau) - \tilde{c}_0((n-1)\tau)| \times e^{-m(t-(n-1)\tau)} + \left| \int_{(n-1)\tau}^t k(c_e(s) - \tilde{c}_e(s))e^{-m(t-s)} ds \right| < \varepsilon$$

因此, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有

$$c_0(t) \rightarrow \tilde{c}_0(t) \quad (11)$$

设 $c_e(0) > \tilde{c}_e(0)$, 由式(8)可得, 对所有的 $t \geq 0$, 有 $c_e(t) > \tilde{c}_e(t)$.

再考虑下列系统

$$\begin{cases} \dot{c}_0(t) = kc_e(t) - mc_0(t) \geq k\tilde{c}_e(t) - mc_0(t); \\ t \neq n\tau, \quad n \in \mathbf{N} \\ \Delta c_0(t) = -g; \quad t = n\tau, \quad n \in \mathbf{N} \\ c_0(0) > \tilde{c}_0(0) \end{cases}$$

由引理2, 可知

$$c_0(t) > c_0(0)e^{-mt} + \int_0^t k\tilde{c}_e(s)e^{-m(t-s)} ds - \frac{ge^{-m(t-(n-1)\tau)}(1 - e^{-m(n-1)\tau})}{1 - e^{-m\tau}} > \tilde{c}_0(0)e^{-mt} + \int_0^t k\tilde{c}_e(s)e^{-m(t-s)} ds - \frac{ge^{-m(t-(n-1)\tau)}(1 - e^{-m(n-1)\tau})}{1 - e^{-m\tau}} = \tilde{c}_0(t) \quad \square$$

考虑下列子系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(r_0 - r_1 c_0(t) - f(x(t))) \\ x(0) > 0 \end{cases} \quad (12)$$

定理3 对于系统(12)的任一解 $x(t)$, 存在一个正常数 $M > 0$, 使得当 t 充分大时, 有 $x(t) < M$.

定理4 $x(t)$ 是系统(3)的任一解, 如果

$$(H0) \quad \frac{hg}{b} < k \leq m \left[\frac{1 - e^{-m\tau} + g \left(\frac{e^{-m\tau} - e^{-m\tau\tau}}{1 - e^{-m\tau\tau}} \right)}{1 - e^{-m\tau}} \right]$$

且下面的两个条件之一成立:

$$(H1) \quad \tau < \frac{r_1(bk - gh)}{r_0 hm};$$

$$(H2) \quad \tau = \frac{r_1(bk - gh)}{r_0 hm}, \text{ 且 } c_0(0) > \tilde{c}_0(0),$$

$$c_e(0) > \tilde{c}_e(0).$$

则当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x(t) \rightarrow 0$. 即种群灭绝.

证明 设(H0)和(H1)成立, $\exists \epsilon > 0$, 使得 $\delta = -r_0 \tau + \frac{r_1(bk - hg)}{hm} - r_1 \epsilon \tau > 0$. 显然, 当 t 充分大时, 有 $c_0(t) > \tilde{c}_0(t) - \epsilon$. 因此

$$\dot{x}(t) = x(t)(r_0 - r_1 c_0(t) - f x(t)) < x(t)(r_0 - r_1(\tilde{c}_0(t) - \epsilon))$$

$$x((n+1)\tau) <$$

$$x(n\tau) \exp\left(\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} (r_0 - r_1(\tilde{c}_0(t) - \epsilon)) dt\right) =$$

$$x(n\tau) \exp\left[r_0 \tau - r_1 \frac{bk - hg}{hm} + r_1 \epsilon \tau\right] =$$

$$x(n\tau) \exp(-\delta)$$

归纳得 $x((n+1)\tau) < x(0^+) \exp(-n\delta)$, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $x(n\tau) \rightarrow 0$. 又由

$$0 < x(t) < x(n\tau) \exp(r_0 \tau), \quad t \in (n\tau, (n+1)\tau)$$

故当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x(t) \rightarrow 0$.

设(H0)和(H2)成立, 由定理2, 对所有的 $t > 0$, $c_0(t) > \tilde{c}_0(t)$. 因此

$$\dot{x}(t) = x(t)(r_0 - r_1 c_0(t) - f x(t)) <$$

$$x(t)(r_0 - r_1 \tilde{c}_0(t) - f x(t))$$

对上式从 $n\tau$ 到 $(n+1)\tau$ 积分得

$$x((n+1)\tau) <$$

$$x(n\tau) \exp\left(\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} (r_0 - r_1 \tilde{c}_0(t) - f x(t)) dt\right) =$$

$$x(n\tau) \exp(-\delta_n)$$

其中 $\delta_n = f \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} x(t) dt$. 断言: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $\delta_n \rightarrow 0$. 否则, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_n = H > 0$, $\exists \{\delta_n\}$ 的一个子列 $\{\delta_{n_k}\}$, 使得 $\limsup_{k \rightarrow \infty} \delta_{n_k} = H$, 因此 $\exists k_0 \in \mathbf{N}$,

使得当 $k > k_0$ 时, 有 $\delta_{n_k} > \frac{H}{2}$, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n > \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{n_k} = \infty$$

则

$$x(n\tau) \leq x(0^+) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \delta_i\right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

且当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $x_1(t) \rightarrow 0$, 这蕴含了 $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_n = 0$,

从而得出矛盾. 故此, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, 这又能推得当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $x(t) \rightarrow 0$, 即种群 $x(t)$ 走向灭绝. $\square$

定理5 如果 $\frac{hg}{b} < k \leq m\{[1 - e^{-m\tau} + g((e^{-m\tau} - e^{-mm\tau})/(1 - e^{-mm\tau}))]/(1 - e^{-m\tau})\}$, 且 $\tau > \frac{r_1(bk - gh)}{r_0 hm}$, 系统(3)的物种 $x(t)$ 是持续生存的.

证明 取 $M_1, \epsilon > 0$ 充分小使得 $\omega = r_0 \tau - \frac{r_1(bk - hg)}{hm} - r_1 \epsilon \tau - f M_1 \tau > 0$. 由引理2知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $c_0(t) \rightarrow \tilde{c}_0(t)$. 所以 $\exists T_1 > 0$ 使得 $t > T_1$ 时, $c_0(t) < \tilde{c}_0(t) + \epsilon$. 下面往证 $x(t) < M_1$ 不能对所有的 $t > T_1$ 都成立. 否则, 有

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)(r_0 - r_1 c_0(t) - f x(t)) > \\ &= x(t)(r_0 - r_1(\tilde{c}_0(t) + \epsilon) - f M_1), \\ & \quad t > T_1 \end{aligned} \quad (13)$$

令 $n_1 \in \mathbf{N}$ 且 $n_1 \tau \geq T_1$. 对式(13)从 $n\tau$ 到 $(n+1)\tau$ ($n \geq n_1$) 积分得

$$x((n+1)\tau) \geq$$

$$x(n\tau) \exp\left(\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} (r_0 - r_1(\tilde{c}_0(t) + \epsilon) - f M_1) dt\right) =$$

$$x(n\tau) \exp\left[r_0 \tau - \frac{r_1(bk - hg)}{hm} - r_1 \epsilon \tau - f M_1 \tau\right] =$$

$$x(n\tau) \exp(\omega)$$

显然, $x((n_1 + k)\tau) \geq x((n_1 \tau)^+) \exp(k\omega) \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$, 矛盾. 故 $\exists T > T_1$ 使得 $x(t) > M_1$. 若对所有的 $t > T$, 都有

$$x(t) \geq M_1 \exp(-\kappa \tau)$$

其中 $\kappa = \sup_{0 \leq t < \infty} \{r_0 - r_1(\tilde{c}_0(t) + \epsilon) - f M_1\}$, 则证明完成. 否则, $\exists t^* > T$ 使得 $x(t^*) < M_1 \exp(-\kappa \tau)$, 那么 $\exists t_0 \in (T, t^*)$ 使得 $t \in (t_0, t^*]$ 时, 有

$x(t_0) = M_1$, 且 $x(t) < M_1$. 取 $n_2 \in \mathbf{N}$, 使得 $t^* \in (t_0 + n_2 \tau, t_0 + (n_2 + 1)\tau)$, 有

$$M_1 \exp(-\kappa \tau) > x(t^*) =$$

$$x(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t^*} (r_0 - r_1(\tilde{c}_0(t) + \epsilon) - f M_1) dt\right) =$$

$$M_1 \exp\left(\int_{t_0}^{n_2 \tau} (r_0 - r_1(\tilde{c}_0(t) + \epsilon) - f M_1) dt + \int_{n_2 \tau}^{t^*} (r_0 - r_1(\tilde{c}_0(t) + \epsilon) - f M_1) dt\right) >$$

$$M_1 \exp \left(\int_{n_2 \tau}^{t^*} (r_0 - r_1(\tilde{c}_0(t) + \epsilon) - fM_1) dt \right) \geq$$

$$M_1 \exp(-\kappa\tau)$$

矛盾. 故此, 令 $M^* = M_1 \exp(-\kappa\tau)$, 对所有的 $t > T$, 都有 $x(t) \geq M^*$. 再由引理 3 知结论成立. $\square$

$\frac{r_1(bk - gh)}{r_0 hm}$ 是物种 $x(t)$ 持续生存和灭绝的

一个阈值. 因此, 为了保证物种 $x(t)$ 不趋于灭绝, 可以通过减少污染物的排放, 采用一些辅助手段来为生物体排毒以及使外界污染源排放毒素的周期 τ 变长等来实现.

3 周期解和种群的平均密度

引理 4^[15] 考虑周期单种群 Logistic 模型

$$\frac{dv}{dt} = v(t)(\alpha(t) - \beta(t)v(t)) \quad (14)$$

其中 $\alpha(t), \beta(t)$ 都是定义在 $\mathbf{R}_+$ 上的 τ 周期函数.

若 $\beta(t) > 0, \int_0^\tau \alpha(t) > 0$, 则模型(14) 存在惟一的全局渐近稳定的正的 τ 周期解 $v^*(t)$, 且对于系统(14) 的任一具有正初值的解 $v(t)$ 都有 $v(t) \rightarrow v^*(t), t \rightarrow \infty$.

引理 5^[15] 考虑周期单种群 Logistic 模型

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{v}(t)(\bar{\alpha}(t) - \beta(t)\bar{v}(t)), \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \quad (15)$$

其中 $\bar{\alpha} \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ 是 τ 周期函数且 $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{\alpha}(t) - \alpha(t)| = 0, \bar{v}(t)$ 表示方程(15) 具有初值 $\bar{v}_0$ 的惟一解, 那么对任意的 $\bar{v}_0 > 0$, 都有 $\bar{v}(t) \rightarrow v^*(t), t \rightarrow \infty$.

利用定理 2 以及引理 4 和 5 可给出系统(3) 正周期解存在和稳定的条件.

定理 6 如果 $\frac{hg}{b} < k \leq m \{ [1 - e^{-m\tau} + g((e^{-m\tau} - e^{-m\tau\tau}) / (1 - e^{-m\tau}))] / (1 - e^{-m\tau}) \}$, 且 $\tau > \frac{r_1(bk - gh)}{r_0 hm}$, 系统(3) 存在惟一的全局渐近稳定的正的 τ 周期解 $(\hat{x}(t), \tilde{c}_0(t), \tilde{c}_e(t))$.

因为 $\hat{x}(t)$ 是 τ 周期的, 故此

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \hat{x}(t) dt = \frac{1}{f\tau} \int_0^\tau (r_0 - r_1 \tilde{c}_0(t)) dt = \frac{r_0}{f\tau} \left(\tau - \frac{r_1(bk - hg)}{r_0 hm} \right)$$

$\frac{r_0}{f\tau} \left(\tau - \frac{r_1(bk - hg)}{r_0 hm} \right)$ 是物种 $x(t)$ 在一个脉冲周期内的平均密度, 这表明周期脉冲会引起模型(3) 中解的周期性振动.

4 结 语

该文研究了在污染环境中的单种群模型, 得到了该种群灭绝和持续生存的充分条件, 并且由此得到了种群持续生存和灭绝的阈值. 最后还证得系统存在惟一的全局渐近稳定的正的 τ 周期解, 并得到该种群在一个脉冲周期内的平均密度. 今后工作的研究重点应放在考虑外界污染源排放毒素与人为因素导致生物体排毒不是同步发生的情形.

参考文献:

- [1] NELSON S A. The problem of oil pollution of the sea [M] // **Advances in Marine Biology**. London: Academic Press, 1970
- [2] PATIN S A. **Pollution and the Biological Resource of the Ocean** [M]. London: Butter Worth Scientific, 1982
- [3] HALLAM T G, CLARK C E, JORDAN G S. Effects of toxicants on populations: a qualitative approach II. First order kinetics [J]. **J Math Biol**, 1983, **18**: 25-37
- [4] HALLAM T G, CLARK C E, LASSITER R R. Effects of toxicants on populations: a qualitative approach I. Equilibrium environment exposure [J]. **Ecol Model**, 1983, **18**: 291-304
- [5] HALLAM T G, CLARK C E, DE LUNA J T. Effects of toxicants on populations: a qualitative approach III. environmental and food chain pathways [J]. **J Theor Biol**, 1984, **109**: 411-429
- [6] DE LUNA J T, HALLAM T G. Effects of toxicants on populations: a qualitative approach IV. Resource-consumer-toxicant models [J]. **Ecol Model**, 1987, **35**: 249-273
- [7] FREEDMAN H I, SHUKLA J B. Models for the effect of toxicant in single species and predator-prey system [J]. **J Math Biol**, 1991, **30**: 15-30
- [8] HALLAM T G, CLARK C E. Nonautonomous Logistic equation as models of population in a deteriorating environment [J]. **J Theor Biol**, 1982, **93**: 303-311

- [9] SHUKLA J B, AGRAWAL A K, DUBEY B, *et al.* Existence and survival of two competing species in a polluted environment: a mathematical model [J]. **J Biol Syst**, 2001, **9**(2): 89-103
- [10] LAKSHMIKANTHAM V, BAINOV D D, SIMENOV P S. **Theory of Impulsive Differential Equations** [M]. Singapore: World Scientific, 1989
- [11] BAINOV D D, SIMENOV P S. **Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications** [M]. England: Longman Scientific & Technical, 1993
- [12] JIANG G R, LU Q S, PENG L P. Impulsive ecological control of staged-structured pest management system [J]. **Math Biosci Eng**, 2005, **2**(2): 329-344
- [13] LIU B, CHEN L S, ZHANG Y J. The effect of impulsive toxicant input on a population in a polluted environment [J]. **J Biol Syst**, 2003, **11**(3): 265-274
- [14] LIU X N, CHEN L S. Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator [J]. **Chaos, Solitons and Fractals**, 2003, **16**: 311-320
- [15] GÓMEZ L, ORTEGA R, TINEO A. The periodic predator-prey Lotka-Volterra model [J]. **Adv in Differ Equ**, 1996, **1**: 403-423

Impact of impulsive effect on a population dynamical behavior in a polluted environment

ZHANG Hong^{*1,2}, MENG Xin-zhu³, CHEN Lan-sun^{1,4}

(1. Dept. of Appl. Math., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China;

2. Dept. of Math., Jiangsu Univ., Zhenjiang 212013, China;

3. School of Sci., Shandong Univ. of Sci. and Technol., Qingdao 266510, China;

4. Minnan Sci. and Technol. Inst., Fujian Norm. Univ., Quanzhou 362332, China)

Abstract: A mathematical model to study the effect of a toxicant impulsively emitted into the environment from external sources and toxin excreted by some factors on a single biological species, is proposed and analyzed. It is also assumed that the toxicant emission and toxin excretion are used in the same simultaneous periodicity. By using the comparative results of impulsive differential equations and some known results of a single species Logistic model, it is observed that the population is extinct on condition that the impulsive period is lower than some threshold value. When the impulsive period is higher than this critical value, the population is shown to be permanent. It is also proved that the permanent conditions assure that there exists a unique positive periodic solutions which is globally asymptotically stable.

Key words: impulse; polluted environment; periodic solutions; permanence; extinction; globally asymptotically stable