

畸形波数值模拟的一个有效模型

张运秋*, 张宁川, 裴玉国

(大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 基于控制深水复波包演化的修正的四阶非线性薛定谔方程和离散时间步长的伪谱方法,建立了畸形波生成的数值模型,模拟了边带扰动初始条件下满足边带不稳定性条件时波列的演化,统计了演化过程中生成的畸形波,并对该过程中谱成分能量的变化进行了分析.结果表明,采用该模型可以有效地模拟畸形波的生成,边带不稳定性是畸形波生成的一个可能原因,而且多对不稳定边带的相互作用增加了畸形波生成的概率.

关键词: 畸形波;四阶非线性薛定谔方程;伪谱方法;数值模型;边带不稳定性

中图分类号: O353.2 **文献标志码:** A

0 引言

畸形波(freak wave)是海洋中高且陡的大波,对船舶航运和海洋工程结构物极具威胁,有关研究具有十分重要的实际意义.然而目前为止关于畸形波还没有明确统一的定义,多数学者从波高角度出发,认为它是波列中波高 H 大于 2 倍有效波高 H_s 的大波,但具体定义时又有所不同. Klinting 等^[1]给出了为多数学者所认可的定义: (1) $H_i > 2H_s$; (2) $H_i > 2H_{i-1}$, $H_i > 2H_{i+1}$; (3) 波峰高度 $> 65\% H_i$.

由于畸形波大多在未知和不可预料情况下出现,可靠的测量和分析结果非常少,发生机理和发生概率还不十分明确,国内外许多专家学者正致力于该方面的研究.目前,关于畸形波生成的可能机理主要有以下几方面^[2]:线性理论方面的波群时空聚焦理论、随机波浪的几何聚焦理论、波流相互作用理论;浅水 KdV 方程的非线性色散聚焦和深水非线性薛定谔方程(nonlinear Schrödinger equation)的调制不稳定性等非线性理论. Osborne 等^[3,4]、Onorato 等^[5]、Pelinovsky 等^[6]采用三阶非线性薛定谔方程研究畸形波,认为畸形波是非线性自聚焦的结果,而这种自聚焦起源于 Benjamin-Feir 不稳定性^[7],即边带不稳定

性(sideband instability),该不稳定性可引起波列振幅在局部以指数增长,这符合畸形波的波高特性.然而 Dysthe^[8]指出,当波陡 $ka < 0.1$ 时,三阶非线性薛定谔方程所预测的不稳定性同 Longuet-Higgins^[9]的精确结果吻合良好;但当超出这个范围时,该方程的边带稳定性及不稳定边带增长率均与精确结果有较大的差异.为了进一步克服三阶方程的不足,Dysthe^[8]考虑由辐射应力引起的平均流效应推导出了四阶 Dysthe 方程,Lo 和 Mei^[10]对方程进行了小的修正,得到了修正的四阶非线性薛定谔方程. Onorato 等^[11]把四阶 Dysthe 方程的数值结果与物理模拟进行了对比,认为边带不稳定性对于确定试验中波高的统计特性起着重要作用.因此,本文将以波列演化过程中的边带不稳定性为基础,通过修正的四阶非线性薛定谔方程来研究畸形波的生成,并对其生成机理加以讨论分析.

1 模型的建立

1.1 控制方程及边界条件

控制深水复波包演化的修正的四阶非线性薛定谔方程,在群速度移动的坐标系统下无因次的形式为

收稿日期: 2006-09-10; 修回日期: 2008-03-24.

基金项目: 教育部科技重点资助项目(104061).

作者简介: 张运秋*(1974-),女,博士生;张宁川(1963-),男,教授,博士生导师.

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial \eta} + i\gamma^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + i |A|^2 A + \\ 8\epsilon\gamma |A|^2 \frac{\partial A}{\partial \xi} + 4i\epsilon\gamma A \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{z=0} = 0 \\ 4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0; \quad -h < z < 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial |A|^2}{\partial \xi}; \quad z = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0; \quad z = -h \end{cases} \quad (1)$$

式中: $A = A'/a$, $\phi = \phi'/(\omega a^2)$, $\xi = \epsilon\omega\gamma(2kx/\omega - t)$, $\eta = \epsilon^2 kx$, $z = \epsilon k\gamma z'$, $h = \epsilon k\gamma h'$, $\epsilon = ka$; a 为载波振幅, ω 为载波频率, k 为相应的波数, i 表示 $\sqrt{-1}$, γ 为尺度调制因子, x 为波浪传播方向的水平坐标, z 为竖直坐标, t 为时间坐标, A 为一阶 Stokes 波的复波包, ϕ 为平均流速度势, A' 、 ϕ' 、 h' 、 ξ' 和 z' 为相应的有因次变量. (ξ, η, z) 为经过原坐标系 (x, t, z') 转化得到的新坐标系. 波面函数 $\zeta = \zeta'/a$ 表示为

$$\begin{aligned} \zeta(\xi, \eta) = \epsilon^2 \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{z=0} + \left\{ \left(\frac{1}{2} A - \frac{i\epsilon\gamma}{2} \frac{\partial A}{\partial \xi} - \right. \right. \\ \left. \frac{3\epsilon^2}{16} |A|^2 A \right) e^{i\psi} + \left(\frac{\epsilon}{4} A^2 - \right. \\ \left. i\epsilon^2 \gamma A \frac{\partial A}{\partial \xi} \right) e^{2i\psi} + \left[\frac{3\epsilon^2}{16} A^3 \right] e^{3i\psi} \Big\} + \\ \{ * \} \end{aligned} \quad (2)$$

其中载波相函数 $\psi = -\eta/\epsilon^2 + \xi/(\epsilon\gamma)$, $*$ 表示共轭复数. 精确到三阶总的一次谐波波包解为

$$A'' = A - i\epsilon\gamma \frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{3\epsilon^2}{8} |A|^2 A \quad (3)$$

方程的求解总在一个周期为 2π 域上进行, 这样边界条件表示为

$$A(0, \eta) = A(2\pi, \eta) \quad (4)$$

$$\phi(0, z, \eta) = \phi(2\pi, z, \eta) \quad (5)$$

1.2 数值方法

方程(1)为高阶非线性方程, 其求解过程需要满足 $\Delta\eta < O(\Delta\xi)^2$, 这样使得 $\Delta\eta$ 小于 $\Delta\xi$, 数值求解将会耗费更多的步长, 具体的步长根据不同的参数反复试算来确定, 以方程收敛且满足能量守恒定律 $\int_0^{2\pi} |A|^2 d\xi = \text{const}$ 为宜. 为了快速求解方程(1), 数值方法采用一种有效求解四阶非线性薛定谔方程的方法——离散时间步长的伪谱方法^[10]. 该方法主要分两部分: 伪谱方法和有限差分法. 伪谱方法是一种以傅里叶变换为基础的方

法, 可以有效求解方程(1)的线性部分. 复波包 $A(\xi, \eta)$ ($0 < \xi < 2\pi$) 在傅里叶空间上的变换及逆变换如下:

$$\hat{A}(\nu, \eta) = F\{A(\xi, \eta)\} = \sum_{n=0}^{2N-1} A(n\Delta\xi, \eta) e^{i n \pi \nu / N} \quad (6)$$

$$A(n\Delta\xi, \eta) = F^{-1}\{\hat{A}(\nu, \eta)\} = \frac{1}{2N} \sum_{\nu=-N}^N \mu_\nu \hat{A}(\nu, \eta) e^{-i n \pi \nu / N} \quad (7)$$

其中 $2N$ 为一个周期上的离散点数, $\Delta\xi = \pi/N$, 当 $\nu \neq \pm N$ 时, $\mu_\nu = 1$; 当 $\nu = \pm N$ 时, $\mu_\nu = 1/2$. $\nu > 0$ 和 $\nu < 0$ 时的傅里叶模式分别称为较低的和较高的边带. 复波包 $A(\xi, \eta)$ 关于 ξ 的 s 阶导数根据傅里叶变换表示为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^s A}{\partial \xi^s} = i^s F^{-1}\{(-\nu)^s \hat{A}(\nu, \eta)\} = \\ i^s F^{-1}\{(-\nu)^s F\{A(\nu, \eta)\}\} \end{aligned} \quad (8)$$

同时, 平均流的速度势 $\phi(\xi, z, \eta)$ 关于 ξ 在傅里叶空间上也有相似的变换.

在数值计算中, 对于已知的复波包 $A(\xi, \eta)$, 根据伪谱方法可求得速度势 $\phi(\xi, z, \eta)$, 然后把控制方程(1)中第一式分为非线性性和线性两部分: 对非线性部分方程(9)主要应用中点有限差分方法求解, 其离散格式如式(10); 线性部分方程(11)采用伪谱方法求解得到傅里叶形式的精确解. 方程(9)和(11)在求解过程中仍需满足边界条件(4)和(5). 在每一时间步长上, 非线性部分的解作为线性部分的初值代入并求解, 从而得到下一步长的方程的解, 见式(12). 而后把线性部分结果再代入非线性部分方程, 从而依次递进求解.

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} = Q(A) \quad (9)$$

$$\begin{cases} \tilde{A}_{m, n+\frac{1}{2}} = A_{m, n} - \frac{1}{2} \Delta\eta Q(A_{m, n}) \\ \tilde{A}_{m, n+1} = A_{m, n} - \Delta\eta Q(\tilde{A}_{m, n+\frac{1}{2}}) \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} + i\gamma^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} = 0 \quad (11)$$

$$A_{m, n+1} = F^{-1}\{F\{\tilde{A}_{m, n+1}\} \exp(i\gamma^2 \nu^2 \Delta\eta)\} \quad (12)$$

其中 $Q(A) = -\left(i |A|^2 A + 8\epsilon\gamma |A|^2 \frac{\partial A}{\partial \xi} + 4i\epsilon\gamma A \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{z=0}\right)$, m 和 n 分别为 ξ 和 η 坐标上的网格节点编号.

2 模型结果及讨论

如前所述,具有明显非线性特点的畸形波,可由波列的非线性自聚焦生成,该非线性自聚焦起因于边带不稳定性,即 Stokes 波对边带扰动(即频率与载波的基频稍有差异的波产生的扰动)是不稳定的. 根据 Dysthe^[8] 所给出的不稳定性标准,当满足条件公式(13)时边带 $\nu = \pm 1$ 是不稳定的,可引起波列振幅在局部以指数增长,从而导致畸形波的生成. 不稳定边带的最大增长率如式(14)所示,发生在 $\gamma = 1 - 1.5ka$ 处.

$$\frac{\Delta k}{k} = 2\gamma ka < 2\sqrt{2}ka(1 - 2\gamma ka)^{1/2} \quad (13)$$

$$\text{Im} \frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{1}{2}(1 - 2ka)(ka)^2 \quad (14)$$

模拟中采用载波加一对边带扰动 $\nu = \pm 1$ 形成的复波包作为初始条件,如下所示:

$$A(\xi, 0) = 1 + S(e^{i\xi} + e^{-i\xi})e^{i\alpha} \quad (15)$$

其中 S 和 α 分别对应边带的初始振幅和相位. 当 $\alpha = -0.25\pi$ 时,可在短时间内获得最大线性的增

长. 计算中取 $S = 0.05$, 载波波陡 $ka = 0.15$. 尺度因子 γ 的取值范围为 $0 < \gamma < 1.146$. 当 γ 变小时,波数扰动 Δk 变小,即带宽变窄,不稳定边带数目增多.

下面分别考虑一对($\gamma = 0.775$)、两对($\gamma = 0.500$ 及 $\gamma = 0.400$) 和三对($\gamma = 0.300$) 边带不稳定的情况,通过波列的演化来模拟畸形波的生成. 采用上跨零点法对演化过程中的波高进行统计,并根据 Klinting 等^[1] 给出的畸形波定义加以判断,取载波的波高为有效波高,经过统计分析发现,复波包的演化过程中确实存在畸形波,其波面过程线如图 1 所示,可以看出, $\gamma = 0.775, 0.500, 0.400$ 时,比较规则的波面突然升起一个较陡的大波,波峰高且陡,波谷相对较浅,波面左右不对称,具有明显的非线性特点;而当 $\gamma = 0.300$ 时,波列的演化过程中一个 2π 的周期域上出现了两个畸形波(见图 1(d)),说明多对不稳定边带的相互作用增加了畸形波的生成概率.

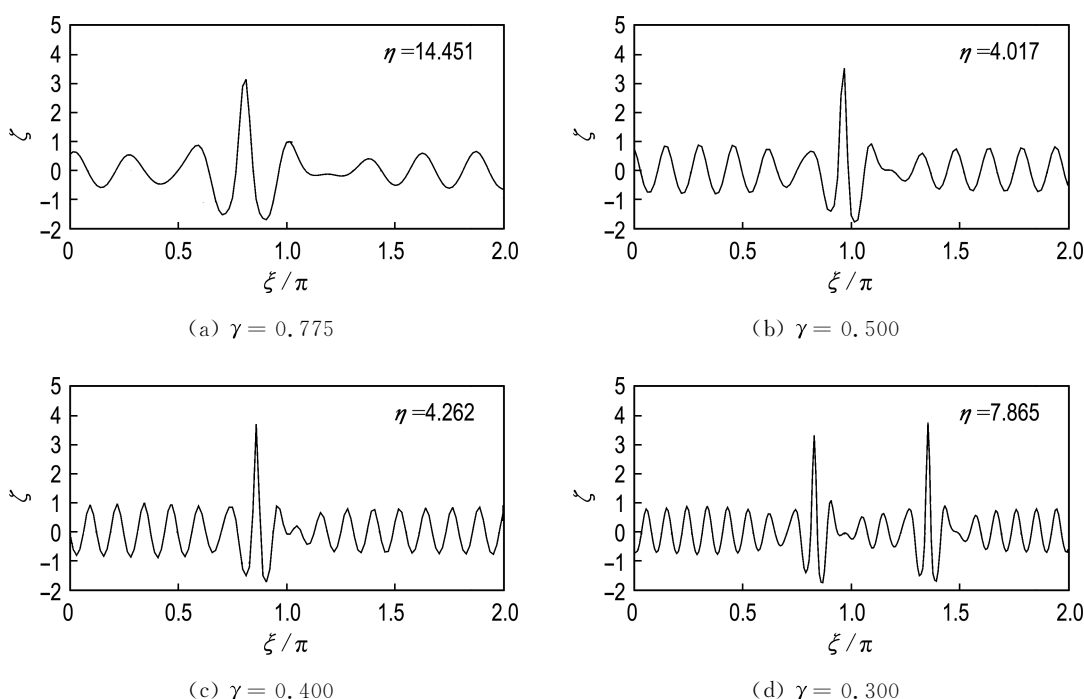


图 1 含有畸形波的波面过程线

Fig. 1 Surface elevation including freak waves

为了进一步研究畸形波生成的可能机理,需要对复波包 $A''(\xi, \eta)$ 的傅里叶成分进行分析. 图 2 给出了影响不稳定边带的尺度因子 γ 取不同值时

演化过程的一些谱振幅图,从图中可看出,当只有一对边带不稳定时(如图 2(a)),载波 $\nu = 0$ 及不稳定边带 $\nu = \pm 1$ 的谱振幅曲线以一种类周期的方

式增长和衰减,载波谱振幅快速下降处,不稳定边带谱振幅快速上升,载波的能量迅速转移到了不稳定边带中,通过统计发现在该位置处有畸形波出现,表明畸形波生成时,载波能量向不稳定边带迅速转移,从而导致了波面振幅在短时间内的迅

速增高;当 γ 继续减小,有两对及两对以上的不稳定边带作用时(如图2(b)~(d)),载波及两对边带 $\nu=\pm 1, \pm 2$ 的谱振幅曲线变化混沌无序,但畸形波生成的位置仍然对应着载波谱振幅的快速下降和不稳定边带 $\nu=\pm 1$ 谱振幅的快速上升。

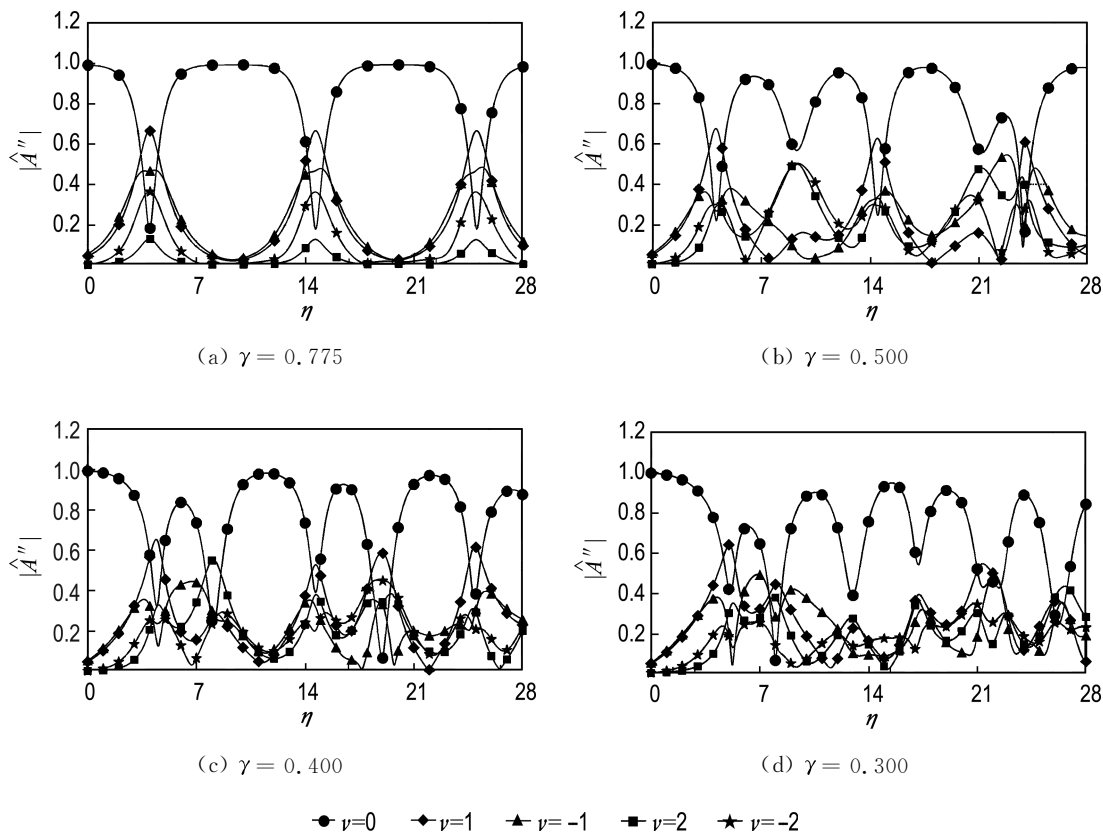


图2 演化过程中载波及两对边带的谱振幅随着 γ 的变化

Fig. 2 Variation of spectral amplitudes including carrier and two pairs of sidebands in the evolution for the different γ

另外,在整个演化模拟过程中,复波包满足能量守恒定律,其相对误差不大于0.05%,确保了整个模拟的有效性。

3 结 语

本文以修正的四阶非线性薛定谔方程和伪谱方法为基础建立了模拟畸形波生成的模型,研究了一对边带扰动条件下波列的演化。对于满足边带不稳定性时一定范围内的尺度因子取值,演化过程中均出现了完全符合定义的畸形波,表明本文所建立的数值模型可以很好地模拟畸形波的生成。通过分析演化过程中复波包谱成分能量的变化发现:畸形波生成时载波的能量迅速向不稳定

边带转移,这恰好符合边带不稳定性的特征,从而证明了边带不稳定性可能是畸形波生成的一个重要原因;多对不稳定边带的相互作用增加了畸形波生成的概率。

参考文献:

- [1] KLINTING P, SAND S. Analysis of prototype freak waves [C]// **Coastal Hydrodynamics**. New York: ASCE, 1987:618-632
- [2] KHARIF C, PELINOVSKY E. Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon [J]. **European Journal of Mechanics B/Fluids**, 2003, **22**:603-634
- [3] OSBORNE A R, ONORATO M, SERIO M. The nonlinear dynamics of rogue waves and holes in deep

- water gravity wave trains [J]. **Physics Letters A**, 2000, **275**:386-393
- [4] OSBORNE A R. The random and deterministic dynamics of ‘rogue waves’ in unidirectional, deep water wave trains [J]. **Marine Structures**, 2001, **14**: 275-293
- [5] ONORATO M, OSBORNE A R, SERIO M, *et al.* Freak waves in random oceanic sea states [J]. **Physical Review Letters**, 2001, **86**(25):5831-5834
- [6] PELINOVSKY E N, SLUNYAEV A V, TALIPOVA T G, *et al.* Nonlinear parabolic equation and extreme waves on the sea surface [J]. **Radiophysics and Quantum Electronics**, 2003, **46**(7): 451-463
- [7] BENJAMIN T B, FEIR J E. The disintegration of wave trains on deep water, Part 1. Theory [J]. **Journal of Fluid Mechanics**, 1967, **27**:417-430
- [8] DYSTHE K B. Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves [J]. **Proceedings of the Royal Society of London Series A**, 1979, **369**:105-114
- [9] LONGUET-HIGGINS M S. The instability of gravity waves of finite amplitude in deep water, II. Subharmonics [J]. **Proceedings of the Royal Society of London Series A**, 1978b, **360**:489-505
- [10] LO E, MEI C C. A numerical study of water-wave modulation based on a higher-order nonlinear Schrödinger equation [J]. **Journal of Fluid Mechanics**, 1985, **150**:395-416
- [11] ONORATO M, OSBORNE A R, SERIO M, *et al.* Quasi-resonant interactions and on-Gaussian statistics in long crested waves [C] // **Rogue Waves**. Brest:Ifremer, 2004
- [12] TRULSEN K. Simulating the spatial evolution of a measured time series of a freak wave [C] // OLAGNON M, ATHANASSOULIS G, eds. **Rogue Waves**. Brest:Ifremer, 2001:265-273

An efficient model for numerical simulation of freak waves

ZHANG Yun-qi^{*}, ZHANG Ning-chuan, PEI Yu-guo

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A numerical wave model is developed to simulate freak wave generation, which is based on the modified four-order nonlinear Schrödinger equation governing the slow variation of complex envelope in deep water and a standard split-step, pseudo-spectral method. The evolution of wave trains with a pair of initial sideband disturbance is carried out when sideband instability is satisfied, freak wave occurrence is estimated, and variation of complex envelope spectral components is also discussed in this process. Results show that this model can be used to simulate freak wave formation efficiently, sideband instability is its possible mechanism, and the interaction of multiple pairs of instable sidebands increases its generation probability.

Key words: freak wave; four-order nonlinear Schrödinger equation; pseudo-spectral method; numerical model; sideband instability