

非均方准则函数下增长率预测

宋立新^{*1}, 赵越¹, 冯敬海¹, 黄晓薇²

(1. 大连理工大学 应用数学系, 辽宁 大连 116024;

2. 对外经济贸易大学 金融学院, 北京 100029)

摘要: 资产组合的远期收益常为资本持有者及经济学研究人员所关注, 在众多影响因素中, 资本市场上外汇、股票、期货等交易较大地依赖于该资产未来的增长率, 为此研究了收益率为未知时资产组合预期增长率预测值与真实值的极限比变化趋势. 分别在对称熵准则函数和 Linex 准则函数下得出了最优预测值, 进一步研究了在这两个准则条件下, 实际增长率为独立同分布情况时估计值与真实值之比的极限情形, 在大样本情形下讨论了风险水平与二者比值的联系, 并经过真实数据模拟验证了所得结论.

关键词: 增长率; 对称熵准则函数; Linex 准则函数; Jensen 不等式

中图分类号: O211 **文献标志码:** A

0 引言

资产组合增长率模型预测一直备受经济学家与研究学者关注. 在大量的相关文献中, 所涉及的预测模型主要可以概括为两大类: 固有模型和非固有模型. 固有模型只是根据历史数据值所提供的信息预测未来, 如广泛应用的时间序列模型. 非固有模型则是依据增长率与其他基本的经济变量(如利率、通货膨胀率等)的相互关系预测未来, 如金融模型等. 本文在固有模型的框架下讨论增长率预测的两个准则: 一个是对称熵准则函数, 另一个是 Linex 准则函数. 分别研究在这两个准则条件下, 实际增长率是独立同分布情况时估计值与真实值之比的极限情形.

1 模型介绍

考虑具有不确定性收益率的投资组合的定价模型^[1], 用 G_0 表示 0 时刻一个投资组合的初值, $\{G_n, n \geq 0\}$ 表示 G_0 在时间 $\{t_n, n \geq 0\}$ ($t_0 = 0$) 时的随机实现值. 用 Z_n 表示该组合在时间段 $(t_{n-1}, t_n]$ 内的市场增长率(收益率), 那么 G_n 可以表示为

$$G_n = G_0(1 + Z_1)(1 + Z_2) \cdots (1 + Z_n)$$

如果能找出合适的预期增长率 $\{i_n, n \geq 1\}$, 这样 t_n

时刻的估计值 $\hat{G}_n$ 可写成

$$\hat{G}_n = G_0(1 + i_1)(1 + i_2) \cdots (1 + i_n)$$

考虑基于如下两个准则给出这个合适的预期增长率 $\{i_n, n \geq 1\}$, 一个是对称熵准则函数, 为

$$E\left\{\left[\left(\frac{1+Z_n}{1+i_n}\right)^{R_n} + \left(\frac{1+i_n}{1+Z_n}\right)^{R_n} - 2\right] \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right\},$$
$$n \geq 1$$

另一个是 Linex 准则函数, 即

$$E\left[e^{R_n(i_n - Z_n)} - R_n(i_n - Z_n) - 1 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right], \quad n \geq 1$$

这里 $\{R_n, n \geq 1\}$ 是一常数列(投资组合中称为风险水平), $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ 是随机过程 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 生成的自然 σ -代数, 即 $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$, $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ ^[2]. 本文中假定 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布的非退化随机变量列, 且 $P(Z_1 \leq 1) = 0$, 关于 Z_1 及其函数的期望都是有限的.

2 对称熵准则下的预期增长率预测

考虑在对称熵准则函数下, 给出 $\{i_n, n \geq 0\}$ 满足此准则时的一般性条件, 然后分别就 $R_n \equiv R$ 及 R_n 互不相等的情况讨论 $\hat{G}_n$ 与 G_n 比值的发展趋势.

命题 1 如果 $\{i_n, n \geq 1\}$ 满足

$$(1+i_n)^{R_n} = \left[\frac{E(1+Z_1)^{R_n}}{E(1+Z_1)^{-R_n}} \right]^{\frac{1}{2}}, n \geq 1 \quad (1)$$

则准则函数 $E\left[\left(\frac{1+Z_1}{1+i_n}\right)^{R_n} + \left(\frac{1+i_n}{1+Z_1}\right)^{R_n} - 2\right]$ 取得最小值.

证明 记

$$h(i_n) \triangleq E\left[\left(\frac{1+Z_1}{1+i_n}\right)^{R_n} + \left(\frac{1+i_n}{1+Z_1}\right)^{R_n} - 2\right]$$

由于对所有 $n \geq 1, i_n$ 是 $\mathcal{F}_{n-1}$ 可测的, 上式可写成

$$h(i_n) = (1+i_n)^{-R_n} E(1+Z_1)^{R_n} + (1+i_n)^{R_n} E(1+Z_1)^{-R_n} - 2$$

令 $h'(i_n) = 0$, 得

$$(1+i_n)^{R_n} = \left[\frac{E(1+Z_1)^{R_n}}{E(1+Z_1)^{-R_n}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

进一步可证 $h''(i_n) > 0$, 即得结论. $\square$

下面的计算过程中, 需要对 Z_1 的函数的期望求导, 因此在这里假定, 涉及的关于 Z_1 的函数均可积, 满足 Lebesgue 控制收敛定理的条件, 所以求导可在积分符号下换序^[3].

命题 2 $R_n \equiv R, i_n$ 满足式(1), $n \geq 1$. 则 $\exists \delta > 0$, 当 $|R| < \delta$ 时有

$$\frac{\hat{G}_n}{G_n} \rightarrow \begin{cases} 0 \text{ a. s. , 若 } M'''(0) < 0 \\ \infty \text{ a. s. , 若 } M'''(0) > 0 \end{cases}, \text{ 当 } n \rightarrow \infty$$

这里设 $M(R) = H(R) - H(-R)$, $H(R) = \ln E(1+Z_1)^R - E \ln(1+Z_1)^R$.

证明 设

$$(1+i_n)^R = \left[\frac{E(1+Z_1)^R}{E(1+Z_1)^{-R}} \right]^{\frac{1}{2}}, n \geq 1$$

由于 $\ln \frac{\hat{G}_n}{G_n} = \sum_{k=1}^n [\ln(1+i_k) - \ln(1+Z_k)]$, 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln \frac{\hat{G}_n}{G_n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2R} \ln \frac{E(1+Z_1)^R}{E(1+Z_1)^{-R}} - \right. \\ &\quad \left. E \ln(1+Z_1) \right] + \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [E \ln(1+Z_1) - \ln(1+Z_k)] \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [E \ln(1+Z_1) - \ln(1+Z_k)] = 0$ a. s., 从而有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\hat{G}_n}{G_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2R} [\ln E(1+Z_1)^R - E \ln(1+Z_1)^R + E \ln(1+Z_1)^{-R} - \ln E(1+Z_1)^{-R}] \right\} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{M(R)}{2R} \text{ a. s.}$$

由 Taylor 展开式, 有

$$M(R) = M(0) + M'(0)R + \frac{R^2}{2}M''(0) +$$

$$\frac{R^3}{6}M'''(\xi), \quad \xi \text{ 位于 } 0 \text{ 与 } R \text{ 之间}$$

进一步计算可得

$$M(0) = H(0) - H(0) = 0,$$

$$M'(0) = 0, M''(0) = H''(0) - H''(0) = 0$$

综上可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\hat{G}_n}{G_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{R^2}{12} M'''(\xi) = \\ &\quad \frac{R^2}{12} M'''(\xi) \text{ a. s. , } \xi \text{ 位于 } 0 \text{ 和 } R \text{ 之间} \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $M'''(\xi) = H'''(\xi) + H'''(-\xi)$, 这里

$$\begin{aligned} H'''(\xi) &= \{ [E(1+Z_1)^\xi]^2 + E[\ln^3(1+Z_1) \times \\ &\quad (1+Z_1)^\xi] - 3E(1+Z_1)^\xi \times \\ &\quad E[\ln(1+Z_1)(1+Z_1)^\xi] \times \\ &\quad E[\ln^2(1+Z_1)(1+Z_1)^\xi] + \\ &\quad 2\{E[\ln(1+Z_1)(1+Z_1)^\xi]\}^2 \} / \\ &\quad [E(1+Z_1)^\xi]^3 \end{aligned}$$

$M'''(\xi)$ 的符号决定了 $\hat{G}_n$ 与 G_n 比值的发展趋势, 由 $M'''(x)$ 在 0 处的连续性, 当 $M'''(x) \neq 0$ 时, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $|R| < \delta$ 时, $M'''(\xi)$ 与 $M'''(0)$ 同号, 从而

$$\ln \frac{\hat{G}_n}{G_n} \rightarrow \begin{cases} +\infty \text{ a. s. , 若 } M'''(0) > 0 \\ -\infty \text{ a. s. , 若 } M'''(0) < 0 \end{cases}, \text{ 当 } n \rightarrow \infty$$

即

$$\frac{\hat{G}_n}{G_n} \rightarrow \begin{cases} 0 \text{ a. s. , 若 } M'''(0) < 0 \\ \infty \text{ a. s. , 若 } M'''(0) > 0 \end{cases}, \text{ 当 } n \rightarrow \infty$$

$\square$

命题 3 若 $\{i_n, n \geq 1\}$ 满足式(1), $R_n \rightarrow 0$, 当

$n \rightarrow \infty$ 时, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\hat{G}_n}{G_n} = 0$.

证明 由 $\ln \frac{\hat{G}_n}{G_n} = \sum_{k=1}^n [\ln(1+i_k) - \ln(1+Z_k)]$ 及式(1), 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln \frac{\hat{G}_n}{G_n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2R_k} \ln \frac{E(1+Z_1)^{R_k}}{E(1+Z_1)^{-R_k}} - \right. \\ &\quad \left. E \ln(1+Z_1) \right] + \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [E \ln(1+Z_1) - \ln(1+Z_k)] \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [E \ln(1+Z_1) - \ln(1+Z_k)] = 0$ a. s., 从而有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\hat{G}_n}{G_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2R_k} [\ln E(1+Z_1)^{R_k} - E \ln(1+Z_1)^{R_k} + E \ln(1+Z_1)^{-R_k} - \ln E(1+Z_1)^{-R_k}] \right\} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{M(R_k)}{2R_k} \text{ a. s.}$$

由 Taylor 展开式,有

$$M(R_k) = M(0) + M'(0)R_k + \frac{R_k^2}{2}M''(0) + \frac{R_k^3}{6}M'''(\xi_k), \quad \xi_k \text{ 位于 } 0 \text{ 与 } R_k \text{ 之间}$$

进一步计算可得

$$M(0) = H(0) - H(0) = 0,$$

$$M'(0) = 0, M''(0) = H''(0) - H''(0) = 0$$

综上可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\hat{G}_n}{G_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{R_k^2}{12} M'''(\xi_k) \text{ a. s.},$$

ξ_k 位于 0 和 R_k 之间

若 $R_k \rightarrow 0$, 有 $\frac{R_k^2}{12} M'''(\xi_k) \rightarrow 0$, 再由 Toplitz 引理, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{R_k^2}{12} M'''(\xi_k) \rightarrow 0, \text{ 从而}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\hat{G}_n}{G_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{R_k^2}{12} M'''(\xi_k) = 0$$

□

3 Linex 准则函数下的增长率预测

命题 4 当 $\{i_n, n \geq 1\}$ 满足

$$(1+i_n) = -\frac{1}{R_n} \ln E[e^{-R_n(1+Z_1)}] \quad (3)$$

准则函数 $E[e^{R_n(i_n-Z_1)} - R_n(i_n-Z_1) - 1]$ 取得最小值.

证明 证明方法与命题 1 类似, 故略去.

命题 5 当 i_n 满足式(3), $R_n < 0, n \geq 1$, 当

$$n \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{\hat{G}_n}{G_n} \rightarrow \infty \text{ a. s.}$$

证明 由 $\frac{\hat{G}_n}{G_n} = \frac{(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_n)}{(1+Z_1)(1+Z_2)\cdots(1+Z_n)}$

及式(3)得

$$\frac{\hat{G}_n}{G_n} = \frac{\ln E[e^{-R_1(1+Z_1)}]}{-R_1(1+Z_1)} \cdot \frac{\ln E[e^{-R_2(1+Z_2)}]}{-R_2(1+Z_2)} \times \cdots \times \frac{\ln E[e^{-R_n(1+Z_n)}]}{-R_n(1+Z_n)}$$

记

$$Y_n \triangleq e^{-R_n(1+Z_n)}, n \geq 1$$

若 $R_n < 0, n \geq 1$, 得

$$\frac{\hat{G}_n}{G_n} = \frac{\ln E(Y_1)}{\ln Y_1} \frac{\ln E(Y_2)}{\ln Y_2} \cdots \frac{\ln E(Y_n)}{\ln Y_n}$$

从而

$$\frac{1}{n} \ln \frac{\hat{G}_n}{G_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left[\frac{\ln E(Y_k)}{\ln Y_k} \right] =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\ln \ln E(Y_k) - \ln \ln Y_k] =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\ln \ln E(Y_k) - E(\ln \ln Y_k)] +$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [E(\ln \ln Y_k) - \ln \ln Y_k]$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [E(\ln \ln Y_k) - \ln \ln Y_k] = 0 \text{ a. s.}$$

这样

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\hat{G}_n}{G_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\ln \ln E(Y_k) - E(\ln \ln Y_k)] \text{ a. s.}$$

应用 Jensen 不等式^[4]

$$\ln \ln E(Y_k) - E(\ln \ln Y_k) > \ln E(\ln Y_k) - E(\ln \ln Y_k) = \ln E(1+Z_1) - E \ln(1+Z_1), \text{ 且}$$

$\ln E(1+Z_1) - E \ln(1+Z_1)$ 为大于零的常数, 记为 c , 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\hat{G}_n}{G_n} > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\ln E(1+Z_1) - E \ln(1+Z_1)] = c \text{ a. s.}$$

进一步有 $\ln \frac{\hat{G}_n}{G_n} \rightarrow \infty \text{ a. s.}$, 也就是 $\frac{\hat{G}_n}{G_n} \rightarrow \infty \text{ a. s.}$.

下面对 1997-01 ~ 2000-12 美元兑日元汇率的 360 个数据(选每月最末工作日日平均值)进行分析以验证前述命题的结论, 观察 $\hat{G}_n/G_n$ 的收敛速度, 首先对数据作增长率变换, 得到 359 个数据, 作为 $Z_1, Z_2, \dots, Z_{359}$, 由大数定律, 用样本均值代替命题中涉及的期望进行计算. 以 $n(n=1, \dots, 400)$ 为横轴, $\hat{G}_n/G_n(n=1, \dots, 359)$ 为纵轴作图, 如图 1 所示.

图 1(a) 为对称熵准则条件下此比值的趋势, 本文分别就风险水平 $R_n \equiv R$ 和 $R \rightarrow 0$ 两种情况进行模拟. 由图可以看出 R 较小时, $\hat{G}_n/G_n$ 的整体趋势是趋于 0 的. 图 1(b) 为 Linex 准则函数条件下当 $R_n < 0$ 时得到的模拟图, $\hat{G}_n/G_n$ 的整体趋势是趋于 ∞ , 与理论是符合的.

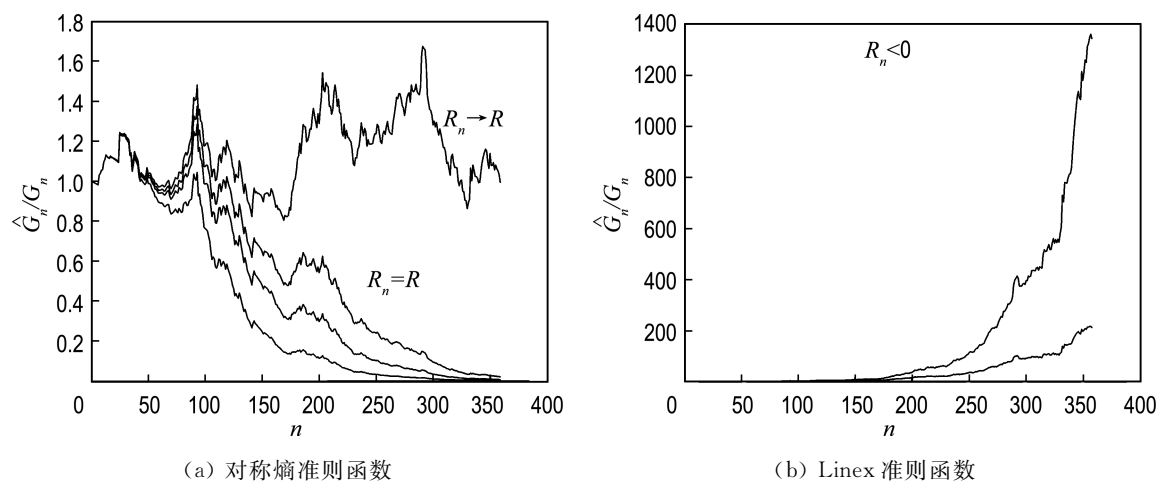


图1 对称熵准则函数与 Linex 准则函数下不同风险水平条件的比值变化趋势

Fig. 1 The trend of ratio in vary risk levels under criterions of symmetric entropy criterion function and Linex criterion function

4 结 语

随着我国金融市场的进一步开放与完善,外汇、股指、期货等交易市场的进一步规范,从科研界到普通大众对资产投资这一领域的研究日趋关注。外汇、股票、期货等交易较大地依赖于该资产未来的增长率,本文从非均方准则函数的角度研究了资产组合的增长率预测值与真实值比值远期的变化趋势,为这一领域的研究提供了一个新的参考角度。

参考文献:

- [1] WANG N, PANG W K, HUANG W K. A discussion on Buhlmann's criterion for asset valuation [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2002, 30(1):85-93
- [2] 胡迪鹤. 随机过程论[M]. 武汉:武汉大学出版社, 2003
- [3] 汪嘉冈. 现代概率论基础[M]. 上海:复旦大学出版社, 1988
- [4] 程士宏. 高等概率论[M]. 北京:北京大学出版社, 1996

A prediction of growth rate by non-mean-square error criterion functions

SONG Li-xin^{*1}, ZHAO Yue¹, FENG Jing-hai¹, HUANG Xiao-wei²

(1. Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. School of Banking and Finance, University of International Business and Economics, Beijing 100029, China)

Abstract: The future return of portfolios usually attracts the attention of economists and capital holders. Among many factors the bargains of exchange, stock and futures largely depend on the growth rate of the portfolios in the future. The limiting behavior of the trend of the valuation of the growth rate compared with the real development is considered when the payoffs of an investment portfolio are uncertain. The best prediction value is given by criterions of the symmetric entropy criterion function and Linex criterion function. Then the relation between the risk level and the ratio of the valuation to the real one is given for independent identically distributed growth rates in large sample, and a simulation is built using true data to verify the conclusions.

Key words: growth rate; symmetric entropy criterion function; Linex criterion function; Jensen inequality