

一个高斯系数恒等式的组合证明

冯红*, 李玉双

(大连理工大学 应用数学系, 辽宁 大连 116024)

摘要: 高斯系数恒等式的传统证明方法包括代数证明和子集-子空间模拟. 把高斯系数看做 Konvalina 定义的重量为 $\mathbf{W}=(w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_n)$ ($w_i=q^i$) 的第二类广义二项式系数, 结合对偶选择, 即从集合 $\{1, 2, \cdots, n-k+1\}$ 中可重复地选取 k 个盒子与从 $\{1, 2, \cdots, k+1\}$ 中可重复地选取 $n-k$ 个盒子一一对应, 通过证明一种选择与它的对偶选择具有相同的重量, 从而给出一个高斯系数恒等式的组合证明. 由 $0, 1, \bar{0}, \bar{1}$ 组成的选择序列表示对于等式的证明起到了至关重要的作用. 当 $q=1$ 时得到对应的普通二项式系数恒等式. 这种证明方法深刻地揭示了高斯系数和二项式系数之间的组合联系.

关键词: 第二类广义二项式系数; 高斯系数; 二项式系数

中图分类号: O157.1 **文献标志码:** A

0 引言

二项式系数、高斯系数是计数组合学中经常出现的两类数^[1]. 根据子集的有重或无重选择可以得到二项式系数的一个著名解释. 高斯系数的古典解释中有一个涉及有限维向量空间的子空间个数, 有一个涉及行最简型矩阵. Rota^[2,3] 最先将两类数代数地统一起来. 他给出几何格的特征多项式的一般定义, 二项式系数、高斯系数分别作为子集格和子空间格的特征多项式的系数.

对于二项式系数和高斯系数的代数相似性, Konvalina^[4] 定义了第二类广义二项式系数 (Whitney 数的组合模拟): 设 n 和 k 都是正整数, 假定有标号为 $1, 2, \cdots, i, \cdots, n$ 的 n 个盒子, 标号为 i 的盒子里装有 w_i 件不同的东西, $1 \leq w_1 \leq w_2 \leq \cdots \leq w_i \leq \cdots \leq w_n$. 设这 n 个盒子里的 $w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ 件东西两两不同. 用 $\mathbf{W} = (w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_n)$ 表示重量序列. 从 n 个带有重量的盒子中可重复地选取 k 个, 再在每个选定的盒子中挑选一件东西, 满足这些要求的选法数叫做重量为 $\mathbf{W}$ 的第二类广义二项式系数, 记做 $s_k^n(\mathbf{W})$. 通过改变盒子的重量就可以得到特殊类型的古典组合数, 其中包括第二类二项式系数 $\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}$ 和第二类高斯系数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. 视 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 为第

二类广义二项式系数的做法揭示了高斯系数和二项式系数之间的组合联系, 使得“子集-子空间”问题又产生了一种新的解决办法. 这个问题的传统办法之一就是子空间模拟; 第一类 (普通的) 二项式系数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 表示 n 元集合的 k -子集数, 模拟的高斯系数 (第二类高斯系数) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 表示 q 元有限域上 n 维向量空间的 k -子空间数. 从这个模拟可以看出: 高斯系数及其相关的恒等式往往是普通二项式系数及其恒等式的 q 模拟. 关于这类高斯系数恒等式的证明基本上都是代数证明或模仿子集合上的证明. 第二类广义二项式系数的引进组合地解释了高斯系数和二项式系数惊人的相似性. 本文采用 Konvalina 的方法组合地证明一个高斯系数恒等式. 文献[5] 给出了该恒等式的子空间证明.

1 第二类广义二项式系数

$$s_k^n(\mathbf{W}) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n} w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_k}, \\ n > 0, k > 0$$

定义

$$s_0^n(\mathbf{W}) = 1; \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$s_k^0(\mathbf{W}) = 0; \quad k = 1, 2, \cdots$$

现在选取重量 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 的一些特殊值.

首先取 $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n = 1$, 并记 $\mathbf{1} = (1 \ 1 \ \cdots \ 1)$. 则 $s_k^n(\mathbf{1}) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n} 1 = \binom{n+k-1}{k}$, 即第二类二项式系数.

设 q 是个正实数. 取 $\omega_i = q^{i-1} (i = 1, 2, \cdots)$. 对任意正整数 l , 记 $\mathbf{q} = (1 \ q \ q^2 \ \cdots \ q^l)$, 则 $s_k^{n-k+1}(\mathbf{q}) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n-k+1} q^{(i_1-1)+(i_2-1)+\cdots+(i_k-1)} = \sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n-k} q^{i_1+i_2+\cdots+i_k}$ 即第二类(通常的)高斯系数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

2 一个高斯系数恒等式的组合证明

定理 1 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-l \\ n-k \end{bmatrix}$

证明 只需证对任意整数 $q \geq 1$ 有

$$s_k^{n-k+1}(q) s_l^{k-l+1}(q) = s_l^{n-l+1}(q) s_{n-k}^{k-l+1}(q)$$

即

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n-k+1 \\ 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_l \leq k-l+1}} q^{(i_1-1)+\cdots+(i_k-1)+(j_1-1)+\cdots+(j_l-1)} = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq n-l+1 \\ 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{n-k} \leq k-l+1}} q^{(i_1-1)+\cdots+(i_l-1)+(j_1-1)+\cdots+(j_{n-k}-1)}$$

从 $n-k+1$ 个盒子中可重复地选取 k 个盒子的

$$\underbrace{\overbrace{0 \cdots 0}^{c_{1,1}} \overbrace{1 \cdots 1}^{d_{1,1}} \cdots \overbrace{1 \cdots 1}^{d_{1,s_1-1}} \overbrace{0 \cdots 0}^{c_{1,s_1}}}_{a_1} \underbrace{\overbrace{1 \cdots 1}^{b_1}}_{b_1} \cdots \underbrace{\overbrace{0 \cdots 0}^{c_{r-1,1}} \overbrace{1 \cdots 1}^{d_{r-1,1}} \cdots \overbrace{0 \cdots 0}^{c_{r-1,s_{r-1}-1}} \overbrace{1 \cdots 1}^{c_{r-1,s_{r-1}}}}_{a_{r-1}} \underbrace{\overbrace{1 \cdots 1}^{b_{r-1}}}_{b_{r-1}} \cdots \underbrace{\overbrace{0 \cdots 0}^{c_{r,1}} \overbrace{1 \cdots 1}^{d_{r,1}} \cdots \overbrace{0 \cdots 0}^{c_{r,s_r}}}_{a_r} \underbrace{\overbrace{0 \cdots 0}^{c_{r,s_r}}}_{b_r}$$

这里 $a_1 \geq 0, a_r \geq 0, b_i \geq 1, a_j \geq 1, 1 \leq i \leq r-1, 2 \leq j \leq r-1, \sum_{i=1}^r a_i = k, \sum_{i=1}^{r-1} b_i = n-k$. 下面一行的 k 个 0 表示序列 $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n-k+1$ 的选取, 上面一行的 $n-k$ 个 1 表示序列 $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_{n-k} \leq k-l+1$ 的选取, l 个 $\bar{0}$ 在两种情况下分别表示序列 $1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_l \leq k-l+1$ 和序列 $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_l \leq n-l+1$ 的选取.

先看下面一行分组, 这里 a_1 是盒子 1 被选取的次数, a_2 是盒子 b_1+1 被选取的次数, a_i 是盒子 $b_1+b_2+\cdots+b_{i-1}+1$ 被选取的次数(注意这个盒子的重量是 $q^{b_1+b_2+\cdots+b_{i-1}}$), 则分组中所确定的序列 $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n-k+1$ 对应的重量中 q 的指数为 $\sum_{i=1}^r a_i \sum_{j=1}^{i-1} b_j$. 再看上面一行分组, 这里 $c_{i,1} \geq 0, c_{i,s_i} \geq 0, d_{i,0} = 0$, 其余的 $c_{i,j} \geq 1, d_{i,j} \geq 1 (1 \leq i \leq r, j \text{ 取遍该行分组中 } j \text{ 所在位置处的所有可能标识})$.

一种选择: $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n-k+1$, 惟一地对应从 $k+1$ 个盒子中可重复地选取 $n-k$ 个盒子的一种选择: $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_{n-k} \leq k+1$ (对偶或共轭选择). 这里用 k 个 0 和 $n-k$ 个 1 表示下面形式的选择序列: 第 1 个 1 左边 0 的数目表示第 1 个盒子被选取的次数, 第 1 个 1 和第 2 个 1 之间 0 的数目表示第 2 个盒子被选取的次数 $\cdots$. 换句话说, 1 起到分隔符的作用, 插在两个 1 之间的 0 的数目表示盒子 $\{1, 2, \cdots, n-k+1\}$ 中特定的盒子被选取的次数. 例如, $n=7, k=4$, 序列 (从左往右读) 0110010 代表一种选择 $\{1, 3, 3, 4\}$. 通过改变 0 和 1 的角色, 采用从右往左读序列的方法定义对偶选择, 即在对偶选择中 0 起到分隔符的作用. 在上面的例子中, $n-k=3$ 时的对偶选择为 $\{2, 4, 4\}$.

下面采用上面介绍的这种方法证明: 对左边任一选择组序列

$$\begin{cases} 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n-k+1 \\ 1 \leq j \leq k \end{cases}$$

都惟一一对应右边的一种选择

$$\begin{cases} 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{n-k} \leq k \\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

并且二者对应的重量相等.

用 $0, 1, \bar{0}, \bar{1}$ 做成两行连续的分组, 如下所示:

$$\begin{aligned} & c_{1,1} + \cdots + c_{1,s_1} + c_{2,1} + \cdots + c_{2,s_2} + \cdots + c_{r-1,1} + \cdots \\ & + c_{r-1,s_{r-1}} + c_{r,1} + \cdots + c_{r,s_r} = l, \\ & d_{1,1} + \cdots + d_{1,s_1-1} + d_{2,1} + \cdots + d_{2,s_2-1} + \cdots + \\ & d_{r-1,1} + \cdots + d_{r-1,s_{r-1}-1} + d_{r,1} + \cdots + d_{r,s_r-1} = \\ & k-l \end{aligned}$$

为了便于计算, 定义

$$\begin{aligned} \sum_{j=i,1}^{r,s_r} c_j &= c_{i,1} + \cdots + c_{i,s_i} + c_{i+1,1} + \cdots + c_{i+1,s_{i+1}} + \\ & \cdots + c_{r-1,1} + \cdots + c_{r-1,s_{r-1}} + c_{r,1} + \cdots + \\ & c_{r,s_r}, \\ \sum_{j=1,1}^{i,s_i-1} d_j &= d_{1,1} + \cdots + d_{1,s_1-1} + d_{2,1} + \cdots + d_{2,s_2-1} + \\ & \cdots + d_{i-1,1} + \cdots + d_{i-1,s_{i-1}-1} + d_{i,1} + \cdots + \\ & d_{i,s_i-1} \end{aligned}$$

在这行分组中, 将 $n-k$ 个 1 抽掉暂不考虑, 以 $\bar{1}$ 作为 $\bar{0}$ 的分界符, 从左往右读由 $\bar{0}$ 组成的序列, 则序列 $1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_l \leq k-l+1$ 对应的重量中 q 的指数为

$$\sum_{i=1}^{s_1} c_{1,i} \sum_{j=1,1}^{1,i-1} d_j + \sum_{i=1}^{s_2} c_{2,i} \sum_{j=1,1}^{2,i-1} d_j + \cdots + \sum_{i=1}^{s_r} c_{r,i} \sum_{j=1,1}^{r,i-1} d_j$$

$$= \sum_{u=1}^r \left(\sum_{i=1}^{s_u} c_{u,i} \sum_{j=1,1}^{u,i-1} d_j \right)$$

令

$$s_1 = \sum_{i=1}^r a_i \sum_{j=1}^{i-1} b_j + \sum_{u=1}^r \left(\sum_{i=1}^{s_u} c_{u,i} \sum_{j=1,1}^{u,i-1} d_j \right) =$$

$$\sum_{1 \leq j < i \leq r} a_i b_j + \sum_{u=1}^r \left(\sum_{i=1}^{s_u} c_{u,i} \sum_{j=1,1}^{u,i-1} d_j \right)$$

重新考虑由 $1, \bar{0}, \bar{1}$ 组成的分组 (即上面一行分组), 以 $\bar{1}$ 和 1 作为 $\bar{0}$ 的分界符, 从左往右读由 $\bar{0}$ 组成的序列, 则序列 $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_l \leq n-l+1$ 对应的重量中 q 的指数为

$$\sum_{i=1}^{s_1} c_{1,i} \sum_{j=1,1}^{1,i-1} d_j + \sum_{i=1}^{s_2} c_{2,i} \left(\sum_{j=1,1}^{2,i-1} d_j + b_1 \right) + \cdots +$$

$$\sum_{i=1}^{s_r} c_{r,i} \left(\sum_{j=1,1}^{r,i-1} d_j + \sum_{j=1}^{r-1} b_j \right) = \sum_{u=1}^r \left(\sum_{i=1}^{s_u} c_{u,i} \sum_{j=1,1}^{u,i-1} d_j \right) +$$

$$\sum_{i=1}^{r-1} b_i \sum_{j=i+1,1}^{r,s_r} c_j$$

再在这行分组中, 抽掉 l 个 $\bar{0}$ 不考虑, 以 $\bar{1}$ 作为 1 的分界符, 采用对偶方法从右往左读由 1 组成的序列, 则序列 $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_{n-k} \leq k-l+1$ 对

应的重量中 q 的指数为 $\sum_{i=1}^{r-1} b_i \sum_{j=i+1,1}^{r,s_r-1} d_j$.

令

$$s_2 = \sum_{u=1}^r \left(\sum_{i=1}^{s_u} c_{u,i} \sum_{j=1,1}^{u,i-1} d_j \right) + \sum_{i=1}^{r-1} b_i \sum_{j=i+1,1}^{r,s_r} c_j +$$

$$\sum_{i=1}^{r-1} b_i \sum_{j=i+1,1}^{r,s_r-1} d_j =$$

$$\sum_{u=1}^r \left(\sum_{i=1}^{s_u} c_{u,i} \sum_{j=1,1}^{u,i-1} d_j \right) + \sum_{i=1}^{r-1} b_i \sum_{j=i+1}^r a_j =$$

Combinatorial proof for a Gaussian coefficient identity

FENG Hong*, LI Yu-shuang

(Dept. of Appl. Math., Dalian Univ. of Technol., Dalian 116024, China)

Abstract: The traditional proofs for Gaussian coefficient identities are often algebraic or mimic subset proofs. Interpreting Gaussian coefficients as the generalized binomial coefficients of the second kind with weight $\mathbf{W} = (\omega_1 \ \omega_2 \ \cdots \ \omega_n)(\omega_i = q^i)$ defined by Konvalina, combining dual selection, which is a selection of k boxes with repetition from the set $\{1, 2, \cdots, n-k+1\}$, can be uniquely associated with an $n-k$ selection with repetition from the set $\{1, 2, \cdots, k+1\}$, and the results show that a selection and its dual have the same weight to give a combinatorial proof for a Gaussian coefficient identity. The sequence representation of a selection consisting of $0, 1, \bar{0}, \bar{1}$, plays an important role in the proof. When $q = 1$, this Gaussian coefficient identity changes the corresponding binomial coefficient identity. This method reveals the combinatorial connections between the binomial coefficients and the Gaussian coefficients.

Key words: generalized binomial coefficients of the second kind; Gaussian coefficient; binomial coefficient

$$\sum_{u=1}^r \left(\sum_{i=1}^{s_u} c_{u,i} \sum_{j=1,1}^{u,i-1} d_j \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq r} a_j b_i$$

则有 $s_2 = s_1$, 即

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n-k+1 \\ 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_l \leq k-l+1}} q^{(i_1-1)+\cdots+(i_k-1)+(j_1-1)+\cdots+(j_l-1)} =$$

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n-k+1 \\ 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_l \leq k-l+1}} q^{s_1} = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq n-l+1 \\ 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{n-k} \leq k-l+1}} q^{s_2} =$$

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq n-l+1 \\ 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{n-k} \leq k-l+1}} q^{(i_1-1)+\cdots+(i_l-1)+(j_1-1)+\cdots+(j_{n-k}-1)}$$

3 结 语

本文将高斯系数看做 Konvalina 定义的第二类广义二项式系数, 给出一个高斯系数恒等式的组合证明, 当 $q=1$ 时得到对应的普通二项式系数恒等式. 该方法揭示了高斯系数和二项式系数之间的组合联系.

参考文献:

- [1] STANLEY R. **Enumerative Combinatorics** [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1986
- [2] ROTA G C. On the foundations of combinatorial theory I. Theory of Mobius functions [J]. **Z Warsch Verw Gebiete**, 1964, **2**: 340-368
- [3] ROTA G C. **Gian-Carlo Rota on Combinatorics** [M]. Basel: Birkhäuser, 1995
- [4] KONVALINA J. Generalized binomial coefficients and the subset-subspace problem [J]. **Adv Appl Math**, 1998, **21**(2): 228-240
- [5] GOLDMAN J, ROTA G C. On the foundations of combinatorial theory IV. Finite vector spaces and Eulerian generating functions [J]. **Stud Appl Math**, 1970, **49**: 239-258