第48卷第5期 大连理工大学学报 Vol.48, No.5
2008年9月 Journal of Dalian University of Technology Sept. 2008

文章编号：1000-8608(2008)05-0759-06

多时滞非线性Lurie控制系统时滞相关绝对稳定性

赵峥嵘*[1,2]， 王 伟[1]， 杨 斌[1]

（1.大连理工大学 自动化系，辽宁 大连 116024；
2.大连工业大学 信息科学与工程学院，辽宁 大连 116034）

摘要：为了研究具有非线性干扰项的多时滞Lurie控制系统的稳定性问题，依据Lyapunov稳定性理论，利用线性矩阵不等式方法，通过一个改进的新积分不等式，给出了一个新的判断系统稳定的新方法——积分不等式法.该方法不必进行模型变换和交叉项的确定，是判断Lurie系统时滞相关绝对稳定的充分条件，并以线性矩阵不等式的形式给出.相应的结果可推广到不确定的系统和间接系统.几个实例证明与现有文献结果相比，具有较小的保守性.

关键词：多时滞Lurie控制系统；绝对稳定性；时滞相关；Lyapunov泛函
中图分类号：TP13 **文献标志码：**A

0 引 言

Lurie系统是一类非常重要的非线性控制系统，关于Lurie系统有许多有价值的研究[1~6].由于客观事物的运动规律是复杂多样的，在许多系统中总是不可避免地存在着时间滞后和不确定性的现象，而且它们通常是引起系统不稳定的原因.因此，无论是从理论上还是从实践上，研究时滞不确定控制系统的稳定性都显得十分重要.文献[1、2]研究了具有一个时滞的Lurie控制系统的绝对稳定性的时滞相关判别准则，但得到的时滞界限较小；文献[3、4]利用Lyapunov泛函方法，给出了不确定的滞后Lurie控制系统鲁棒绝对稳定的时滞相关准则；文献[4、5]基于线性矩阵不等式(LMI)给出了多时滞Lurie控制系统绝对稳定的充分条件，具有一定的研究价值.而文献[6]进一步研究了具有时滞的Lurie间接控制系统的绝对稳定性判据.

本文利用一个新的积分不等式，通过Lyapunov泛函和线性矩阵不等式，研究时滞Lurie直接控制系统的绝对稳定性，并且进一步研究更加一般的一类状态和控制具有不确定性的多时滞Lurie和多时滞间接Lurie控制系统的绝对稳定性，给出判断它们绝对稳定性的时滞相关准则.

1 系统描述和引理

考虑下列形式的具有多个非线性项的多时滞Lurie直接控制系统

$$\Sigma_0:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum\limits_{i=0}^{m}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t-h_i)+\sum\limits_{i=0}^{m}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}(t-h_i))\\ \boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t);\quad t\in[-h,0]\end{cases}\tag{1}$$

式中：实向量函数$\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{R}^n$；实矩阵$\boldsymbol{A}_i\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$；$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{B}_i\in\boldsymbol{R}^{n\times m}(i=0,1,2,\cdots,m)$；系统常数时滞$h_i$满足$h_0=0,0<h_i\leqslant h(i=1,2,\cdots,m)$；$\boldsymbol{\phi}(t)$为连续向量初始函数；$\boldsymbol{f}$为连续向量函数，且满足

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})\in K[0,k],K[0,k]=\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})\mid\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{0}<\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})<k\boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{\sigma}\neq\boldsymbol{0})\}\tag{2}$$

当系统矩阵中包含有不确定项时，不确定的多时滞Lurie直接控制系统可以描述为

$$\Sigma_1:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum\limits_{i=0}^{m}(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i(t))\boldsymbol{x}(t-h_i)+\\ \qquad\sum\limits_{i=0}^{m}(\boldsymbol{B}_i+\Delta\boldsymbol{B}_i(t))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}(t-h_i))\\ \boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t);\quad t\in[-h,0]\end{cases}\tag{3}$$

收稿日期：2006-12-09； **修回日期：**2008-01-04.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60534010).
作者简介：赵峥嵘*(1971-)，女，副教授；王 伟(1955-)，男，教授，博士生导师.

这里时变参数的不确定项满足 $\Delta \boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{L}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_i$，$\Delta \boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{L}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{M}_i$，$\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{E}_i$、$\boldsymbol{M}_i$ 和 $\boldsymbol{F}(t)$ 是具有适当维数的实矩阵($i = 0,1,2,\cdots,m$)，并且 $\|\boldsymbol{F}(t)\| \leqslant 1$ 对任意的 $t \in [0,h]$ 均成立.

多时滞 Lurie 间接控制系统可描述为

$$\Sigma_2: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \sum\limits_{i=0}^{m} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}(t-h_i) + \sum\limits_{i=0}^{m} \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}(t-h_i)) \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}); \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t),\ t \in [-h,0] \end{cases} \tag{4}$$

这里 $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}) \in \boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}) \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{0} < \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma} \neq \boldsymbol{0}),\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}) \in C(-\infty,+\infty)\}$，其他条件与系统 Σ_0 相同.

为了对上面的 3 个系统进行稳定性研究，首先给出下面的引理.

引理 1 设 $\boldsymbol{x}(t)$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 上具有连续一阶导数的向量函数，则对任意的矩阵 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} > \boldsymbol{0}$ 和任意的 $h > 0$，有下列不等式成立：

$$h\int_{-h}^{0} \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t+s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(t+s)\mathrm{d}s \geqslant$$
$$(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)) \begin{pmatrix} -\boldsymbol{R} & \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{R} & -\boldsymbol{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(t-h) \end{pmatrix}$$

证明 根据文献[7]的结果有

$$h\int_{-h}^{0} \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t+s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(t+s)\mathrm{d}s \geqslant$$
$$\left(\int_{-h}^{0} \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t+s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \left(\int_{-h}^{0} \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t+s)\mathrm{d}s\right) \geqslant$$
$$[\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t-h)]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} [\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t-h)] =$$
$$(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)) \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & -\boldsymbol{R} \\ -\boldsymbol{R} & \boldsymbol{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(t-h) \end{pmatrix}$$

故引理 1 得证.

引理 2[8] 若对于给定的矩阵 $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})$ 和适当维数的矩阵 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{L}$，任意 $\boldsymbol{F}$ 满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} \leqslant \boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} < \boldsymbol{0}$ 成立的充要条件是存在 $\varepsilon > 0$，使得 $\boldsymbol{Z} + \varepsilon\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} < \boldsymbol{0}$.

引理 3 (S-程序) $\boldsymbol{F}_i \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$，$i = 0,1,2,\cdots,p$，如果存在实数 $\tau_i \geqslant 0$，使得 $\boldsymbol{F}_0 - \sum\limits_{i=1}^{p} \tau_i \boldsymbol{F}_i > \boldsymbol{0}$，则对于任意的 $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{R}^n$ 满足 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{\xi} \geqslant \boldsymbol{0}$，都有 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{\xi} > \boldsymbol{0}$ 成立.

为了研究系统 Σ_0、Σ_1、Σ_2 在什么条件下零解是绝对稳定的，考虑如下 Lyapunov 函数：

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{V}_3(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{V}_4(\boldsymbol{x}(t))$$

其中

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$$
$$\boldsymbol{V}_2 = \sum_{i=1}^{m}\int_{t-h_i}^{t} [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}(s) + \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}(s))\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}(s))]\mathrm{d}s$$
$$\boldsymbol{V}_3 = \sum_{i=1}^{m}\int_{-h_i}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)h_i\boldsymbol{R}_i\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$$
$$\boldsymbol{V}_4 = 2\beta\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

2 主要结果

定理 1 假设不确定的时滞 $h_i \in [0,h]$，若存在常数 $\beta > 0$，$r \geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{S} = \mathbf{diag}\{s_1, s_2, \cdots, s_m\} \geqslant \boldsymbol{0}$，以及正定对称矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}_i$、$\boldsymbol{R}_i$、$\boldsymbol{W}_i$($i = 1,2,\cdots,m$) 和任意适当维数的矩阵 $\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{H}_i$($i = 0,1,2,\cdots,m$)，满足下面的矩阵不等式(LMI)：

$$\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_{i,j})_{(2m+3)\times(2m+3)} = \left(\begin{matrix} \boldsymbol{E}_{00} + \sum\limits_{i=1}^{m}(\boldsymbol{Q}_i - \boldsymbol{R}_i) & \boldsymbol{E}_{01} + \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{E}_{02} + \boldsymbol{R}_2 & \cdots & \boldsymbol{E}_{0m} + \boldsymbol{R}_m \\ * & \boldsymbol{E}_{11} - \boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{E}_{12} & \cdots & \boldsymbol{E}_{1m} \\ * & * & \boldsymbol{E}_{22} - \boldsymbol{Q}_2 - \boldsymbol{R}_2 & \cdots & \boldsymbol{E}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{E}_{m0} & \boldsymbol{E}_{m1} & \boldsymbol{E}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{E}_{mm} - \boldsymbol{Q}_m - \boldsymbol{R}_m \\ * & * & * & \cdots & * \\ * & * & * & \cdots & * \\ * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * \end{matrix}\right.$$

$$\begin{pmatrix}
\cdots & P-H_0+A_0^{\mathrm T}N^{\mathrm T} & H_0B_0+krc & H_0B_1 & \cdots & H_0B_m \\
\cdots & -H_1+A_1^{\mathrm T}N^{\mathrm T} & H_1B_0 & H_1B_1+ks_1c & \cdots & H_1B_m \\
\cdots & -H_2+A_2^{\mathrm T}N^{\mathrm T} & H_2B_0 & H_2B_1 & \cdots & H_2B_m \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\cdots & -H_m+A_m^{\mathrm T}N^{\mathrm T} & H_mB_0 & H_mB_1 & \cdots & H_mB_m+ks_mc \\
\cdots & -N-N^{\mathrm T}+\sum_{i=1}^m h^2R_i & \beta c+NB_0 & NB_1 & \cdots & NB_m \\
\cdots & * & \sum_{i=1}^m W_i-2rI & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & * & * & -W_1-2s_1I & \cdots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\cdots & * & * & * & \cdots & -W_m-2s_mI
\end{pmatrix}<0 \tag{5}$$

这里 $E_{ij}=H_iA_j+A_i^{\mathrm T}H_j^{\mathrm T}(0\leqslant i\leqslant j\leqslant m)$，“ * ”为相应矩阵子块的转置，$I$ 为合适维数的单位矩阵，则满足条件(2) 的系统 Σ_0 是绝对稳定的.

证明　对 Lyapunov 函数中的 t 求导为

$$\dot V(x(t))=\dot V_1(x(t))+\dot V_2(x(t))+\dot V_3(x(t))+\dot V_4(x(t))$$

其中

$$\dot V_1=x^{\mathrm T}(t)2P\dot x(t)$$

$$\dot V_2=\sum_{i=1}^m[x^{\mathrm T}(t)Q_ix(t)-x^{\mathrm T}(t-h_i)\times Q_ix(t-h_i)+f^{\mathrm T}(\sigma(t))W_if(\sigma(t))-f^{\mathrm T}(\sigma(t-h_i))W_if(\sigma(t-h_i))]$$

$$\dot V_3=\sum_{i=1}^m\left[h_i^2\dot x^{\mathrm T}(t)R_i\dot x(t)-\int_{t-h_i}^t\dot x^{\mathrm T}(s)h_iR_i\dot x(s)\mathrm ds\right]$$

$$\dot V_4=2\beta\dot x^{\mathrm T}(t)cf(\sigma)$$

由引理 1，则有

$$-\int_{t-h_i}^t\dot x^{\mathrm T}(s)h_iR_i\dot x(s)\mathrm ds\leqslant\begin{pmatrix}x^{\mathrm T}(t)\\x^{\mathrm T}(t-h_i)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-R_i & R_i\\R_i & -R_i\end{pmatrix}\times(x(t)\quad x(t-h_i)) \tag{6}$$

对于任意适当维数的矩阵 H_0、$H_i(i=1,2,\cdots,m)$ 和 N，同时考虑系统(1)，则有

$$2\left[x^{\mathrm T}(t)H_0+\sum_{i=1}^m x^{\mathrm T}(t-h_i)H_i+\dot x^{\mathrm T}(t)N\right]\times\left[\sum_{i=0}^m A_ix(t-h_i)+\sum_{i=0}^m B_if(\sigma(t-h_i))-\dot x(t)\right]=0 \tag{7}$$

考虑到 $\sum_{i=1}^m h_i^2\dot x^{\mathrm T}(t)R_i\dot x(t)\leqslant\sum_{i=1}^m h^2\dot x^{\mathrm T}(t)R_i\dot x(t)$ 和式(6)，并且将式(7) 的左面加到$\dot V$，则

$$\begin{aligned}\dot V(x(t))\leqslant{}& x^{\mathrm T}(t)\left[\sum_{i=1}^m(Q_i-R_i)+H_0A_0+A_0^{\mathrm T}H_0^{\mathrm T}\right]x(t)+2x^{\mathrm T}(t)\left[\sum_{i=1}^m(H_0A_i+A_0^{\mathrm T}H_i^{\mathrm T}+R_i)x(t-h_i)\right]+\\
&2x^{\mathrm T}(t)[P-H_0+A_0^{\mathrm T}N^{\mathrm T}]\dot x(t)+2x^{\mathrm T}(t)H_0B_0f(\sigma(t))+2x^{\mathrm T}(t)\left[\sum_{i=1}^m H_0B_if(\sigma(t-h_i))\right]+\\
&\sum_{i=1}^m[x^{\mathrm T}(t-h_i)(-Q_i-R_i+H_iA_i+A_i^{\mathrm T}H_i^{\mathrm T})x(t-h_i)]+\\
&2\sum_{i=1}^m\left\{\sum_{j=1}^m[x^{\mathrm T}(t-h_i)(H_iA_j+A_i^{\mathrm T}H_j^{\mathrm T})x(t-h_j)]\right\}+2\sum_{i=1}^m[x^{\mathrm T}(t-h_i)(-H_i+A_i^{\mathrm T}N^{\mathrm T})]\dot x(t)+\\
&2\sum_{i=1}^m[x^{\mathrm T}(t-h_i)H_iB_0]f(\sigma(t))+2\sum_{i=1}^m[x^{\mathrm T}(t-h_i)(H_iB_i)f(\sigma(t-h_i))]+\\
&\dot x^{\mathrm T}(t)\left[\sum_{i=1}^m h^2R_i-N-N^{\mathrm T}\right]\dot x(t)+2\dot x^{\mathrm T}(t)(\beta c+NB_0)f(\sigma(t))+\\
&2\dot x^{\mathrm T}(t)\left[\sum_{i=1}^m NB_if(\sigma(t-h_i))\right]+f^{\mathrm T}(\sigma(t))\left[\sum_{i=1}^m W_i\right]f(\sigma(t))-\\
&\sum_{i=1}^m[f^{\mathrm T}(\sigma(t-h_i))W_if(\sigma(t-h_i))]\end{aligned} \tag{8}$$

注意到式(2)等价于下面两式：

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}(t))[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}(t))-k\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t)]\leqslant\boldsymbol{0} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}(t-h_i))[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}(t-h_i))-k\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t-h_i)]\leqslant\boldsymbol{0}\ (i=1,2,\cdots,m) \tag{10}$$

那么应用S-程序，如果存在 $r\geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{S}=\mathbf{diag}\{s_1,s_2,\cdots,s_m\}\geqslant\boldsymbol{0}$ 使得

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))-2r\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}(t))[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}(t))-k\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t)]-2\sum_{i=1}^{m}s_i\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}(t-h_i))[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}(t-h_i))-k\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t-h_i)]\leqslant\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\xi}(t)<\boldsymbol{0}$$

对所有 $\boldsymbol{\xi}(t)\neq\boldsymbol{0}$ 成立，这里

$$\boldsymbol{\xi}(t)=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_1)\quad \cdots\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_m)\quad \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}(t))\quad \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}(t-h_1))\quad \cdots\quad \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}(t-h_m)))^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{\Omega}=(\boldsymbol{\Omega}_{i,j})_{(2m+3)\times(2m+3)}<\boldsymbol{0}$ 等价于式(5)，则满足条件(2)的系统(1)是绝对稳定的.

下面研究不确定的多时滞 Lurie 直接控制系统 Σ_1.

定理 2 假设不确定的时滞 $h_i\in[0,h]$，若存在常数 $\beta>0$，$\varepsilon>0$，$r\geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{S}=\mathbf{diag}\{s_1,s_2,\cdots,s_m\}\geqslant\boldsymbol{0}$ 以及正定对称矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}_i$、$\boldsymbol{R}_i$、$\boldsymbol{W}_i(i=1,2,\cdots,m)$ 和任意适当维数的矩阵 $\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{H}_0$、$\boldsymbol{H}_i$、$\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{E}_i$、$\boldsymbol{M}_i(i=0,1,2,\cdots,m)$，满足下面的矩阵不等式(LMI)：

$$\begin{pmatrix}
\boldsymbol{\Omega}_{0,0} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{0,m} & \boldsymbol{\Omega}_{0,m+1} & \boldsymbol{\Omega}_{0,m+2} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{0,2m+2} & \varepsilon\boldsymbol{E}_0^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H}_0\boldsymbol{L} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{\Omega}_{m,0} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{m,m} & \boldsymbol{\Omega}_{m,m+1} & \boldsymbol{\Omega}_{m,m+2} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{m,2m+2} & \varepsilon\boldsymbol{E}_m^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H}_m\boldsymbol{L} \\
\boldsymbol{\Omega}_{m+1,0} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{m+1,m} & \boldsymbol{\Omega}_{m+1,m+1} & \boldsymbol{\Omega}_{m+1,m+2} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{m+1,2m+2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N}\boldsymbol{L} \\
\boldsymbol{\Omega}_{m+2,0} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{m+2,m} & \boldsymbol{\Omega}_{m+2,m+1} & \boldsymbol{\Omega}_{m+2,m+2} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{m+2,2m+2} & \varepsilon\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{\Omega}_{2m+2,0} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{2m+2,m} & \boldsymbol{\Omega}_{2m+2,m+1} & \boldsymbol{\Omega}_{2m+2,m+2} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{2m+2,2m+2} & \varepsilon\boldsymbol{M}_m^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\
\varepsilon\boldsymbol{E}_0 & \cdots & \varepsilon\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{0} & \varepsilon\boldsymbol{M}_0 & \cdots & \varepsilon\boldsymbol{M}_m & -\varepsilon\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_0^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_m^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\varepsilon\boldsymbol{I}
\end{pmatrix}<\boldsymbol{0} \tag{11}$$

这里 $\boldsymbol{\Omega}_{i,j}$ 与定理1中的相同，则满足条件(2)的系统 Σ_1 是鲁棒绝对稳定的.

证明 用 $\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{L}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_i$ 和 $\boldsymbol{B}_i+\boldsymbol{L}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{M}_i$ 分别代替式(5)中的 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{B}_i$，则对于系统 Σ_1，式(5)等价于下面的条件：

$$\boldsymbol{\Omega}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{L}\\ \vdots\\ \boldsymbol{H}_m\boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{N}\boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{F}(t)\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_0^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{E}_m^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{M}_0^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{M}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_0^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{E}_m^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{M}_0^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{M}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{L}\\ \vdots\\ \boldsymbol{H}_m\boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{N}\boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}<\boldsymbol{0} \tag{12}$$

应用引理2，式(12)成立的一个充分条件是存在一个正数 $\varepsilon>0$，使得

$$\boldsymbol{\Omega}+\varepsilon^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{L}\\ \vdots\\ \boldsymbol{H}_m\boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{N}\boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{L}\\ \vdots\\ \boldsymbol{H}_m\boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{N}\boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}+\varepsilon\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_0^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{E}_m^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{M}_0^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{M}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_0^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{E}_m^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{M}_0^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{M}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}<\boldsymbol{0} \tag{13}$$

根据 Schur 补引理，本文发现式(13)等价于式(11)，故满足条件(2)的系统(3)是鲁棒绝对稳定的. 证毕.

注 1 对于无非线性项的控制系统，即系统 Σ_0、Σ_1 中的 $\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{B}_i(i=0,1,2,\cdots,m)$ 为零矩阵，定理1与定理2仍然成立，只是将两定理中的线性矩阵不等式中的 $\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{B}_i$、$\boldsymbol{M}_i(i=0,1,2,\cdots,m)$ 取为零矩阵而已.

对于多时滞 Lurie 间接控制系统 Σ_2，有下面的结论：

定理 3 假设不确定的时滞 $h_i\in[0,h]$，若存在常数 $\beta>0$，以及正定对称矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}_i$、$\boldsymbol{R}_i$、$\boldsymbol{W}_i(i=1,2,\cdots,m)$ 和任意适当维数的矩阵 $\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{H}_i(i=0,1,2,\cdots,m)$，满足下面的矩阵不等式(LMI)：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{0,0} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{0,m} & \boldsymbol{\Omega}_{0,m+1} & \boldsymbol{\Omega}_{0,m+2}+\beta\boldsymbol{c} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{0,2m+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\Omega}_{m,0} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{m,m} & \boldsymbol{\Omega}_{m,m+1} & \boldsymbol{\Omega}_{m,m+2} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{m,2m+2} \\ \boldsymbol{\Omega}_{m+1,0} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{m+1,m} & \boldsymbol{\Omega}_{m+1,m+1} & \boldsymbol{\Omega}_{m+1,m+2}-\beta\boldsymbol{c} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{m+1,2m+2} \\ \boldsymbol{\Omega}_{m+2,0} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{m+2,m} & \boldsymbol{\Omega}_{m+2,m+1} & \boldsymbol{\Omega}_{m+2,m+2}-2\beta\boldsymbol{\rho} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{m+2,2m+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\Omega}_{2m+2,0} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{2m+2,m} & \boldsymbol{\Omega}_{2m+2,m+1} & \boldsymbol{\Omega}_{2m+2,m+2} & \cdots & \boldsymbol{\Omega}_{2m+2,2m+2} \end{pmatrix} < \boldsymbol{0} \qquad (14)$$

这里 $\boldsymbol{\Omega}_{i,j}$ 与定理 1 中的定义相同，不过取其中的 $r=0$ 和 $\boldsymbol{S}=\mathbf{diag}\{s_1,s_2,\cdots,s_m\}=\boldsymbol{0}$，则系统 Σ_2 是绝对稳定的.

证明采取与定理 1 相类似的方法，Lyapunov 函数的取法也相同. 证明略.

注 2　文献[6] 中，条件(2) 表示为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}) \in \boldsymbol{F}=\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}) \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}<\boldsymbol{\sigma f}(\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma}\neq\boldsymbol{0}),且\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})\in C(-\infty,+\infty)\}$$

对于满足此条件的间接 Lurie 控制系统 Σ_2，在证明的过程中不考虑式(9)、(10)，即得到定理 3，本文的条件与文献[6] 相同.

注 3　对于多时滞的不确定的间接 Lurie 控制系统，应用类似于定理 2 的证明方法，在定理 3 的基础上很容易进行证明.

注 4　本文的所有结论均可相应地推广到导数存在的时变时滞系统.

3　算　例

例 1　考虑不确定的时滞 Lurie 直接控制系统 Σ_1：取 $n=2,m=1$，其中

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}-0.2\\ -0.3\end{pmatrix},\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0.6\\ 0.8\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{E}_1=\begin{pmatrix}0.3 & 0\\ 0 & 0.2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}_0=\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{f}(\cdot)\in K[0,0.5]$$

根据定理 2 同时利用文献[7] 中的线性矩阵不等式工具箱解线性矩阵不等式，取任意定常时滞满足 $0\leqslant h\leqslant 2.0109$ 时，系统是绝对稳定的. 而文献[2、4] 中的结果分别为 $0\leqslant h\leqslant 0.1250$ 和 $0\leqslant h\leqslant 0.3374$. 这说明本文所得的结果大大优于已有的结果，具有较小的保守性. 并且当 k 分别取 1.0、0.5、0.2 时，该系统稳定的最大时滞界限分别为 1.496 0、2.010 9、2.703 8，说明随着有限扇形角的增大，保证系统绝对稳定的时滞界限逐渐减小. 此实例说明本文方法的有效性以及扇形区域和最大时滞界限之间的相互关系.

例 2　考虑不确定的时滞控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{LF}(t)\boldsymbol{E}_0]\boldsymbol{x}(t)+[\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{LF}(t)\boldsymbol{E}_1]\boldsymbol{x}(t-h)$$

其中

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}-1.0 & 0\\ -0.8 & -1.0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{L}=0.2\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{I}$$

利用定理 2 得到的保证系统鲁棒稳定的最大时滞 $h=0.6909$，与其他文献的结果比较列于表 1，可以看出本文的结果具有更好的有效性和更少的保守性.

表 1　最大允许滞后时间

Tab.1　Allowable maximum time-delay

文献	最大时滞
[9]	0.357 0
[10]	0.535 1
[11]	0.681 1
[12]	0.689 1
本文	0.690 9

例 3　考虑多时滞的间接 Lurie 控制系统 Σ_2：取 $n=2,m=1$，其中

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}-0.6 & 0\\ 0 & -0.8\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}-0.2 & 0\\ 0 & -0.2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_0=\begin{pmatrix}0.4\\ 0.6\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1.0\\ 1.2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{0},\ \rho=1.3.$$

利用定理 3 得到的最大时滞界限 $h=5.4964$，利用 Matlab 中解线性矩阵不等式工具箱，此时式(14) 的解为

$$\beta=0.0051,$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2.7404 & -2.0003\\ -2.0003 & 1.5099\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0.6176 & -0.5341\\ -0.5341 & 0.4648\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.0752 & -0.0413\\ -0.0413 & 0.0227\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_0 = \begin{pmatrix} 1.435\,5 & -0.967\,7 \\ -1.249\,9 & 0.856\,4 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_1 = \begin{pmatrix} -0.394\,0 & 0.256\,9 \\ 0.277\,7 & -0.184\,6 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 2.256\,2 & -1.721\,9 \\ -1.256\,8 & 1.021\,7 \end{pmatrix}$$

文献[6]中，得到的最大时滞界限为 $h=2.50$，而利用本文的定理3得到的最大时滞界限比文献[6]的时滞界限提高了1倍多.很明显，本文的结果不但易于计算，且具有更低的保守性.

4 结 论

利用矩阵不等式的方法，根据一个新的积分不等式，分别讨论了具有多时滞的Lurie直接、不确定及间接系统的绝对稳定性，给出了系统绝对稳定的时滞相关准则，通过例子表明本文所给的条件不仅便于应用而且具有较小的保守性.

参考文献：

[1] NIAN Xiao-hong. Delay dependent conditions for absolute stability of Lurie type control systems [J]. **Acta Automatica Sinica**, 1999, **25**:564-566

[2] 徐炳吉，沈 轶，廖晓昕. Lurie型不确定控制系统鲁棒稳定的时滞界[J]. 系统工程与电子技术，2001，**23**(8):52-54

[3] NIAN Xiao-hong, FAN Xiao-ping. Robust stability for uncertain Lurie control systems with time-delay [J]. **Control Theory & Applications**, 2001, **18**(6):925-928

[4] 马新军，胥布工，彭达洲. Lurie型不确定多时滞系统的时滞相关鲁棒绝对稳定[J]. 电机与控制学报，2005，**9**(2):99-1002

[5] 陈东彦，刘伟华. 多时滞Lurie控制系统的时滞相关鲁棒稳定性[J]. 控制理论与应用，2005，**22**(3):499-502

[6] 张发明. 具有时滞的Lurie型间接控制系统的绝对稳定性[J]. 华中师范大学学报(自然科学版)，2005，**39**(2):183-185

[7] GAHINET P, NEMIROVSKII A, LAUB A J, *et al*. **LMI Control Toolbox** [M]. MA:Math Works, 1995

[8] XIE L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty [J]. **International Journal of Control**, 1996, **63**:741-750

[9] CHEN W Y. Some new results on the asymptotic stability of uncertain systems with time-vary delay [J]. **International Journal of System Science**, 2002, **33**:917-921.

[10] KIM J H. Delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delay linear systems with uncertainty [J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2001, **46**(5):789-792

[11] JING X J, TAN D L, WANG Y C. An LMI approach to stability of systems with severe time-delay [J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2004, **49**(7):1192-1195

[12] LIU X, ZHANG H. New stability criterion of uncertain systems with time-vary delay [J]. **Chaos, Solitons & Fractals**, 2005, **26**:1343-1348

Delay-dependent absolute stability of nonlinear Lurie control systems with multiple time-delays

ZHAO Zheng-rong*[1,2], WANG Wei[1], YANG Bin[1]

(1. Department of Automation, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. Informational College, Dalian Polytechnic University, Dalian 116034, China)

Abstract: The stability of Lurie type control systems with multiple time-delays and nonlinearities is considered. Based on the Lyapunov stability theory, using an improved new integral inequality and the method of linear matrix inequality, a refined method called the integral inequality approach is presented. Neither model transformation nor bounding technique for cross terms is involved, and a sufficient condition for the absolute stability of Lurie system is derived and expressed in the form of linear matrix inequality. The criterion is also extended to systems with uncertainties and indirection. Examples are given to illustrate that the proposed criteria are less conservative than other existing ones.

Key words: Lurie control system with multiple time-delays; absolute stability; time-delay-dependent; Lyapunov function