

基于 SBFEM 的多裂纹问题断裂分析

刘 钧 玉, 林 皋*, 杜 建 国

(大连理工大学 土木水利学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 多裂纹问题中的应力强度因子是断裂力学中需要计算的重要参数. 在子结构法思想的基础上利用比例边界有限元法计算了弹性多裂纹问题的 I 型裂纹应力强度因子. 对于多裂纹的弹性问题根据裂纹的数目确定相似中心的数目, 在每一个子块内保持比例边界有限元法的特点. 利用该数值技巧可以求解任意多裂纹问题的应力强度因子, 数值算例表明该方法是有效且精确的. 最后给出了正交各向异性材料双边非对称裂纹问题的计算结果, 进而推广了比例边界有限元法的应用范围.

关键词: 断裂力学; 应力强度因子; 多裂纹问题; 比例边界有限元法; 正交各向异性材料

中图分类号: O346.1; O241 **文献标志码:** A

0 引 言

具有嵌入几何奇异性(如裂纹、不同材料接点、缺口等)弹性体的应力分析是工程应用中一个十分重要的问题; 许多复杂的工程要求精确地确定奇异参数如弹性断裂力学中的应力强度因子. 由于解析方法只能求解规则形状、简单荷载作用的问题, 大部分实际问题都需要利用数值方法进行求解. 最普遍的求解应力强度因子的方法是有限元法、边界元法、比例边界有限元法、边界配置法等, 此外还可利用有限元法和无限元法联合求解^[1].

比例边界有限元法集合了有限元法和边界元法的特点, 该方法只需用有限元离散部分边界, 从而实现了将问题降低一维的目的, 在计算应力强度因子时, 对于裂纹面通过相似中心的裂纹不需要离散裂纹面, 减少了计算量. 此外, 比例边界有限元法是建立在有限元法基础上的, 所以不需要基本解而且由于其计算的结果在径向是完全精确的, 在环向收敛于有限元意义的精确解, 使得裂纹尖端的应力强度因子可直接根据定义计算. 因此, 目前比例边界有限元法已经被应用于计算各向异性材料^[2]、温度应力作用下的应力强度因子^[3]、动

应力强度因子^[4]及裂纹和多材料角的 T-应力和平面奇异应力场的高阶奇异条件^[5]. 本文基于子结构法思想利用比例边界有限元法求解弹性多裂纹问题的应力强度因子, 并与解析解和文献中可获得的计算结果进行对比.

1 比例边界有限元法的基本方程

比例边界有限元法将在频率域内以位移表达的弹性动力偏微分方程(1)转换为常微分方程形式比例边界有限元方程(2), 可以解析地求解.

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} + \omega^2 \rho \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\mathbf{E}^0 \xi^2 \mathbf{u}_{,\xi\xi}(\xi) + ((s-1)\mathbf{E}^0 - \mathbf{E}^1 + \mathbf{E}^{1T}) \xi \mathbf{u}_{,\xi}(\xi) + ((s-2)\mathbf{E}^{1T} - \mathbf{E}^2) \mathbf{u}(\xi) + \mathbf{F}(\xi) = \mathbf{0} \quad (2)$$

上述式(1)中部分参数如图1所示. 式中和图中 V 为研究区域; ρ 为质量密度; $\mathbf{p}$ 为体荷载; $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力; $\mathbf{L}$ 为微分算子; s 为维数; S_u 为位移边界; S_l 为荷载边界. 在边界上的节点位移和节点力用 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{R}$ 表示. 由于裂纹面为通过相似中心的射线(图2), 不需要离散. 当裂纹面上有边界力作用在 A_u 、 A_l 上或是计算域内有体积力 $\mathbf{p}$ 作用时, 其边界节点力平衡方程如下:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{R}^F \quad (3)$$

收稿日期: 2006-07-15; 修回日期: 2008-03-17.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(重点项目 90510018); 教育部创新团队资助项目(IRT0518).

作者简介: 刘钧玉(1978-), 男, 博士生, E-mail: liujunyu2003@yahoo.com.cn; 林 皋* (1929-), 男, 教授, 博士生导师, 中国科学院院士.

其中 $\mathbf{K}$ 为静刚度矩阵, $\mathbf{R}^F$ 是用比例边界有限元法确定的体荷载或面荷载产生的节点荷载. 引入边界条件 S_u 和 S_t , 可确定研究区域边界所有节点的位移 $\mathbf{u}$ 和节点力 $\mathbf{R}$. 进而用比例边界有限元法计算内部点的位移及应力. 文献[6、7] 给出了比例边界有限元法的详细描述.

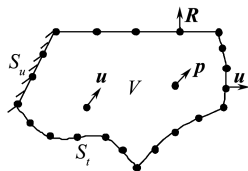


图1 问题的定义及边界有限元网格

Fig. 1 Problem definition and discretization on boundary

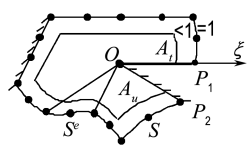


图2 相似中心和径向坐标的特殊选择

Fig. 2 Special choice of scaling center and radial coordinate

体荷载及面荷载作用(图2)对方程(2)的贡献为^[8]

$$\mathbf{F}(\xi) = \xi^2 \mathbf{F}^b(\xi) + \xi \mathbf{F}^t(\xi) \quad (4)$$

由式(2)可以解析地求解裂纹尖端的位移场和应力场, 这给应力强度因子的计算带来很大方便.

2 子结构分块

对于多裂纹问题可利用子结构法进行分块(图3), 在各分块中将相似中心选在裂纹尖端. 同样不需要离散裂纹面. 分别对各个子结构区域进

行离散, 然后进行整体求解, 在每一个子结构内保持 SBFEM 解析解的特点.

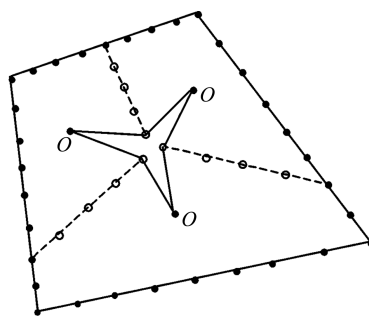


图3 多裂纹问题分块

Fig. 3 Subdivision into sub-domains for multiple interior cracks

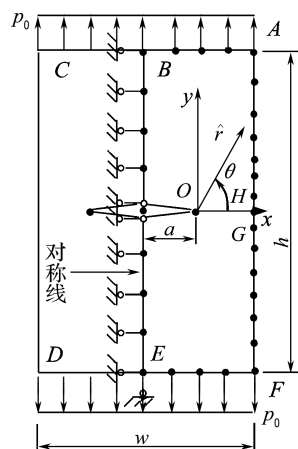
3 数值算例

3.1 中心裂纹拉伸问题

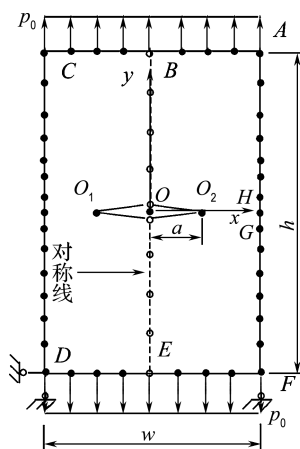
一宽为 w , 高为 h 的板有一 $2a$ 长的中心裂纹通过, 在板端受均匀拉力. 利用对称性取板 ACDF 的一半 ABEF 进行计算, 如图4, 图4(a)为网格离散示意图, 实际离散时采用33个三节点线单元, 其中 AB、EF 段分别为2个单元; BE 段共14个单元; AH、GF 段共14个单元, 单元长度比(最大单元与最小单元长度之比)为2; GH 段1个单元. 对于 I 型的应力强度因子的计算式为

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{\hat{r} \rightarrow 0} (\sqrt{\hat{r}} \sigma_y(\hat{r}, \theta = 0)) \quad (5)$$

其中极坐标的 $\hat{r}, \theta$ 的原点取在裂纹尖端. K_I 用 $K_a = p_0 \sqrt{\pi a}$ 进行量纲一化, p_0 为板端所受均布力. 计算结果见表1.



(a) 1个中心



(b) 2个中心

图4 中心裂纹拉伸问题网格示意图

Fig. 4 Central crack in tensile strap and its boundary discretization

表 1 中心裂纹拉伸问题本文结果与解析解的比较

Tab. 1 Comparison of results in this paper with those of analytical solution for the central crack in tensile strap

a/w	$K_I/(p_0\sqrt{\pi a})$			
	文本结果 (图 4(a))	文献[1] (IEM)	解析解 ^[9]	差值/%
0.05	1.022 70	1.059 084	1.011 45	1.11
0.10	1.028 48	1.071 472	1.026 28	0.21
0.20	1.112 86	1.146 188	1.102 72	0.92

如图 4(b)将板分成两块,取两个相似中心 O_1 、 O_2 进行计算. 两块采用同样的离散网格分别为 33 个三节点线单元. 计算结果见表 2.

表 2 中心裂纹拉伸问题本文结果与解析解的比较
(子结构法)

Tab. 2 Comparison of results in this paper with those of analytical solution for the central crack in tensile strap (by the subdivision)

a/w	$K_I/(p_0\sqrt{\pi a})$			
	文本结果 (图 4(b))	文献[1] (IE-FE)	解析解 ^[9]	差值/%
0.05	1.021 97	1.018 672	1.011 45	1.04
0.10	1.028 05	1.027 433	1.026 28	0.17
0.20	1.105 10	1.102 886	1.102 72	0.21

对比结果表明分块后的比例边界有限元的计算结果与解析解非常接近,最大误差不超过 2%.

3.2 双边不等长裂纹问题

一宽为 $2b$,高为 $2h$ 的板,具有 a_1 和 a_2 长的双

边裂纹,在板端受均匀拉力如图 5 所示. 将板分成两块,取两个裂纹尖端为相似中心 O_1 、 O_2 . 实际划分时每块采用 71 个三节点线单元进行离散,AB、EF 段分别为 5 个单元;AI、FJ 段分别为 15 个单元,单元长度比为 2.5;BE 段为 31 个单元,单元长度比为 2.5. 应力强度因子计算式见式(5),并对其量纲一化. 取 $h/b=3$ 进行计算. 对该类问题并没有找到解析解进行对比,只找到奇异缩减法(subtraction of singularity(SST) method)的计算结果与本文进行对比. 对比结果见表 3.

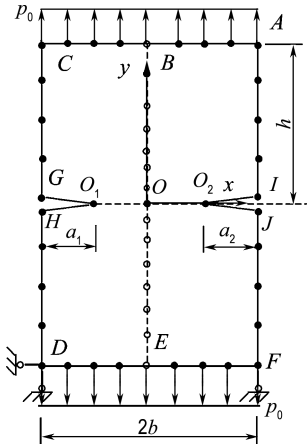


图 5 双边不等长裂纹问题网格示意图

Fig. 5 The problem of unequal double-edged cracks and its boundary discretization

本文结果与奇异缩减法的结果差值百分比不超过 4%,说明本文方法是高精确的.

表 3 本文结果与奇异缩减法(SST)的比较

Tab. 3 Comparison of results in this paper with those from the SST method

a_1/b (相似中心 O_1)	本文结果	文献[10]	差值/%	a_2/b (相似中心 O_2)	本文结果	文献[10]	差值/%
0.3	1.230 68	1.243	0.99	0.1	0.994 00	1.026	3.12
0.3	1.172 51	1.191	1.55	0.2	1.034 20	1.066	2.98
0.3	1.117 87	1.118	0.01	0.3	1.112 08	1.118	0.53
0.3	1.028 41	1.004	2.43	0.4	1.248 01	1.249	0.08
0.3	0.831 61	0.844	1.47	0.5	1.397 70	1.409	0.80
0.3	0.616 37	0.613	0.55	0.6	1.573 11	1.603	1.86

3.3 板内平行多裂纹问题

一长条板内含 4 个 $2a$ 长的中心裂纹,板端受均匀拉力 p_0 ,如图 6 所示. 裂纹间距为 d . 利用几何对称性取一半进行研究. 将该板分成 8 块,相似中心分别为 O_1 到 O_8 ,对应的相似中心为相应的块数,共剖分 349 个单元. 其中第 1、4 块为 69 个单元;第 5、8 块为 71 个单元;第 2、3 块为 53 个单元;第 6、7 块为 55 个单元. BE、KN 段单元长度比为

1.8;EH、HK 段单元长度比为 2.0. 这样可以计算每一个裂纹的应力强度因子,应力强度因子计算式见式(5),并用 $K_a=p_0\sqrt{\pi a}$ 对其量纲一化.

因为这种情况没有封闭形式的解析解做对比,所以仅仅与具有平行分布且等间距裂纹的无限长板的解析解及文献中的数值方法进行对比. 对于模式 I 情况的应力强度因子的表达式见文献[11].

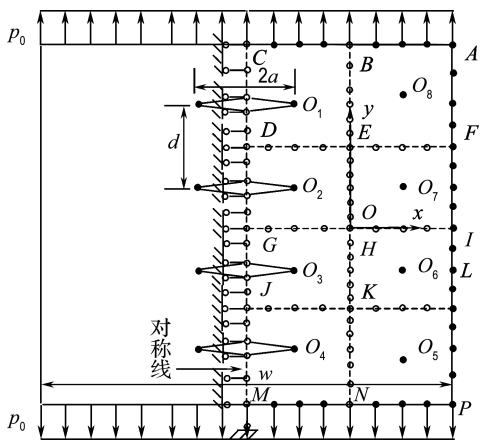


图 6 四平行中心裂纹问题网格示意图
Fig. 6 The problem of four parallel central cracks and its boundary discretization

$$K_I = p_0 \sqrt{\pi a} f(a/d); \quad 2a \ll w \quad (6)$$

式中 $f(a/d)$ 表征裂纹长与裂纹间距比的影响, 被表示为

$$f(a/d) = e^{-1.68q} \cdot (1 + 1.68q) \quad (7)$$

式中 $q = 2a/d$, 这里取为 0.2. 对比结果见表 4.

表 4 板内平行多裂纹问题本文结果与解析解的比较

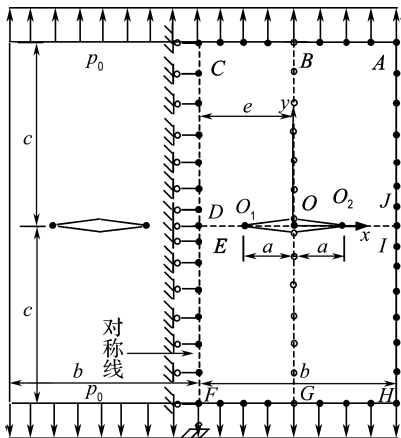
Tab. 4 Comparison of results in this paper with the analytical solution for the multi parallel central cracks problem

块数	本文结果	文献[1](IE-FE)	解析解 ^[11]	差值/%
第 1 块	0.985 31	0.999 46	0.954 736	3.20
第 2 块	0.970 82	0.972 96	0.954 736	1.61
第 3 块	0.964 93	—	0.954 736	1.07
第 4 块	0.936 56	—	0.954 736	1.90

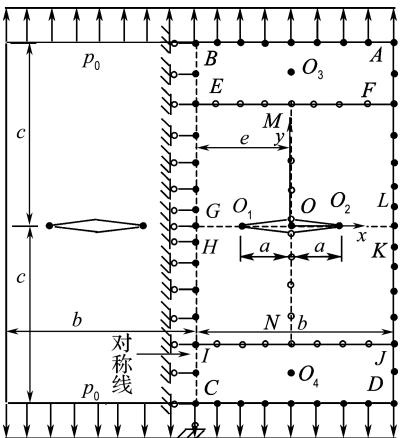
本文结果与解析解相对误差不超过 4%, 表明本文方法是高精确的.

3.4 内部双裂纹问题

一矩形板内部含有两个长度为 $2a$ 的裂纹, 在板端受均匀拉力 p_0 , 如图 7(a)、(b). 根据几何对称性取矩形板的一半进行计算, 计算中裂纹间距和宽度比 $e/b = 0.5, 3$ 个裂纹长和板宽比 $a/e = 0.4, 0.5, 0.6$, 并计算 4 个高宽比数据 $c/b = 1.50, 1.00, 0.75, 0.50$. 对于高宽比 $c/b = 1.00, 0.75, 0.50$ 时将板分成 2 块进行计算如图 7(a), 高宽比 $c/b = 1.50$ 时将板分成 4 块进行计算如图 7(b). $c/b = 0.50$ 时每块剖分 39 个三节点线单元; $c/b = 0.75$ 时每块剖分 55 个三节点线单元; $c/b = 1.00$ 时每块剖分 67 个三节点线单元. 其中 AJ、HI、CD、FE 段的单元长度比为 2.5. $c/b = 1.50$ 时第 1 块和第 2 块分别剖分 39 个三节点线单元, 其中 EG、IH、FL、JK 段单元长度比为 2.5; 第 3、4 块分别剖分 40 个三节点线单元. 应力强度因子计算式见式(5), 并用 $K_a = p_0 \sqrt{\pi a}$ 对其量纲一化. 计算结果见表 5. 本文结果与文献[12]中结果的对比相对误差不超过 1%, 说明本文方法是高精确的. 同时由结果可以看出对于这类裂纹问题随着裂纹长宽比的增加和板高宽比的降低应力强度因子增加.



(a) 2 块



(b) 4 块

图 7 双裂纹问题网格示意图

Fig. 7 The problem of two collinear cracks and its boundary discretization

表 5 内部双裂纹问题本文结果与文献结果的比较

Tab. 5 Comparison of results in this paper with those of references for the two collinear cracks problem

c/b	K _I	a/e = 0.4				a/e = 0.5				a/e = 0.6			
		本文结果	文献[12]	文献[1]	差值/%	本文结果	文献[12]	文献[1]	差值/%	本文结果	文献[12]	文献[1]	差值/%
0.50	K _{I1}	1.169 81	1.167 8	1.187 2	0.17	1.258 98	1.256 2	1.285 0	0.22	1.373 73	1.369 7	1.406 0	0.29
	K _{I2}	1.173 61	1.171 4	1.189 6	0.19	1.261 28	1.258 4	1.287 9	0.23	1.366 55	1.362 9	1.406 6	0.27
0.75	K _{I1}	1.108 73	1.107 6	1.109 7	0.10	1.180 87	1.179 2	1.176 7	0.14	1.286 41	1.283 7	1.274 8	0.27
	K _{I2}	1.101 83	1.101 3	1.102 1	0.05	1.167 19	1.166 4	1.161 7	0.07	1.262 22	1.260 9	1.248 4	0.10
1.00	K _{I1}	1.096 58	1.096 7	1.099 4	0.01	1.165 87	1.163 3	1.157 4	0.22	1.259 77	1.262 6	1.246 9	0.22
	K _{I2}	1.095 36	1.095 5	1.096 7	0.01	1.162 74	1.161 0	1.152 6	0.17	1.256 30	1.258 7	1.238 7	0.19
1.50	K _{I1}	1.093 89	1.093 0	1.099 8	0.08	1.158 71	1.157 3	1.142 9	0.12	1.256 09	1.253 5	1.219 1	0.21
	K _{I2}	1.096 69	1.096 0	1.100 9	0.06	1.164 13	1.163 0	1.145 7	0.10	1.265 18	1.263 2	1.223 6	0.16

4 正交各向异性材料双边不等长裂纹问题

本文方法可以用来处理各向异性材料以及非均匀介质的多裂纹问题且计算方便. 如图 8 所示, 一正交各向异性带有双边裂纹板, 材料性质^[3,13]如下: $E_1 = 144.8 \text{ GPa}$, $E_2 = 11.7 \text{ GPa}$, $G_{12} = 9.66 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.21$; 宽为 $2b$, 高为 $2h$ 的板, 具有 a_1 和 a_2 长的双边裂纹, 在板端受均匀拉力如图 8 所示. 将板分成 2 块, 取两个裂纹尖端为相似中心 O_1 、 O_2 . 每块采用 71 个三节点线单元进行离散, AB、EF 段分别为 5 个单元; AI、FJ 段分别为 15 个单元, 单元长度比为 1.2; BE 段为 31 个单元, 单元长度比为 1.2. 应力强度因子计算式见式 (6), 并用 $K_{a1} = p_0 \sqrt{\pi a_1}$ 和 $K_{a2} = p_0 \sqrt{\pi a_2}$ 分别对其量纲一化. 取 $h/b = 4$, 本文取 $\psi = 0, \pi/2$ 进行计算, 结果见表 6.

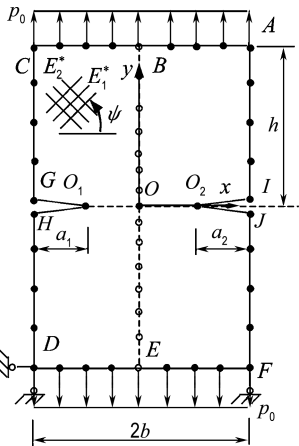


图 8 双边不等长裂纹正交各向异性材料问题网格示意图

Fig. 8 The orthotropic material problem of unequal double-edged cracks and its boundary discretization

表 6 双边不等长裂纹正交各向异性材料结果

Tab. 6 Results of the problem of unequal double-edged cracks orthotropic material

$\psi = 0$				$\psi = \pi/2$			
a_1/b (相似中心 O_1)	本文结果	a_2/b (相似中心 O_2)	本文结果	a_1/b (相似中心 O_1)	本文结果	a_2/b (相似中心 O_2)	本文结果
0.3	1.171	0.20	0.997	0.3	1.266	0.20	1.048
0.3	1.163	0.25	1.024	0.3	1.233	0.25	1.118
0.3	1.123	0.30	1.123	0.3	1.193	0.30	1.193
0.3	1.041	0.35	1.180	0.3	1.143	0.35	1.258
0.3	0.914	0.45	1.265	0.3	1.082	0.40	1.341
0.3	0.851	0.50	1.323	0.3	1.007	0.45	1.431

5 结 论

基于子结构法的思想, 采用比例边界有限元法计算了多裂纹问题的应力强度因子. 将结构根据裂纹的数目进行分块, 可以求解一般规则域内

和其他类型的奇异性, 数值算例验证了这一数值方法. 与解析解和文献中数值方法计算结果的比较表明, 分块后比例边界有限元法可以精确地计算多裂纹问题的奇异性, 进一步推广了比例边界有限元法的应用范围.

参考文献:

- [1] LIU D S, CHIOU D Y. A coupled IEM/FEM approach for solving elastic problems with multiple cracks [J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2003, **40**: 1973-1993
- [2] SONG Chong-min. Analysis of singular stress fields at multi-material corners under thermal loading [J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2006, **65**: 620-650
- [3] SONG Chong-min, WOLF J P. Semi-analytical representation of stress singularity as occurring in cracks in anisotropic multi-materials with the scaled boundary finite-element method [J]. **Computers and Structures**, 2002, **80**: 183-197
- [4] SONG Chong-min. A super-element for crack analysis in the time domain [J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2004, **61**: 1332-1357
- [5] SONG Chong-min. Evaluation of power-logarithmic singularities, T-stresses and higher order terms of in-plane singular stress fields at cracks and multi-material corners [J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 2005, **72**: 1498-1530
- [6] SONG Chong-min, WOLF J P. The scaled boundary finite-element method-alias consistent infinitesimal finite-element cell method for elastodynamics [J]. **Computational Methods on Applied Mechanics Engineering**, 1997, **147**: 329-55
- [7] WOLF J P, SONG Chong-min. **Finite-element Modelling of Unbounded Media** [M]. Chichester: Wiley, 1996
- [8] SONG Chong-min, WOLF J P. Body loads in the scaled boundary finite-element method [J]. **Computational Methods on Applied Mechanics Engineering**, 1999, **180**: 117-135
- [9] MARC A M, KRISHAN K C. **Mechanical Behavior of Materials** [M]. New Jersey: Prentice-Hall, Inc, 1999
- [10] VENTURA D D, SMITH R N L. Some applications of singular fields in the solution of crack problems [J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1998, **42**: 927-942
- [11] MENCLK J. **Strength and Fracture of Glass and Ceramics** [M]. New York: Elsevier Science, 1992
- [12] WANG R D. The stress intensity factors of a rectangular plate with collinear cracks under uniaxial tension [J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 1997, **56**(3): 347-356
- [13] TAN C L, GAO Y L. Boundary element analysis of plane anisotropic bodies with stress concentrations and cracks [J]. **Composites and Structure**, 1992, **20**: 17-28

Fracture analysis of multiple crack problems based on SBFEM

LIU Jun-yu, LIN Gao*, DU Jian-guo

(School of Civil and Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The stress intensity factor of multiple cracks problems is an important issue in elastic fracture mechanics. The scaled boundary finite element method (SBFEM) is proposed to deal with this kind of problem. The solution of stress intensity factor of mode I of multiple crack problems is presented. The whole domain is partitioned into several sub-domains according to the number of existing cracks. Each sub-domain has its own scaling center. At the same time, the characteristics of the SBFEM is preserved in each sub-domain. Numerical examples show that the SBFEM is effective with high accuracy in dealing with the multiple cracks fracture problems. It can be employed to treat the anisotropic medium easily. The results of the stress intensity factors of unequal double-edged cracks in orthotropic material are presented. The scope of application of the SBFEM has been extended.

Key words: fracture mechanics; stress intensity factor; multiple crack problem; scaled boundary finite element method; orthotropic materials