

超磁致伸缩执行器动力学模型及数值模拟

贾振元*, 王晓煜, 王福吉

(大连理工大学 精密与特种加工教育部重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 为提高超磁致伸缩执行器的控制精度, 实现亚微米级的驱动与控制, 准确描述执行器的动力学特性是关键环节之一. 为建立超磁致伸缩执行器的动力学特性的数学模型, 将 Terfenol-D 棒作为粘弹性杆连续系统, 将 Terfenol-D 棒在磁场驱动下产生的应变等效为磁-机械转换等效力, 建立了执行器系统的一维波动方程, 并采用有限元解法求解. 模型的计算求解采用迭代方法, 易于实现计算机控制. 利用 Matlab 7.0 对不同频率等幅磁场驱动下 Terfenol-D 棒内的磁场-位移 ($H-u$) 曲线进行数值模拟仿真, 仿真计算值与实验值误差在 10% 以内, 表明建立的动力学模型能较好地反映超磁致伸缩执行器的动力学特性.

关键词: 粘弹性杆; Terfenol-D; 动力学模型; 有限元法

中图分类号: TG156 **文献标志码:** A

0 引言

超磁致伸缩执行器具有高能量密度、宽工作频率范围、快速响应、驱动容易且负荷能力强等优异特性, 可广泛应用于精密定位控制、水声换能、减震控制及主动振动控制等场合. 由于超磁致伸缩材料的滞回和非线性特性, 必须对超磁致伸缩执行器实施闭环控制策略来提高控制精度, 执行器数学模型的建立是决定闭环控制是否准确、快速、有效可靠的重要环节.

执行器数学模型的建立多直接采用材料的磁化过程模型作为执行器的动态或静态模型. Hall 建立了超磁致伸缩执行器的线性振动模型^[1], 他将磁致伸缩棒视为线性弹簧, 建立了执行器在复频域中的阻抗模型, 描述了耦合系数、负载磁导率的变化. Dapino 等采用结构-磁应变耦合模型从能量角度对超磁致伸缩执行器建立了完整的模型^[2]. Tan 等将 Preisach 算子耦合到常微分方程组中, 建立了超磁致伸缩执行器的动态 Preisach 模型, 证明了周期解的存在性, 并给出了参数辨识方法和模型的适定范围^[3~5]. Zhang 等从磁弹性结构力学角度, 运用瑞利磁化曲线, 描述并建立了

超磁致伸缩棒的本构关系模型^[6]. 由于超磁致伸缩材料本身的非线性特性, 材料特性易受环境影响, 加之铁磁材料磁化过程的复杂性, 仅根据其磁化过程建立起的数学模型大都繁冗或精度较差. 若将执行器应用于精密定位与精密控制场合, 必须采用闭环控制策略, 提高执行器的控制精度.

为提高模型精度, 易于实施闭环控制策略, 将磁化模型与动力学模型分别建立, 两部分同时采用闭环形式, 并针对模型值与实际值的误差实施逆补偿, 这样可有效提高模型控制精度. 本文研究分立建模方法, 并进行数值仿真和实验验证.

1 自感知型超磁致伸缩执行器结构动力学分析

1.1 振动方程的建立

超磁致伸缩执行器从结构动力学角度可以分为两部分, 一部分是超磁致伸缩棒受磁场磁化, 产生轴向长度方向上的应变, 称其为主动应变部分; 而执行器的预紧机构, 通常由普通弹簧、碟片弹簧、膜片弹簧, 或是弹性膜片等弹性元件, 以及位移传递机构、底座等产生的应变, 为被动应变部分. 整个动力学系统的运动过程是由外部磁场作

收稿日期: 2006-07-15; 修回日期: 2008-03-15.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50775021); 辽宁省科学技术基金资助项目(20032121); 新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-04-0265).

作者简介: 贾振元* (1963-), 男, 教授, 博士生导师.

为激励源,通过磁致伸缩棒的伸长缩短来引起整个系统的受迫振动.系统的动力学简图可描述为图 1.

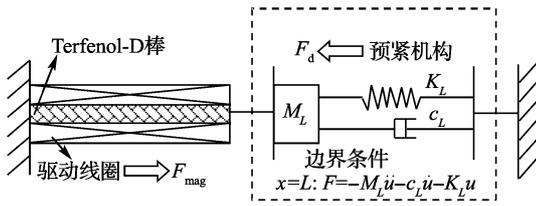


图 1 超磁致伸缩执行器动力系统简图

Fig. 1 Dynamics system of giant magnetostrictive actuator

对于 Terfenol-D 棒,假设其为等截面均质的粘弹性材料,在整个动力学系统中, Terfenol-D 棒既作为主动应变部件,自身沿轴向伸长缩短;同时本身也是弹性体,受预紧机构及外部应力的影响产生应变.为了简化动力学分析,假设外磁场提供的能量等效为外部力,称其为磁-机械转换等效力;同时也将棒的内部受力等效为外部力.将 Terfenol-D 棒视为受外部应力作用的均质连续粘弹性棒材.视棒材具有 Kelvin-Voigt 阻尼.提取 Terfenol-D 棒的一个小微元做受力分析,如图 2 所示.小段的左右两端的纵向位移分别为 \$u(x, t)\$ 与 \$u(x + dx, t)\$, 两者的差即为小段的纵向伸长量:

$$\delta = u(x + dx, t) - u(x, t) = u(x, t) + (\partial u(x, t) / \partial x) dx - u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx \quad (1)$$

伸长量除以这一小段的原来长度 \$dx\$, 即得到该小段的应变 \$\epsilon = \partial u(x, t) / \partial x\$. Terfenol-D 棒在该截面上的作用力为在该截面上所受粘弹性力, 满足下式

$$F = \sigma A = (Y^M \epsilon + c_D \dot{\epsilon}) A \quad (2)$$

式中: \$A\$ 为棒材的横截面积, \$Y^M\$ 为弹性模量, \$c_D\$ 为阻尼系数, \$\epsilon\$ 为应变. 在棒作伸缩运动时, 棒材还受到磁-机械转换等效力和预紧机构提供的预紧

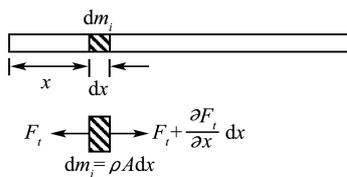


图 2 Terfenol-D 棒的连续系统简图

Fig. 2 Continuous system of Terfenol-D rod

力两部分的合力,因此,将 \$\epsilon = \partial u(x, t) / \partial x\$ 代入式(2)可得在任一时刻、任一截面上 Terfenol-D 棒所受的动力学力为

$$F_t(t, x) = Y^M A \frac{\partial u}{\partial x} + c_D A \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - F_{mag} + F_d \quad (3)$$

对小段质量列出动力学方程即为

$$F_t + \frac{\partial F_t}{\partial x} dx - F_t = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

其中 \$\rho\$ 为材料密度, \$F_t\$ 为棒材横截面上受静态力与动态力的总和, \$F_{mag}\$ 为磁-机械转换等效力, \$F_d\$ 为预紧机构提供的预紧力与外负载的总和. 将式(4)两边同时除以 \$dx\$, 则得到描述弹性杆纵向振动的运动方程

$$\frac{\partial F_t}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5)$$

在铁磁理论中,当外部应力引起的磁晶各向异性占主导地位时, \$F_{mag}\$ 可由式(6)表示,即为铁磁学中提到的二次畴转模型. 如果使用更通用的表示方法,在磁致伸缩棒受压力不太大时,磁晶各向异性不由压应力主导时可应用更一般的表达式,由方程(7)确定^[2].

$$F_{mag} = \frac{3}{2} Y^M \lambda_s (M / M_s)^2 \quad (6)$$

$$F_{mag} = Y^M (\gamma_1 M^2 + \gamma_2 M^4) \quad (7)$$

1.2 执行器系统的初、边值条件

假设 Terfenol-D 棒是均质等截面积的粘弹性材料. 因此,在执行器工作时, Terfenol-D 棒的运动即为一维连续粘弹性棒的振动. 一维连续粘弹性棒的结构动力学方程可由达朗贝尔(D'Alembert)原理建立^[7], 即满足一维波动方程,边界条件为左端固定,右端通过弹簧与固定点相连,外部强迫受力由外部驱动磁场和负载力联合决定. 此处由于只关心动力学系统而非磁化模型,忽略磁-机械转换等效力的非线性转化过程,取磁致伸缩磁场与位移曲线的线性段,以线性转化代替,则有 \$M = \mu_r H\$. 其中 \$\mu_r\$ 为相对磁导率, \$H\$ 为外磁场. 取 \$H = \sin(2\pi\omega t)\$ 和一端部恒定载荷 \$F_d = F_0\$ 预紧力. 建立 Terfenol-D 棒的偏微分方程及初、边值条件如方程(8). \$c_L\$ 为外部预紧机构的结构阻尼, \$K_L\$ 为预紧结构刚度. 所建立的一维波动方程不是标准形式,难求其解析解,因此只能求其数值解. 对波动方程求数值解的方法可采用差分法、有限元法等数值方法,在此处采用有限元法求解.

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial F_t}{\partial x} \\ F_t = Y^M A \frac{\partial u}{\partial x} + c_D A \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \\ \quad F_{\text{mag}} + F_d \\ F_{\text{mag}} = \frac{3}{2} Y^M \lambda_s \left(\frac{\mu_r H}{M_s} \right)^2 \\ t = 0; u = 0, \dot{u} = 0 \\ x = 0; u = 0 \\ x = L; F_t = -M_L \ddot{u} - c_L \dot{u} - K_L u \end{cases} \quad (8)$$

2 模型的有限元数值模拟

有限元法是一种将连续系统离散化的方法. 此法是将研究对象划分成一些既不重叠又无缝隙的微小区域. 它是选择各单元的交接点, 即“节点”上的位移为广义坐标, 以内插法由节点位移计算单元内部任一点的位移. 假定位移 $u(x, t)$ 与各节点位移 $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$ 之间具有最简单的线性关系, 即

$$u(x, t) = \phi_1 u_1(t) + \phi_2 u_2(t) \quad (9)$$

式中: ϕ_1 、 ϕ_2 为线性系数, 对于单元内不同的点, 这些系数应该不同, 因此它们都应该是 x 的函数, 于是对所有的单元来说, 有

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i(t) \quad (10)$$

式中的 $\phi_1(x)$ 、 $\phi_2(x)$ 既是线性插值系数又是位置的函数, 因此称为形函数. $u_i(t)$ 为节点位移. 采用有限元法对偏微分方程(8)进行求解, 为了方便计算设节点基函数为有限元方程的空间基函数, 并设试探函数等于基函数. 节点基函数的插值形式示意图如图 3, 定义节点基函数为式(11).

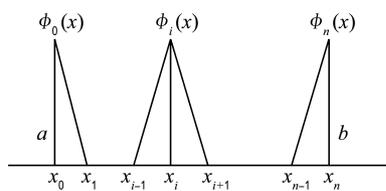


图 3 节点基函数示意图

Fig. 3 Sketch map of node basic function

为了利用有限元法求取偏微分方程的解, 首先建立方程(8)的虚功方程. 在利用有限元法求解上面波动方程(8)时, 需要对上面的高阶导数项(这里是 2 阶)进行降阶变成虚功方程弱形式后再计算. 一般采用分部积分公式来进行降阶处理, 然后试取方程的弱形式, 最后叠加求解. 求解的偏微分方程的弱形式如式(12).

$$\begin{cases} \phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}; & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h}; & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0; & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \\ i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{h}; & x \in [x_0, x_1] \\ 0; & x \notin [x_0, x_1] \end{cases} \\ \phi_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{h}; & x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0; & x \notin [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \end{cases} \quad (11)$$

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \phi(x) dx = - \int_0^L \left[EA \frac{\partial u}{\partial x} + c_D A \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - F_{\text{mag}} + AF \right] \cdot \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} dx - \left[K_L u(t, L) + c_L \frac{\partial u}{\partial t}(t, L) + m_L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, L) \right] \phi(L) \quad (12)$$

将方程(10)代入方程(12), 则可将系统方程化为

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \ddot{u}_i(t) \int_0^L \rho A \phi(x_i)^2 dx + \ddot{u}_N(t) \phi(x_n)^2 M_L - \\ & \sum_{i=1}^N \dot{u}_i(t) \int_0^L c_D A \dot{\phi}(x_i)^2 dx + \dot{u}_N(t) \phi(x_n)^2 c_L + \\ & \sum_{i=1}^N u_i(t) \int_0^L Y^M A \dot{\phi}(x_i)^2 dx + u_N(t) \phi(x_n)^2 K_L = \\ & \int_0^L (-F_{\text{mag}} \phi'_i + F_d \phi_i) dx \end{aligned} \quad (13)$$

因此原偏微分方程可简化为矩阵常微分方程(14). f_{mag} 和 f_d 分别表示磁等效力和外部负载等效力. 产生的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵为式(15)、(16)、(17), 外部驱动力的有限元计算为式(18).

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = -\mathbf{f}_{\text{mag}} + \mathbf{f}_d \quad (14)$$

$$\mathbf{M} = \frac{L \rho A}{3N} \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 + \frac{3N}{L \rho A} M_L \end{pmatrix}_{N \times N} \quad (15)$$

$$\mathbf{C} = \frac{N c_D A}{L} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 + \frac{L}{N c_D A} c_L \end{pmatrix}_{N \times N} \quad (16)$$

$$\mathbf{K} = \frac{N Y^M A}{L} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 + \frac{L}{N Y^M A} K_L \end{pmatrix}_{N \times N} \quad (17)$$

$$-\mathbf{f}_{\text{mag}} + \mathbf{f}_d = \int_0^L (-F_{\text{mag}} \phi'_i + F_d \phi_i) dx \quad (18)$$

为求解二阶微分方程(14), 将二阶微分方程

降阶化为一阶微分方程组(19)：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (19)$$

其中 $x = (u \quad \dot{u})^T$ ，矩阵 A 为特征矩阵，矩阵 B 包含了外部磁弹性力和预紧力的总和。其中矩阵 A 、 B 如式(20)。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(-f_{mag} + f_d) \end{bmatrix}$$

求解式(19)时为了满足实时性要求，采用较简单具有 A 稳定性，且精度适中的梯形法求解，此方法对系统内存容量需求最小，标准的梯形差分法满足迭代公式(21)

$$x_{k+1} = \left[I - \frac{\Delta t}{2}A \right]^{-1} \left[I + \frac{\Delta t}{2}A \right] x_n + \left[I - \frac{\Delta t}{2}A \right]^{-1} \frac{\Delta t}{2}(B_k + B_{k+1}) \quad (21)$$

3 模型验证

利用 Matlab 7.0 编写了有限元法解波动方程的求解程序，对系统的动力学过程进行了数值仿真，同时利用本实验室开发的超磁致伸缩执行器作测试实验，分别对不同驱动频率下超磁致伸缩执行器动态过程的仿真值和实验值进行了对比分析。

在计算仿真程序中取参数如下：有限单元数 $N=32$ ，时间区间 $t=0\sim 5$ s， $L=89$ mm， $Y^M=60$ GPa； $c_D=3 \times 10^6$ ； $\rho=9\ 250$ kg/m³； $A=0.000\ 127$ m²； $M_L=0.5$ kg； $c_L=10^3$ ； $K_L=2 \times 10^6$ ； $\Delta t=0.000\ 1$ s； $H=10^4+5 \times 10^3 \sin(2\pi\omega t)$ A/m。

实验室中超磁致伸缩执行器的相关实验参数如下：Terfenol-D棒长 89 mm，外负载 0.5 kg，驱动线圈匝数 1 500 匝，对驱动线圈施加直流偏置电流 3 A，正弦交变电流幅值 3 A。执行器端部位移检测使用 MicrotrakII 激光测位移量测，数据采集由 TDS3012 数字示波器完成，采集后的数据通过 RS232 口导入计算机。由于作微进给、微位移应用场合中角频率多为 6 000 r/min 以下，分别取 $\omega=1, 5, 10, 20, 50, 80, 100$ Hz 进行对比分析。

在数值模型和验证实验中，其实验结果与仿真结果的比较如图 4。图中由实线包络的曲线是实验数据，空心圆点包络的曲线为计算数据。在实验值中因数值模拟是从位移为 0 开始，所以会存在一条由初始 0 位置引出的长线；而实验值采集的是执行器进入稳态后的轨迹，因此没有从 0 位置到达稳态的过渡长线。从实验数据与计算结果的比较来看，实验数据与计算结果吻合得较好，仅在 80 Hz 频率下工作误差大约为 10%，其他频率下的误差都低于 10%。由比较结果可见，计算结果在 1 Hz 驱动频率下的包络面积小于实验数据包络的面积，在 5、10、20、50 Hz 频率驱动下，低磁场部分吻合得较好，高磁场部分实验曲线包络的滞回曲线变尖，认为是由于 ΔE 效应引起动力学系统弹性模量改变，弹性模量随驱动磁场的增加而变大。在 80、100 Hz 频率驱动下，实验曲线包络的面积大于计算曲线包络的面积，认为是由于系统的瑞利阻尼发生变化，瑞利阻尼的变化也是由棒的弹性模量变化引起的，因阻尼变大，能量损耗就会变大，就表现为实验曲线包络的面积也会

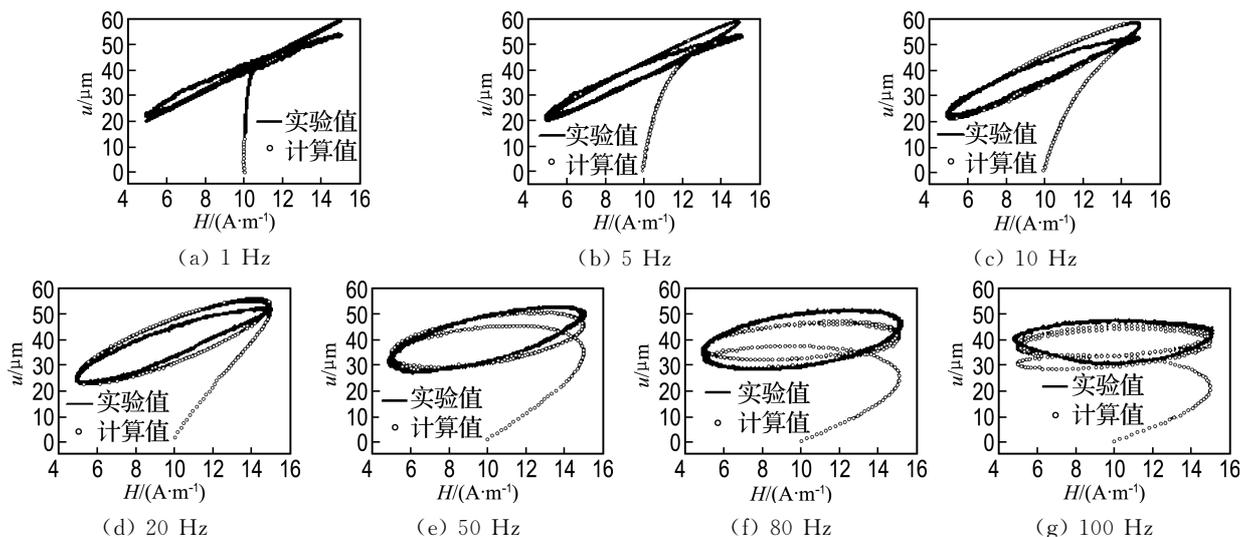


图 4 不同频率外磁场驱动下计算模型与实验数据比较图

Fig. 4 Comparison between calculated and experimental data under different frequency magnetic field

随之变大,误差的引起还被认为是由于磁化模型建模在此处被采用线性近似,因为在实验中对执行器施加的磁场并不大,因此磁化模型的非线性特性及滞回特性并不大,可以近似认为驱动磁场与磁致伸缩满足线性压磁方程.但磁化过程中的非线性及滞回特性是必然存在的,因此会将误差代入模型中.

从数据的比较来看,计算模型在低于 100 Hz 频率范围内还是能较好地反映系统的动态特性.超磁致伸缩执行器在应用于微加工、微定位等场合时多工作在此频段内.如果对超磁致伸缩执行器应用基于模型的控制策略,例如模型参考自适应控制、鲁棒控制、最优化控制等,将系统中弹性模量的变化引入模型,同时引入较为精确的非线性磁化模型,这样会缩小执行器预期轨迹与实际轨迹的偏差,完全可以大幅提高超磁致伸缩执行器的控制精度.

4 结 论

(1) 磁致伸缩材料的 ΔE 效应、弹性模量会随着外负载和驱动磁场的变化而变化,随着驱动磁场的增加,材料的弹性模量会增加,在低频下表现为包络的曲线变尖,高频下表现为包络曲线面积增大是因为低频下弹性模量增加,刚度变硬,曲线变尖,高频下弹性模量增大,阻尼增大,阻尼力增大,引起能量损失增加.

(2) 磁致伸缩材料的磁化模型应采用考虑滞回和非线性的模型,但在磁场变化范围不大、磁致

伸缩棒工作在线性区内,和对位移精度要求不太高的场合可采用线性模型近似.

(3) 在 50 Hz 以上频率磁场驱动下,由于材料的粘弹性特性,会出现蠕动、松弛等特性.在今后的建模中应给予考虑.

参考文献:

- [1] HALL D L. Dynamics and vibrations of magnetostrictive transducers [D]. Iowa: Iowa State University, 1994
- [2] DAPINO M J, SMITH R C, FLATAU A B. An active and structural strain model for magnetostrictive transducers [C] // **Proceedings of SPIE: Smart Structures and Materials**. San Diego: SPIE, 1998: 198-209
- [3] TAN Xiao-bo, BARAS J S. Control of actuators: A viscosity solutions approach [R] // Technical Report TR2001-39. Maryland: Institute for Systems Research, University of Maryland at College Park, 2001
- [4] 黄文美, 王博文, 闫荣格, 等. 超磁致伸缩执行器有限元动态模型的研究[J]. 河北工业大学学报, 2004(5): 1-5
- [5] 曹淑英. 超磁致伸缩致动器的磁滞非线性动态模型与控制技术[D]. 天津: 河北工业大学, 2004
- [6] ZHANG X J, LIU X E. A nonlinear constitutive model for Terfenol-D rods [J]. **Journal of Applied Physics**, 2005, **97**: 053901
- [7] 师汉民. 机械振动系统——分析·测试·建模·对策(下册): 第2版[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2004

Dynamics model and numerical simulation of giant magnetostrictive actuator

JIA Zhen-yuan*, WANG Xiao-yu, WANG Fu-ji

(Key Laboratory for Precision and Non-traditional Machining Technology of Ministry of Education, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: An accurate dynamics model is crucial to enhance the control accuracy and implement the submicron control for the giant magnetostrictive actuator. To describe the dynamics characteristics of the giant magnetostrictive actuator precisely, a dynamics model is presented. Regarding Terfenol-D rod as a viscoelastic rod continuous system and treating the induced strain by external magnetic field as equivalent force, a one-dimension wave equation for the actuator is built. The solution of the equation by finite element method is given with the iterative method. The model is easy to utilize for the real-time implementation. It provides the experimental data and numerical simulated data calculated with Matlab 7.0 by magnetic field versus displacement ($H-u$) curves under the different frequencies and the same magnetic field drive level. The simulated and experimental results with the error within 10% indicate the validity of the model.

Key words: viscoelastic rod; Terfenol-D; dynamics model; finite element method