

钢筋混凝土梁斜裂缝倾角理论与试验分析

周英武, 王苏岩, 李宏男*

(大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 斜裂缝倾角为 45° 的假定给精确分析箍筋和 FRP 加固钢筋混凝土梁的抗剪作用带来一定的误差. 为此, 从理论上研究了斜裂缝倾角的发展规律, 发现影响斜裂缝倾角的主要因素是剪跨比; 并通过国内外的 35 根试验梁, 验证了斜裂缝倾角与剪跨比的线性关系. 通过对数据统计分析给出了计算斜裂缝倾角的简单可靠、适用性较强的表达式, 为钢筋混凝土梁的抗剪分析和工程实际应用提供了有意义的依据.

关键词: FRP; 抗剪分析; 斜裂缝倾角; 剪跨比; 混凝土梁

中图分类号: TU375.1 **文献标志码:** A

0 引言

钢筋混凝土在建筑工程中的应用已有上百年的历史, 对钢筋混凝土梁斜截面抗剪性能的研究尽管已经开展了很多, 但是仍然存在着许多问题没有解决. 目前, 很多国家关于这方面的规范标准都是基于经验或者半经验半理论, 对于斜裂缝倾角的问题研究更少; 在近十多年飞速发展起来的纤维布补强加固混凝土结构中关于抗剪加固这一领域, 也没有对斜裂缝的倾角作进一步研究, 只是简单地假定斜裂缝倾角为 45° , 这对精确地分析箍筋和 FRP 在梁抗剪中的作用带来了一定的困难, 而且在小剪跨比情况下这种假定有时是偏于不安全的, 在大剪跨比的情况下又过于保守. 因此有必要对斜裂缝的倾角问题作进一步的研究.

现有的钢筋混凝土梁抗剪计算模型普遍采用以下几种: 软化桁架模型^[1]、 45° 桁架模型^[2]、变角度桁架模型^[2]和修正的受压场理论模型^[2]等, 后两种模型的精度还依赖于斜裂缝倾角的准确估算; 而 Chen 等对纤维布抗剪加固的精确计算模型^[3,4], 其前提是已知斜裂缝的倾角值. 因此为了更全面地研究钢筋混凝土梁斜截面抗剪机理, 为今后的试验研究和工程应用提供有意义的依据, 本文首先推导斜裂缝倾角的计算公式, 并通过收集得到的国内外 35 根试验梁数据, 进一步验证斜

裂缝倾角的主要影响因素, 同时给出计算斜裂缝倾角的简单表达式.

1 斜裂缝倾角的理论分析

宏观上斜裂缝的形成机理是由于混凝土质量分布不均匀, 内部有毛细孔空隙, 当构件内部的拉应力大于混凝土实际抗拉强度的最低值时, 在混凝土抗拉最弱的截面内首先出现裂缝. 由于混凝土的离散性和梁斜截面受力的复杂性, 通常对斜裂缝形成后的混凝土梁作如下的假定:

- (1) 不考虑混凝土的抗拉作用、骨料的咬合作用^[5];
- (2) 混凝土应力依然满足平截面假定^[5];
- (3) 根据文献^[6], 假定斜裂缝顶端以上受压区混凝土应力为三角形分布, 如图 1 所示.

混凝土梁开裂后, 考虑开裂处纵筋的纯剪切变形所产生的剪力 V_d , 在数值上与纵筋承受的拉力 T 有如下关系^[5]:

$$V_d = 0.4T \cot \theta \quad (1)$$

式中: θ 为斜裂缝与梁水平轴线的夹角, 是要推求的未知量, 其他符号含义如图 1 所示.

由垂直于梁横截面的外力力矩平衡关系有

$$\sigma_c = \frac{Mc}{I} = \frac{Vlc}{I} \quad (2)$$

式中: σ_c 为混凝土顶部受压纤维的应力; M 为截面

收稿日期: 2006-06-10; 修回日期: 2008-01-18.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50378711).

作者简介: 周英武(1978-), 男, 博士生; 李宏男*(1957-), 男, 长江学者奖励计划特聘教授, 博士生导师.

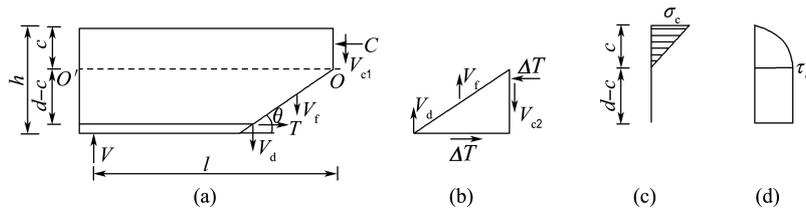


图1 斜裂缝上力与应力分布图

Fig. 1 Forces and stress profiles on the critical shear crack

弯矩; c 为混凝土梁受压区高度; V 为截面上的总剪力, 其值等于支座的总反力; I 为梁横截面对中和轴的惯性矩, 近似取 $I = bh^3/12$; l 为支座到斜裂缝顶点的距离, 这里 $l = \frac{\lambda}{1 - 0.36c/d}(d - c)^{[5]}$, 近似取 $1 - 0.36c/d \approx 1 - c/3d$, 则有 $l = \frac{\lambda}{1 - c/3d}(d - c)$, λ 为剪跨比, d 为混凝土梁截面的有效高度. 则可以得到混凝土梁受压区的合力

$$C = \frac{1}{2}bc\sigma_c = 6 \frac{c^2}{h^3} \frac{\lambda}{1 - c/3d}(d - c)V = \omega s \lambda V \quad (3)$$

式中: $\omega = 6 \left[\frac{c}{d} \right]^2 \left[\frac{d}{h} \right]^3$, $s = \frac{1 - c/d}{1 - c/3d}$.

由截面水平力的平衡可以得到纵筋拉力 T 与混凝土受压区合力 C 的关系:

$$T = C = \omega s \lambda V \quad (4)$$

假定斜裂缝绕 O 点的转角与受压区混凝土绕 O 点的转角相等^[5], 有

$$\frac{\epsilon_c}{\epsilon_s} = \frac{c}{d - c} \quad (5)$$

式中: ϵ_c 和 ϵ_s 分别为混凝土的压应变和纵筋的拉应变.

采用与文献[5]相同的假定和推导方法, 梁的受压区高度与梁的有效高度的比值 c/d , 近似取受压区混凝土的三角形应力分布的极大值 α 增长至 f_c 时的比值, 则由式(5)、(6)和(7)推导出式(8)

$$C = \frac{1}{2}bcf_c \quad (6)$$

$$T = C \quad (7)$$

$$\left[\frac{c}{d} \right]^2 + 800 \frac{\rho}{f_c} \frac{c}{d} - 800 \frac{\rho}{f_c} = 0 \quad (8)$$

式中: f_c 为混凝土的最大压应力; b 为梁宽; ρ 为梁的纵筋配筋率; 推导中取 $E_s = 2.0 \times 10^5$ MPa, $\epsilon_c = 2.0 \times 10^{-3}$.

带裂缝工作的混凝土梁横截面上的剪应力分布如图1(d)所示^[2,5], 则

$$V_{c2} = b(d - c)\tau_c = b(d - c) \frac{V}{bjd} =$$

$$\frac{1 - c/d}{1 - c/3d} V = sV \quad (9)$$

箍筋和 FRP 条带承担的剪力 V_f 可简单地表述如下:

$$V_f = V - V' \quad (10)$$

上两式中: jd 为梁的内力臂; V' 为扣除箍筋和 FRP 条带后梁的其他因素所承担的剪力之和.

由图1(b)的竖向力平衡, 并代入(1)和(4)两式有

$$V = \frac{V'}{0.4\omega s \lambda \cot \theta + 1 - s} \quad (11)$$

设与斜裂缝相交处箍筋和 FRP 条带的合力作用点与 O 点的距离为 $\alpha(d - c)\cot \theta$, α 根据箍筋和 FRP 条带应力在斜裂缝处的分布规律取值, 当假定箍筋和 FRP 条带应力按三角形分布时取 $\alpha = 2/3$, 均匀分布时取 $\alpha = 1/2$. 则在图1(a)中对 O 点取矩等于零, 有

$$Vl - V_d(d - c)\cot \theta - V_f \alpha(d - c)\cot \theta - T(d - c/3) = 0 \quad (12)$$

代入式(1)、(4)和(10), 得

$$V = \frac{V' \alpha \cot \theta}{0.4\omega s \lambda \cot^2 \theta + \alpha \cot \theta + \omega \lambda - \lambda/(1 - c/3d)} \quad (13)$$

由式(11)和(13)得

$$\cot^2 \theta + \frac{2.5\alpha}{(1 - \alpha)\omega \lambda} \cot \theta - \frac{2.5[1 - \omega(1 - c/3d)]}{\omega(1 - \alpha)(1 - c/d)} = 0 \quad (14)$$

由式(14)即可求得斜裂缝的倾角 θ .

2 算例分析

由式(14)可以看到, 斜裂缝倾角的主要影响因素是剪跨比, 为了直观地揭示两者的关系, 根据作者的 FRP 加固高强混凝土梁的抗剪试验, 取 1 根 $150 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$ 加固梁在不同剪跨比下 ($\lambda = 1.4 \sim 3.0$) 计算斜裂缝的倾角, 计算结果见图 2. 梁的具体参数为纵筋配筋率 $\rho = 2\%$, $d/h = 340/400$, $\alpha = 2/3$. 同时选择 $\lambda = 1.43, 2.00, 2.57, 3.00$ 的试验梁的斜裂缝倾角的试验值与计算值

进行比较,结果见表1.

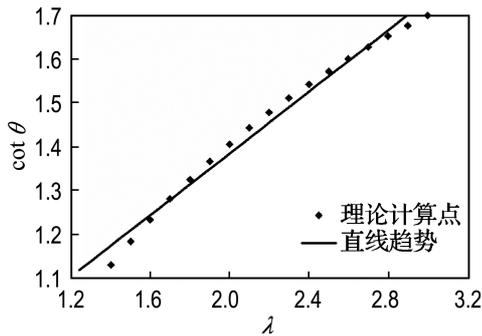


图2 斜裂缝倾角的理论计算值

Fig. 2 Prediction of the critical shear crack angle

表1 斜裂缝倾角的试验值与计算值

Tab. 1 Experimental and theoretical values of the critical shear crack angle

梁编号	λ	$\cot \theta$		计算值/试验值
		试验值	计算值	
LA2	1.43	1.234 9	1.146 1	0.928 1
LA11	2.00	1.376 4	1.405 5	1.021 1
LA03	2.57	1.664 2	1.591 8	0.956 5
LA10	3.00	1.600 3	1.699 5	1.062 0

从表1中可以看出计算值与试验值吻合较好,说明式(14)在计算斜裂缝倾角上有一定的参考价值.但是使用式(14)时,首先需要根据纵向钢筋的配筋率计算混凝土梁受压区高度与有效高度的比值,然后求解一个一元二次方程,这在某种程度上会增加梁抗剪计算的复杂性,且公式忽略了混凝土的抗拉强度、骨料的咬合作用及纵筋的销栓作用,加上混凝土本身具有的离散性,在有些情况下可能会产生较大的误差.因此,有必要从试验上分析斜裂缝倾角,提出一个更为简单可靠的表达式,同时不增加混凝土梁抗剪计算的复杂性.

3 斜裂缝倾角的试验分析

从图2可以看到,钢筋混凝土梁斜裂缝倾角的余切值与剪跨比在 $\lambda = 1.4 \sim 3.0$ 内可以用一条直线简化代替,为了验证这种思想的可行性,建立更为简单可靠的计算表达式,作者收集了国内外35根试验梁,试验梁包括普通钢筋混凝土梁和经FRP加固的钢筋混凝土梁,其基本参数列于表2.

表2 钢筋混凝土试验梁的试验数据

Tab. 2 Experimental data of RC beams

参考文献	梁编号	f_{cu} /MPa	ρ	ρ_v	α	λ	E_t /MPa	$\cot \theta$
[7]	S-GU-1-1	16.8	0.033 8	0.001 89	0.001 13	1.500	102 100	0.810
	S-CU-2-1	38.0	0.033 8	0.001 89	0.000 74	2.155	235 000	1.540
	S-GU-2-2	34.3	0.033 8	0.001 89	0.001 44	2.155	102 100	1.150
	S-GU-2-1a	32.7	0.033 8	0.001 89	0.001 13	2.155	102 100	1.483
	S-GU-3-1	36.8	0.033 8	0.001 89	0.001 13	2.800	102 100	1.881
[8]	S1a	38.0	0.014 4	0	0.002 11	3.200	235 000	2.747
	S2a	38.0	0.014 4	0	0.003 14	3.200	235 000	2.747
[9]	G1	55.6	0.020 5	0	0.018 39	2.670	21 000	1.428
[10]	BT5	44.3	0.021 6	0.010 47	0.000 88	3.000	228 000	1.628
本文	LA1	61.2	0.049 7	0.002 21	0.000 74	1.430	237 000	1.428
	LA2	56.4	0.049 7	0.002 21	0.000 74	1.430	237 000	1.235
	LA02	65.3	0.049 7	0.002 21	0	2.000	—	1.192
	LA9	61.9	0.049 7	0.002 21	0.001 48	2.000	237 000	1.036
	LA19	57.5	0.049 7	0.002 21	0.002 23	2.000	237 000	0.900
	LA11	55.9	0.049 7	0.002 21	0.001 11	2.000	237 000	1.483
	LA16	64.2	0.049 7	0.002 21	0.001 48	2.000	237 000	1.280
	LB1	68.4	0.049 7	0.002 95	0.000 74	2.000	237 000	1.234
	LC1	51.8	0.049 7	0.004 42	0.000 74	2.000	237 000	1.540
	LA03	59.6	0.049 7	0.002 21	0	2.570	—	1.664
LA10	62.4	0.049 7	0.002 21	0.000 74	3.000	237 000	1.962	
LA5	63.3	0.049 7	0.002 21	0.000 74	3.000	237 000	1.600	
[11]	B03	48.1	0.012 6	0	0.023 07	3.300	42 400	2.318
[12]	Uh5-60	89.7	0.009 0	—	0	0.540	—	0.447
	Uh5-75	89.7	0.010 0	—	0	0.550	—	0.500
	Uh5-100	89.7	0.009 8	—	0	0.530	—	0.563
[13]	C1	77.0	0.030 8	—	—	2.870	234 000	1.664
	C2	81.6	0.030 8	—	—	2.870	234 000	1.600
[14]	V5-A	59.2	0.018 9	0.001 81	—	4.000	—	2.303
	V1-A	55.4	0.018 9	0.001 81	—	4.000	—	2.600
[15]	B0	41.9	0.017 9	0.002 09	—	0.800	—	0.666
	B2	41.9	0.017 9	0.002 09	—	0.800	165 000	0.700
	B4	41.9	0.017 9	0.002 09	—	0.800	100 000	0.722
[16]	SA5	45.1	0.033 7	0.006 69	0.001 04	1.670	192 000	1.348
	SA12	42.9	0.033 7	0.006 69	0.001 04	1.670	192 000	1.476
	SB1	45.1	0.033 7	0.004 46	0.001 04	2.290	192 000	1.538

注:表中“—”表示该数据不详或者没有

为了综合考虑配箍率与配布率对斜裂缝倾角的影响,定义总配箍率

$$\rho_{\text{tot}} = \rho_v + \frac{E_f}{E_s} \rho_f = \rho_v + \eta \rho_f \quad (15)$$

式中: ρ_v 和 ρ_f 分别为梁的配箍率和纤维布的配布率; E_s 和 E_f 分别为箍筋和纤维布的弹性模量。

根据表2绘制图3~6各因素与 $\cot \theta$ 的关系图,表明 $\cot \theta$ 与纵筋配筋率、混凝土强度、总配箍率和剪跨比的关系。从图中可以看到,斜裂缝倾角与纵筋的配筋率、混凝土强度以及总配箍率的联系不大,数据点满了整个平面;其主要影响因素是

剪跨比,且与剪跨比基本呈线性关系,从而在试验上验证了前文的推论。为了不增加抗剪计算的复杂性,对斜裂缝倾角的余切与剪跨比进行线性拟合,有

$$\cot \theta = 0.57889\lambda + 0.20065 \quad (16)$$

式(16)是综合考虑了各种混凝土强度、各种截面尺寸、各种配筋率、配箍率和配布率的情况下拟合计算得到的,因此,它具有较为广泛的代表性,而且使用简单,适用于普通钢筋混凝土梁和FRP加固混凝土梁的抗剪计算,对工程应用也有一定的参考价值。

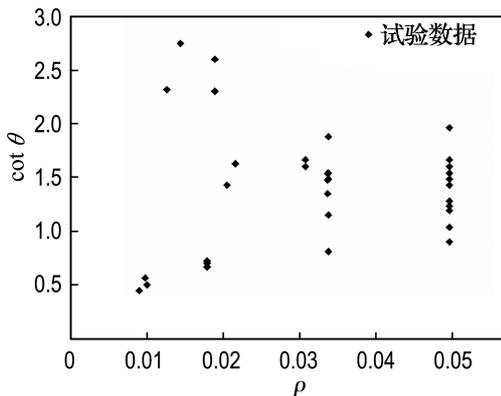


图3 $\cot \theta$ 与 ρ 关系

Fig. 3 $\cot \theta$ vs. ρ

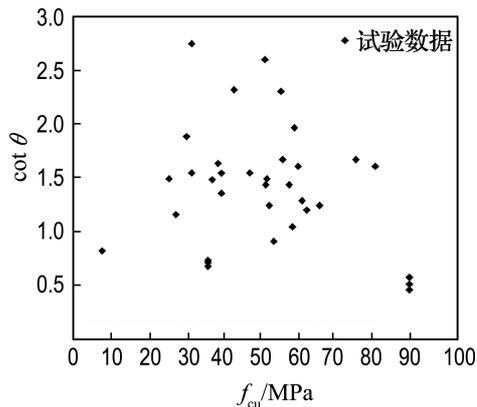


图4 $\cot \theta$ 与混凝土强度关系

Fig. 4 $\cot \theta$ vs. concrete strength

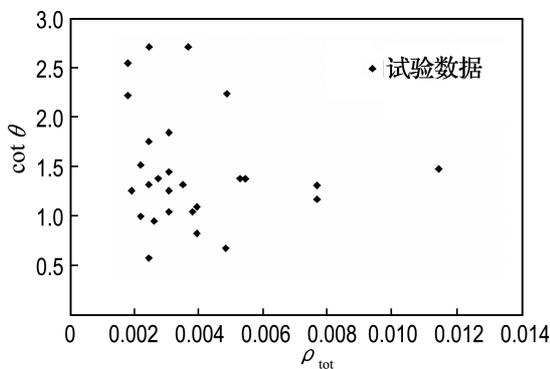


图5 $\cot \theta$ 与 ρ_{tot} 关系

Fig. 5 $\cot \theta$ vs. ρ_{tot}

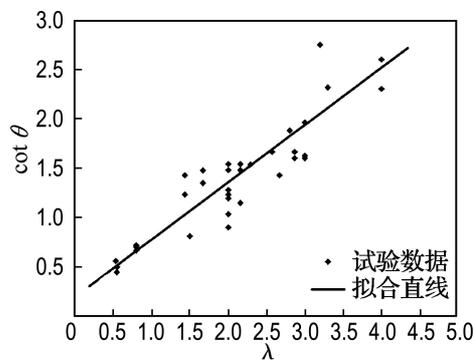


图6 $\cot \theta$ 与 λ 关系

Fig. 6 $\cot \theta$ vs. λ

4 结 论

(1)简单地假定钢筋混凝土梁的斜裂缝倾角为 45° ,给精确地分析箍筋和FRP的抗剪作用带来了一定的困难;由式(16)可以看到在 $\lambda \leq 1.38$ 时, $\cot \theta \leq 1$,假定将是偏于不安全的;当 $\lambda = 3.0$ 时, $\cot \theta = 1.94$,将有94%的安全储备,假定过于保守。寻找一个计算斜裂缝倾角的简单表达式是有必要的。

(2)由35根试验梁可以看到,斜裂缝倾角与混凝土强度、纵筋配筋率、配箍率和配布率的关系不大,其主要影响因素是剪跨比;其余切值与剪跨比呈现较好的线性关系。

(3)若采用程序计算分析梁的斜截面抗剪强度,式(14)具有一定的参考价值,与试验也较为吻合。

(4)式(16)的提出具有一般性,使用简单、可靠,适用于普通钢筋混凝土梁和经FRP加固的混

凝土梁,可为工程的实际应用提供设计依据。

参考文献:

- [1] BAKIR P G, BODURÖGLU H M. Mechanical behaviour and non-linear analysis of short beams using softened truss and direct strut & tie models[J]. **Engineering Structure**, 2005, **27**: 639-651
- [2] COLLINS M P, MITCHELL D. **Prestressed Concrete Structures**[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1991
- [3] CHEN J F, TENG J G. Shear capacity of fiber-reinforced polymer-strengthened reinforced concrete beams: fiber reinforced polymer rupture[J]. **Journal of Structural Engineering**, 2003, **129**(3): 615-625
- [4] CHEN J F, TENG J G. Shear capacity of FRP-strengthened RC beams: FRP debonding[J]. **Construction and Building Materials**, 2003, **17**: 27-41
- [5] ZARARIS P D, PAPADAKIS G C. Diagonal shear failure and size effect in RC beams without web reinforcement[J]. **Journal of Structural Engineering**, 2001, **127**(7): 733-742
- [6] 赵国藩,李树瑶,王清湘,等. 钢筋混凝土结构的裂缝控制[M]. 北京:海洋出版社,1991
- [7] 谭 壮,叶列平. 纤维复合材料布加固混凝土梁受剪性能的试验研究[J]. 土木工程学报,2003, **36**(11): 12-18
- [8] TRIANTAFILLOU T C. Shear strengthening of reinforced beams using epoxy-bonded FRP composites[J]. **ACI Structural Journal**, 1998, **95**(2): 386-394
- [9] CHAJES M J, JANUSKA T F, MERTZ D R, *et al.* Shear strengthening of reinforced concrete beams using externally applied composite fabrics[J]. **ACI Structural Journal**, 1995, **92**(3): 295-303
- [10] KHALIFA A, NANNI A. Improving shear capacity of existing RC T-section beams using CFRP composites[J]. **Cement & Concrete Composites**, 2000, **22**: 165-174
- [11] LI A, DIAGANA C, DELMAS Y. CFRP contribution to shear capacity of strengthened RC beams[J]. **Engineering Structure**, 2001, **23**: 1212-1220
- [12] YANG Keun-hyeok, CHUNG Heon-soo, LEE Eun-taik, *et al.* Shear characteristics of high-strength concrete deep beams without shear reinforcements[J]. **Engineering Structure**, 2003, **25**: 1343-1352
- [13] TÄLJSTEN B. Strengthening concrete beams for shear with CFRP sheets[J]. **Construction and Building Materials**, 2003, **17**: 15-26
- [14] FURLAN S Jr, DE HANNAI J B. Shear behaviour of fiber reinforced concrete beams[J]. **Cement & Concrete Composites**, 1997, **19**: 359-366
- [15] ISLAM M R, MANSUR M A, MAALEJ M. Shear strengthening of RC deep beams using externally bonded FRP systems[J]. **Cement & Concrete Composites**, 2005, **27**: 413-420
- [16] 李松辉. 碳纤维布加固桥梁的设计理论研究[D]. 大连:大连理工大学,2003

Theoretical and experimental analyses of critical shear angle of RC beam

ZHOU Ying-wu, WANG Su-yan, LI Hong-nan*

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Analyses of critical shear failure of normal reinforced concrete (RC) beams and fiber reinforced polymer (FRP)-strengthened concrete beams are commonly based on the assumption that the critical shear angle is 45° . However, this assumption may unavoidably bring some errors in the shear analysis. Therefore, an analytical study is carried out and the results indicate that the critical shear angle mainly depends on the shear span to effective depth ratio. Simultaneously, a series of 35 experimental beams are collected to further validate the analytical results. Based on these experimental data, a simple and credible expression of evaluating the critical shear angle is finally given out.

Key words: fiber reinforced polymer (FRP); shear analysis; critical shear angle; shear span to effective depth ratio; concrete beam