

一类无穷维 Hamilton 算子的可逆性

阿拉坦仓^{*1}, 侯国林¹, 韩胜菊²

(1. 内蒙古大学 数学系, 内蒙古 呼和浩特 010021;

2. 大连水产学院 电子与信息工程系, 辽宁 大连 116023)

摘要: 无穷维 Hamilton 算子来源于无穷维 Hamilton 系统, 它具有深刻的力学背景和应用前景. 利用空间分解的方法和分块算子矩阵技巧, 得到了一类无穷维 Hamilton 算子具有有界逆的充分必要条件, 并将所得结果与文献中的已有结果进行了比较. 最后举例验证了结果的正确性.

关键词: 无穷维 Hamilton 算子; 非负无穷维 Hamilton 算子; 可逆性

中图分类号: O175.3 **文献标志码:** A

0 引言

无穷维 Hamilton 算子一般为无界的非自伴算子, 它具有深刻的力学背景. 关于无穷维 Hamilton 算子的研究近年来比较活跃^[1~5]. 无穷维 Hamilton 算子来源于无穷维 Hamilton 系统. 对于无穷维 Hamilton 系统, 国内外很多学者都从不同的角度进行了研究, 如 Arnold、Ge'lfand、Lax、Olver^[6]、钟万勰^[7]、张鸿庆、郑宇、周建方等. 无穷维 Hamilton 系统研究的是连续统介质, 它与稳定问题、动力问题、弹性理论、复合材料力学、断裂问题等有关. 人们发现物理和力学中的许多偏微分方程(组)都可以化为无穷维 Hamilton 系统^[8~10]. 对无穷维 Hamilton 系统进行变量分离, 就可以得到无穷维 Hamilton 算子, 因此研究无穷维 Hamilton 算子的可逆性就显得非常重要.

文献[3]给出了非负无穷维 Hamilton 算子可逆的充分条件. 本文利用与文献[3]不同的方法研究更广的一类无穷维 Hamilton 算子的可逆性, 在主要结果证明过程中充分利用无穷维 Hamilton 算子的结构特性. 本文使用的方法对于与无穷维 Hamilton 算子有关的较复杂问题的研究具有一定的借鉴意义.

1 预备知识

设 X 是 Hilbert 空间, $L(X)$ 表示 X 中所有稠定闭线性算子全体构成的线性空间. 若 $T_1, T_2 \in L(X)$, 文中分别用 $D(T_1), R(T_1), N(T_1)$ 表示 T_1 的定义域、值域和零空间; $P_{\overline{R(T_2)}} T_1|_{N(T_2)}$ 表示线性算子 $P_{\overline{R(T_2)}} T_1|_{N(T_2)}: N(T_2) \cap D(T) \rightarrow \overline{R(T_2)}$. 用 I_X 表示 X 中的单位算子, 在不至于引起混淆的情况下, 简记为 I . 若 Π 是 X 中的闭子空间, 则 $\Pi^\perp$ 表示 Π 的正交补空间.

定义 1 设 X 是 Hilbert 空间, $\mathbf{H}: D(\mathbf{H}) \subset X \oplus X \rightarrow X \oplus X, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}$, 其中 A, B, C 均为 X 中的稠定闭线性算子, 且 A^* 为 A 的共轭算子, B, C 均为自伴算子, 则称 $\mathbf{H}$ 为无穷维 Hamilton 算子. 若 $D(\mathbf{H}) = X \times X$, 称 $\mathbf{H}$ 为有界无穷 Hamilton 算子. 特别地, 当 $C = 0$ 时称 $\mathbf{H}$ 为上三角型(有界)无穷维 Hamilton 算子.

定义 2 设 X 是 Hilbert 空间, $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}$ 是无穷维 Hamilton 算子, 若 B 与 C 还是非负有界的, 则称 $\mathbf{H}$ 为非负无穷维 Hamilton 算子.

收稿日期: 2006-03-03; 修回日期: 2008-02-18.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10562002); 内蒙古自然科学基金资助项目(200508010103); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20070126002); 内蒙古大学青年基金资助项目(ND0407); 内蒙古大学博士科研启动基金资助项目(2007).

作者简介: 阿拉坦仓^{*}(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 大连理工大学 1996 届博士, E-mail: alatanca@imu.edu.cn.

2 主要定理及证明

定理 1 设 X 是 Hilbert 空间, 有界无穷维 Hamilton 算子 $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}: X \oplus X \rightarrow X \oplus X$, $R(C)$ 闭, 则 $\mathbf{H}$ 可逆当且仅当

(i) $R(A)_1$ 闭, 且 $A|_{N(C)}$ 是单射;

(ii) $P_{R(A)^\perp} B|_{N(A^*)}$ 是满射, 即 $R(P_{R(A)^\perp} B|_{N(A^*)}) = R(A)^\perp$. 其中 $R(A)_1 = R(A|_{N(C)})$.

证明 在空间分解

$X \oplus X = N(C) \oplus N(C)^\perp \oplus N(A^*) \oplus N(A^*)^\perp \rightarrow X \oplus X = R(A)^\perp \oplus \overline{R(A)} \oplus R(C)^\perp \oplus R(C)$ 下, $\mathbf{H}$ 可表示为

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_1 & B_2 \\ A_1 & A_2 & B_2^* & B_4 \\ 0 & 0 & 0 & -A_1^* \\ 0 & C_4 & 0 & -A_2^* \end{pmatrix} \quad (1)$$

易知 $A_1 = P_{\overline{R(A)}} A|_{N(C)}$, $B_1 = P_{R(A)^\perp} B|_{N(A^*)}$. 由 $R(C)$ 闭, 知 C_4 作为 $N(C)^\perp \rightarrow R(C)$ 的线性算子是可逆的.

必要性 设 $\mathbf{H}$ 是可逆的. 为证 (i) 成立, 只需证明 A_1 是下有界的, 即对于任意的 $x \in N(C)$ 存在一个常数 $\delta > 0$ 使得 $\|A_1 x\| \geq \delta \|x\|$. 假设 A_1 不是下有界的, 由文献[11] 知, 存在序列 $\{x_n\} \subseteq N(C)$, $\|x_n\| = 1$ 满足

$$A_1 x_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

于是有

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & B_1 & B_2 \\ A_1 & A_2 & B_2^* & B_4 \\ 0 & 0 & 0 & -A_1^* \\ 0 & C_4 & 0 & -A_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 0$$

因为 $\mathbf{H}$ 是可逆的, 由上式得 $x_n \rightarrow 0$, 这与假设 $\|x_n\| = 1$ 相矛盾.

假设 (ii) 不成立, 则存在一个非零元 $z \in R(A)^\perp$, 使得对于任意的 $y \in N(A^*)$, $B_1 y = P_{R(A)^\perp} B|_{N(A^*)} y \neq z$, 故对于任意的 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X \oplus X$, 得到 $\mathbf{H} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}$, 这表明 $R(\mathbf{H}) \neq X \oplus X$, 这与 $\mathbf{H}$ 可逆相矛盾. 必要性证毕.

充分性 设条件 (i)、(ii) 成立. $\mathbf{H}$ 仍有式 (1) 的表示形式, 即

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_1 & B_2 \\ A_1 & A_2 & B_2^* & B_4 \\ 0 & 0 & 0 & -A_1^* \\ 0 & C_4 & 0 & -A_2^* \end{pmatrix}$$

其中 $A_1 = P_{\overline{R(A)}} A|_{N(C)}$, $B_1 = P_{R(A)^\perp} B|_{N(A^*)}$, B_1 是自伴算子且在条件 (i) 和 (ii) 下 A_1 , C_4 和 $-A_1^*$ 都可逆. 由于

$$N(B_1) \cap N(A^*) = R(B_1)^\perp \cap R(A)^\perp = \{0\}$$

B_1 也可逆.

下面首先证明 $R(\mathbf{H})$ 是闭的, 为此只需证明 $\mathbf{H}$ 是下有界的. 假设有 $x_n = x_n^1 + x_n^2$, $y_n = y_n^1 + y_n^2$, $x_n^1 \in N(C)$, $x_n^2 \in N(C)^\perp$, $y_n^1 \in N(A^*)$, $y_n^2 \in N(A^*)^\perp$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 y_n^1 + B_2 y_n^2 \\ A_1 x_n^1 + A_2 x_n^2 + B_2^* y_n^1 + B_4 y_n^2 \\ -A_1^* y_n^2 \\ C_4 x_n^2 - A_2^* y_n^2 \end{pmatrix} \rightarrow 0$$

结合 A_1 , C_4 和 $-A_1^*$ 的可逆性知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n^i \rightarrow 0$, $y_n^i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2$), 从而 $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$. 故 $\mathbf{H}$ 是下有界的, 于是 $R(\mathbf{H})$ 闭. 另外

$$\mathbf{H}^* = \begin{pmatrix} 0 & A_1^* & 0 & 0 \\ 0 & A_2^* & 0 & C_4 \\ B_1 & B_2 & 0 & 0 \\ B_2^* & B_4 & -A_1 & -A_2 \end{pmatrix}$$

易知 $N(\mathbf{H}^*) = \{0\}$. 由于 $X \oplus X = R(\mathbf{H}) \oplus N(\mathbf{H}^*)$, 知 $R(\mathbf{H}) = X \oplus X$, 而 $N(\mathbf{H}) = \{0\}$ 是显然的, 故 $\mathbf{H}$ 是可逆的. 充分性证毕.

注 1 若定理 1 中的条件成立, 则 $\mathbf{H}^{-1}$ 由如下矩阵表示:

$$\begin{pmatrix} -A_1^{-1} B_2^* B_1^{-1} A_1^{-1} & A_1^{-1} \Delta & -A_1^{-1} A_2 C_4^{-1} \\ 0 & 0 & -C_4^{-1} A_2^* (A_1^*)^{-1} & C_4^{-1} \\ B_1^{-1} & 0 & B_1^{-1} B_2 (A_1^*)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -A_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

其中

$$\Delta = (B_4 + A_2 C_4^{-1} A_2^* - B_2^* B_1^{-1} B_2) (A_1^*)^{-1}$$

注 2 在定理 1 的证明过程中充分地利用了无穷维 Hamilton 算子 $\mathbf{H}$ 对角元之间的关系及 $\mathbf{H}$ 的元素 (算子) B 的自伴性, 这个结果对一般的有界算子矩阵不成立 (见例 2), 这是无穷维 Hamilton 算子的特殊性所在.

定理 1 的结果可以推广到 $\mathbf{H}$ 为稠定闭线性算子情形, 即如下的定理 2.

定理 2 设 X 是 Hilbert 空间, 无穷维 Hamilton 算子 $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}: D(A) \oplus D(A^*) \subset X \oplus X \rightarrow X \oplus X$, 若 $R(C)$ 闭且 $P_{R(C)} C|_{N(C)^\perp}$ 具有有界逆, 则 $\mathbf{H}$ 具有有界逆当且仅当

(i)' $R(A)_1$ 闭, 且 $A|_{N(C)}$ 是单射;

(ii)' $P_{R(A)^\perp} B|_{N(A^*)}$ 是满射, 即 $R(P_{R(A)^\perp} B|_{N(A^*)}) = R(A)^\perp$. 其中 $R(A)_1 = R(A|_{N(C)})$.

推论 1^[3] 设 X 是 Hilbert 空间, $H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}: D(A) \oplus D(A^*) \subset X \oplus X \rightarrow X \oplus X$ 是非负无穷维 Hamilton 算子, 若算子 B, C 具有有界逆, 则 H 具有有界逆.

证明 由 C 具有有界逆, 则 $R(C)$ 闭且 $P_{R(C)} C|_{N(C)^\perp}$ 具有有界逆, 且 $A|_{N(C)}$ 是单射, $R(A)_1$ 闭; 再由 B 具有有界逆, 显然有 $P_{R(A)^\perp} B|_{N(A^*)}$ 是满射, 由定理 2 知, H 具有有界逆. 证毕.

推论 2 设 X 是 Hilbert 空间, $H_0 = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & -A^* \end{bmatrix}: D(A) \oplus D(A^*) \subset X \oplus X \rightarrow X \oplus X$ 是上三角形无穷维 Hamilton 算子, 则 H 具有有界逆当且仅当

(i) $R(A^*) = X$,

(ii) $P_{R(A)^\perp} B|_{N(A^*)}$ 是满射, 即 $R(P_{R(A)^\perp} B|_{N(A^*)}) = R(A)^\perp$.

证明 H_0 是定理 2 中 H 当 $C = 0$ 的情形. 在空间分解 $X \oplus X = X \oplus N(A^*) \oplus N(A^*)^\perp \rightarrow X \oplus X = R(A)^\perp \oplus \overline{R(A)} \oplus X$ 下, H_0 可表示为

$$\begin{bmatrix} 0 & B_1 & B_2 \\ A_1 & B_2^* & B_4 \\ 0 & 0 & -A_1^* \end{bmatrix}$$

其中 $B_1 = P_{R(A)^\perp} B|_{N(A^*)}$.

类似于定理 1 的证明, 可得 H_0 具有有界逆当且仅当 $R(A^*) = R(A_1^*) = X$, 且 B_1 是满射, 即 $R(P_{R(A)^\perp} B|_{N(A^*)}) = R(A)^\perp$. 证毕.

3 算例

例 1 设 $X = L^2[0, 2\pi]$, 无穷维 Hamilton 算子

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} & \frac{d^2}{dt^2} \\ \frac{d^2}{dt^2} + I & -\frac{d^2}{dt^2} \end{bmatrix}$$

$D(H) = D(A) \oplus D(A^*) = \{u \mid u' \text{ 绝对连续, } u' \in X, u(0) = u(2\pi) = 0\}$.

首先, 应用定理 2 来验证 H 的可逆性. 由于 $C = \frac{d^2}{dt^2} + I$, 易知 $R(C)$ 闭且 $N(C) = \{x \mid x = \omega \sin t, \omega \text{ 为任意实数}\}$, $P_{\overline{R(C)}} C|_{N(C)^\perp}$ 具有有界逆; $A = \frac{d^2}{dt^2}$ 在 $N(C)$ 上的限制是单射, 且 $R(A)_1$ 闭.

再者 $B = \frac{d^2}{dt^2}$ 在 $D(A^*)$ 上显然是可逆的, 故 $P_{R(A)^\perp} B|_{N(A^*)}$ 是满射, 由定理 2 知 H 具有有界逆.

下面用定义来判断 H 的可逆性. 对于任意的 $\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \in X \oplus X$, 若

$$H \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'' + v'' \\ u'' + u - v'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u'' + v'' = f \\ u'' + u - v'' = g \end{cases} \quad (2)$$

$$u(0) = u(2\pi) = v(0) = v(2\pi) = 0 \quad (3)$$

由式(2)得 $-v'' = u'' - f$, 代入式(3)并结合式(4)有

$$\begin{cases} u'' + \frac{1}{2}u = (f + g)/2 \\ u(0) = u(2\pi) = 0 \end{cases}$$

据常微分方程的有关理论可解得

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \sin \frac{1}{\sqrt{2}}(t-s)(f(s) + g(s))ds - \frac{\csc(\sqrt{2}\pi) \sin \frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin \frac{1}{\sqrt{2}}(2\pi-s)(f(s) + g(s))ds$$

由式(2) - 式(3)得 $2v'' - u = f - g$. 由式(2)得 $u = \int_0^t \int_0^r f(s)dsdr - v$, 将 u 代入到前面的方程中, 记

$$F(t) = f(t) - g(t) + \int_0^t \int_0^r f(s)dsdr$$

有

$$\begin{cases} 2v'' + \frac{1}{2}v = F(t)/2 \\ v(0) = v(2\pi) = 0 \end{cases}$$

从而得到

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \sin \frac{1}{\sqrt{2}}(t-s)F(s)ds - \frac{\csc(\sqrt{2}\pi) \sin \frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin \frac{1}{\sqrt{2}}(2\pi-s)F(s)ds$$

这表明 H 具有有界逆.

例 2 设 $X = l_2$, 对于任意的 $x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ \cdots) \in X$, 定义线性算子 A, B, C, D 分别为

$$Ax = (x_1 \ x_2 + x_3 \ x_2 \ x_3 \ \cdots),$$

$$Bx = (0 \ x_1 + x_3 \ x_2 + x_4 \ \cdots),$$

$$Cx = (0 \ x_2 + x_3 \ x_2 + x_3 \ x_4 \ x_5 \ \cdots),$$

$$D\mathbf{x} = (0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad \cdots)$$

$$\text{并记 } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}.$$

易知 $N(\mathbf{M}) \neq \{\mathbf{0}\}$, 这表明算子矩阵 $\mathbf{M}$ 是不可逆的. 事实上, 取 $\mathbf{x}_0 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots)$, $\mathbf{y}_0 = (-1 \quad -1 \quad 0 \quad \cdots)$, 可有 $\mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$, 故 $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix} \in N(\mathbf{M})$. 由算子 A 的定义, 知 $A^* \mathbf{y} = (y_1 \quad y_2 + y_3 \quad y_2 + y_4 \quad y_5 \quad y_6 \quad \cdots)$, 对于任意的 $\mathbf{y} = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots)$. 从而 $R(A)^\perp = N(A^*) = \{\mathbf{y} = (0 \quad y_2 \quad -y_2 \quad -y_2 \quad 0 \quad \cdots) \mid y_2 \text{ 任意}\}$, 故 $P_{R(A)^\perp} B \mid_{N(A^*)}$ 是满射; 类似地, 也有 $A \mid_{N(C)}$ 是单射. 进一步, $R(A)_1 = \{(x_1 \quad 0 \quad x_2 \quad -x_3 \quad 0 \cdots) \mid \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots) \in X\}$ 是 X 的闭子空间, 故定理 1 中的条件(i)和(ii)都满足, 但事先已经说明 $\mathbf{M}$ 是不可逆的, 原因在于 $\mathbf{M}$ 不具有类似于无穷维 Hamilton 算子的结构特性.

4 结 语

本文使用空间分解的方法得到了更广的一类无穷维 Hamilton 算子可逆的充分必要条件, 并且简练地证明了文献[3]中的一个主要结论是本文定理的推论. 值得一提的是, 在定理的证明过程中本文充分地利用了无穷维 Hamilton 算子的结构特性.

参考文献:

- [1] 阿拉坦仓, 黄俊杰. 一类无穷维 Hamilton 算子的谱分布[J]. 大连理工大学学报, 2004, 44(3):326-329

- (Alatancang, HUANG Jun-jie. Spectral distribution for a class of infinite dimensional Hamiltonian operators [J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2004, 44(3):326-329)
- [2] 侯国林, 阿拉坦仓. 一类缺项无穷维 Hamilton 算子的可逆补[J]. 南京理工大学学报, 2007, 31(2):261-264
- [3] KURINA G A. Invertibility of nonnegatively Hamiltonian operators in a Hilbert space [J]. *Differential Equations*, 2001, 37(6):880-882
- [4] AZIZOV T Y, DIJKSMA A, GRIDNEVA I V. On the boundedness of Hamiltonian operators [J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2002, 131(2):563-576
- [5] 侯国林, 阿拉坦仓, 黄俊杰. Hilbert 空间线性二次最优控制问题中的一个算子的可逆性[J]. 数学学报, 2007, 50(2):473-480
- [6] OLVER P J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations* [M]. New York: Springer-Verlag, 1986
- [7] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995
- [8] 阿拉坦仓, 张鸿庆, 钟万勰. 一类偏微分方程的无穷维 Hamilton 正则表示[J]. 力学学报, 1999, 31(3):347-357
- [9] 郑 宇, 张鸿庆. 固体力学中的 Hamilton 正则表示[J]. 力学学报, 1996, 28(1):119-125
- [10] 阿拉坦仓, 张鸿庆, 钟万勰. 矩阵多元多项式的带余除法及其应用[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(7):661-668
- [11] CONWAY J B. *A Course in Functional Analysis* [M]. New York: Springer-Verlag, 1990

Invertibility for a class of infinite dimensional Hamiltonian operators

Alatancang^{*1}, HOU Guo-lin¹, HAN Sheng-ju²

(1. Department of Mathematics, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China;

2. School of Electronic and Information Engineering, Dalian Fisheries University, Dalian 116023, China)

Abstract: The infinite dimensional Hamiltonian operator comes from the infinite dimensional Hamiltonian system, which has deep mechanic background and applied foreground. In this note, the sufficient and necessary condition of bounded invertibility for a class of infinite dimensional Hamiltonian operators is obtained by using space decomposition and block operator matrices. Moreover, the result is compared with the documentary results. At last, the validity of this result is shown by several test examples.

Key words: infinite dimensional Hamiltonian operator; non-negatively infinite dimensional Hamiltonian operator; invertibility