第48卷第5期
2008年9月
大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology
Vol. 48, No. 5
Sept. 2008

应用数学

文章编号：1000-8608(2008)05-0769-06

由纯跳 Lévy 白噪声驱动的随机薛定谔方程

冯敬海*， 王 岩， 冯恩民

（大连理工大学 应用数学系，辽宁 大连 116024）

摘要： 给出了由纯跳 Lévy 白噪声驱动的随机薛定谔方程的白噪声解法. 方程的位势由纯跳 Lévy 白噪声过程的 Wick 幂来表示，在实际应用中代表随机因素是跳跃的物理系统. 此方法将 $(S)_{-1}$ 分布空间的特征定理作为理论基础，利用 Hermite 变换将随机薛定谔方程转化为非随机的普通方程，在 Feynmann-Kac 公式的帮助下，得到这个非随机方程的解，最后使用 Hermite反变换将此解转换为分布空间的一个 $(S)_{-1}$ 过程，这个过程即为原随机薛定谔方程的解. 进一步可以得到：经过一定条件的限制，这个解在弱分布的意义下，属于 $L^1(\upsilon)$ 空间.

关键词： 纯跳 Lévy 白噪声； Wick 乘积； Hermite 变换； 随机薛定谔方程

中图分类号： O211.63 **文献标志码：** A

0 引 言

白噪声分析是 Hida 首先提出的无穷维随机分析，在文献[1]中，Hida 具体讨论了 Gauss 情况的白噪声，而后被许多研究者推广到非 Gauss 情况的分析[2,3]. 随着白噪声分析在随机偏微分方程上的应用，这一理论体系也得到了系统的完善和发展：其主要理论工具是 Wiener-Itô 混沌分解；主要思想是利用 Hermite 变换将随机微分方程转化为非随机的微分方程；理论依据是随机分布空间的特征定理. 文献[4]比较完整地讨论了包括随机薛定谔方程在内的，由 Gauss 白噪声驱动的随机偏微分方程. 在文献[4]的基础上，Lϕkka 等[5]给出了纯跳 Lévy 白噪声的理论框架，并研究纯跳 Lévy 白噪声所驱动的随机微分方程；Proske[6]讨论了由纯跳 Lévy 白噪声驱动的随机输运方程.

薛定谔方程是物理中表示量子力学行为的基础性方程，也被称之为薛定谔波动方程；是反映一个物理系统的波函数怎样随着时间进化发展的偏微分方程；是原子物理学中处理一切非相对论问题的有力工具，在原子、分子、固体物理、核物理、化学等领域中被广泛应用.

文献[4、7]对薛定谔方程在位势连续的情况，即位势表示为 Gauss 白噪声过程时，进行了研究. 本文基于文献[5]，针对位势不连续，或者说跳跃的情况，在纯跳 Lévy 白噪声的框架下，讨论位势表示为纯跳 Lévy 白噪声过程的情况. 这样，其一，将文献[4、7]的方程推广到文献[5]所建立的纯跳 Lévy 白噪声的框架下；其二，由于 Gauss 白噪声过程和纯跳 Lévy 白噪声过程分别代表连续和跳跃相奇异的情况，本文所讨论的方程与原方程相比，代表有着跳跃因素的物理系统，有着迥异的现实刻画意义；最后，随机薛定谔方程常用来作为讨论边界值问题的特例，本文要通过此方程探讨由纯跳 Lévy 白噪声驱动的随机边界值问题的白噪声解法.

1 纯跳 Lévy 白噪声分析框架

1.1 Lévy 过程

Lévy 过程 $\eta(t)$ 为取值于 $\mathbf{R}_+$ 上的稳定的独立增量过程，它的初始值是0，即 $\eta(0)=0$. $\eta(t)$ 的特

收稿日期： 2007-02-23； **修回日期：** 2008-07-13.
作者简介： 冯敬海*(1968-)，男，副教授，E-mail：physics_7@163.com.

征函数由 Lévy-Khintchine 公式给出：

$$E\exp(\mathrm{i}\lambda\eta(t))=\exp(-t\Psi(\lambda));\lambda\in\mathbf{R}\quad(1)$$

$$\Psi(\lambda)=\mathrm{i}a\lambda+\frac{1}{2}\sigma\lambda+\int_{\mathbf{R}_0}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda y}+\mathrm{i}\lambda y\chi_{\{|y|<1\}})\nu(\mathrm{d}y)$$

其中常数 $a\in\mathbf{R}$，$\sigma\geqslant0$，ν 是 $\mathbf{R}_0:=\mathbf{R}-\{0\}$ 上的测度，它满足$\int_{\mathbf{R}_0}1\wedge y^2\nu(\mathrm{d}y)<\infty$，被称为 Lévy 测度. 根据 Lévy-Khintchine 公式，$\eta(t)$ 有如下分解：

$$\eta(t)=at+\sigma B(t)+\int_0^t\int_{\mathbf{R}_0}y\chi_{\{|y|<1\}}\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)+\int_0^t\int_{\mathbf{R}_0}y\chi_{\{|y|\geqslant1\}}N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)\quad(2)$$

其中 $B(t)$ 为布朗运动，$N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)$ 为 $\eta(t)$ 的 Poisson 随机测度，$\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)=N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)-\nu(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s$ 为 $\eta(t)$ 的补偿 Poisson 随机测度.

定义 1 若 $\eta(t)$ 的形式为

$$\eta(t)=\int_0^t\int_{\mathbf{R}_0}y\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)\quad(3)$$

则称 $\eta(t)$ 为纯跳 Lévy 过程，此时 $\eta(t)$ 为平方可积的纯跳 Lévy 鞅.

1.2 纯跳 Lévy 白噪声

令 $S(\mathbf{R}^d)$ 为 $\mathbf{R}^d$ 上的C^∞ 全体速降函数所组成的空间，$S'(\mathbf{R}^d)$ 为 $S(\mathbf{R}^d)$ 的对偶空间. 由于 Lévy 测度在零点处有一个奇异点，$S(\mathbf{R}^d)$ 并不适合处理 Lévy 过程，需要构造一个新的空间$\widetilde{S}(X)$，它是 $S(\mathbf{R}^{d+1})$ 的子空间，其中 $X=\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}_0$.

$$S(X):=\left\{\varphi\in S(\mathbf{R}^{d+1}):\varphi(z_1,\cdots,z_d,0)=\left(\frac{\partial}{\partial z_{d+1}}\varphi\right)(z_1,\cdots,z_d,0)=0\right\}\quad(4)$$

令 $\pi=\lambda^{\times d}\times\nu$ 为 $\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}_0$ 上的测度，这里 $\lambda^{\times d}$ 是 $\mathbf{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度，ν 是 $\mathbf{R}_0$ 上的 Lévy 测度，定义 $S(X)$ 的闭理想为

$$N_\pi:=\{\phi\in S(X):\|\phi\|_{L^2(\pi)}=0\}\quad(5)$$

那么，空间$\widetilde{S}(X)$ 为一个商环

$$\widetilde{S}(X)=S(X)/N_\pi\quad(6)$$

在如下定义的相容范数族下：

$$\|\hat{\phi}\|_{p,\pi}:=\inf_{\varphi\in N_\pi}\|\phi+\varphi\|_p,\quad p\in N\quad(7)$$

$\widetilde{S}(X)$ 是可数 Hilbert 核代数. 令 $\widetilde{S}'(X)$ 为$\widetilde{S}(X)$ 的对偶空间，由 Bochner-Minlos 定理可知，在 Borel 集$\mathscr{B}(\widetilde{S}'(X))$ 上，存在着惟一的概率测度 υ，满足

$$\int_{\widetilde{S}'(X)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\omega,\phi\rangle}\mathrm{d}\upsilon=\exp\left(\int_X(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-1)\mathrm{d}\pi\right)\quad(8)$$

其中 $\omega\in\widetilde{S}'(X)$，$\phi\in\widetilde{S}(X)$，$\langle\omega,\phi\rangle=\omega(\phi)$ 为 $\widetilde{S}'(X)$ 对 $\widetilde{S}(X)$ 的作用.

定义 2 定义$(\widetilde{S}'(X),\mathscr{B}(\widetilde{S}'(X)),\upsilon)$ 为纯跳 Lévy 白噪声空间；定义 υ 为纯跳 Lévy 白噪声测度.

下面将介绍的两族正交多项式，对于得到 $L^2(\upsilon)$ 空间上的正交基是非常必要的.

设 $J=(\mathbf{N}_0^{\mathbf{N}})$ 为有着紧支撑的参数列 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$ 的集合，其中 $\alpha_i\in\mathbf{N}_0$. 对于 $\alpha\in J$，令 $\mathrm{index}(\alpha)=\max\{i:\alpha_i\neq0\}$，$|\alpha|$ 表示非 0 的 α_i 的个数. 可以通过双射 $h:\mathbf{N}^d\to\mathbf{N}$，得到 $L^2(\lambda^{\times d})$ 的正交基$\{\zeta_k\}_{k\geqslant1}$：若 $k=h(i_1,\cdots,i_d)$，$i_j\in\mathbf{N}$，$\{\xi_k\}_{k\geqslant1}$ 为 Hermite 函数. 那么$\{\zeta_k\}_{k\geqslant1}$ 可以表示为 $\zeta_k(x_1,\cdots,x_d)=(\xi_{i_1}(x_1),\cdots,\xi_{i_d}(x_d))$，当 $d=0$，令 $\{\pi_j\}_{j\geqslant0}\in S(X)$ 为 $L^2(\nu)$ 的正交基.

利用双射

$$\kappa:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N};(i,j)\mapsto j+\frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2}\quad(9)$$

若 $k=\kappa(i,j)$，$i,j\in\mathbf{N}$，定义 δ_k 为

$$\delta_k(x,y)=\zeta_i(x)\pi_j(y)\quad(10)$$

对于 $\alpha\in J$，如果$\mathrm{index}(\alpha)=j$ 且 $|\alpha|=m$，$\delta^{\hat{\otimes}\alpha}$ 可以看做是 δ_k 的对称张量积. 令

$$K_\alpha(\omega)=\langle C_{|\alpha|}(\omega),\delta^{\hat{\otimes}\alpha}\rangle\quad(11)$$

这里 $C_n(\omega)$ 是广义 Charlier 多项式.

由以上的结论，可以得到 $L^2(\upsilon)$ 上的正交基 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in J}$.

定理 1 $\{K_\gamma(\omega)\}_{\gamma\in J}$ 构成了$L^2(\upsilon)$ 上的正交基，即若 $f\in L^2(\upsilon)$，则有

$$f(\omega)=\sum_{\gamma\in J}C_\gamma K_\gamma(\omega)\quad(12)$$

其中 $C_\gamma\in\mathbf{R}$. 而且 $\|f\|_{L^2(\upsilon)}^2=\sum_{\gamma\in J}C_\gamma^2\gamma!$.

为了研究随机薛定谔方程的解的存在空间，下面定义几个空间.

定义 3　对于 $\rho \in [-1,1]$，$q \in \mathbf{Z}$，

定义 Kondratiev 范数：当 $F = \sum_{\gamma \in J} C_\gamma K_\gamma(\omega)$ 时，$\| F \|^2_{\rho,q} = \sum_{\gamma \in J} C_\gamma^{\,2} (\gamma!)^{1+\rho} (2\mathbf{N})^{q\gamma}$；

定义 Kondratiev Hilbert 空间：$(S)_{\rho,q} = \{F; \| F \|_{\rho,q} < \infty\}$；

定义 Kondratiev 检验函数空间：$(S)_\rho = \bigcap_{q \in \mathbf{N}} (S)_{\rho,q}$，并在其上配备投影极限拓扑；

定义 Kondratiev 分布空间：$(S)_{-\rho} = \bigcup_{q \in \mathbf{N}} (S)_{-\rho,q}$，并在其上配备归纳极限拓扑；

定义 Hida 检验函数空间：$(S) = (S)_0$；

定义 Hida 分布空间：$(S)^* = (S)_{-0}$.

可以将 $(S)_{-\rho}$ 看做是 $(S)_\rho$ 的对偶空间，这是通过如下作用实现的：

$$\langle F, f \rangle = \sum_{\gamma \in J} b_\gamma c_\gamma \gamma!$$

此处 $F = \sum_{\gamma \in J} b_\gamma K_\gamma \in (S)_{-\rho}$，$f = \sum_{\gamma \in J} c_\gamma K_\gamma \in (S)_\rho$.

当 $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ 时，存在着如下的包含关系链：$(S)_1 \subset (S)_\rho \subset (S)_0 \subset L^2(\nu) \subset (S)_{-0} \subset (S)_{-\rho} \subset (S)_{-1}$

若选择 $L^2(\nu)$ 的基 $(\pi_j)_{j \geqslant 1}$ 满足 $\pi_1(y) = y$，而且 $m = \| y \|^2_{L^2(\nu)}$，可以将 Lévy 过程 $\eta(x)$ 表示为

$$\eta(x) = \sum_{k \geqslant 1} m \int_0^{x_d} \cdots \int_0^{x_1} \zeta_k(x_1, \cdots, x_d) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d K_{\varepsilon^{\kappa(k,1)}} \tag{13}$$

定义 $\varepsilon^l \in J (l \geqslant 1)$ 为

$$\varepsilon^l(j) = \begin{cases} 1; & j = l \\ 0; & \text{其他} \end{cases}$$

定义 4　定义纯跳 Lévy 白噪声为

$$\dot{\eta}(x,\omega) = m \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k(x) K_{\varepsilon^{\kappa(k,1)}}(\omega), m = \| y \|^2_{L^2(\nu)} \tag{14}$$

这是 $\eta(x)$ 在 Hida 分布空间的弱导数，即

$$\dot{\eta}(x,\omega) = \frac{\partial^d}{\partial x_1 \cdots \partial x_d} \eta(x)$$

引理 1　对所有的 $\phi \in S(X)$，存在着 $S'(X)$ 中的元素，表示为 $1 \otimes \dot{\nu}$，满足

$$\langle 1 \otimes \dot{\nu}, \phi \rangle = \int_X \phi(y) \pi(\mathrm{d}y)$$

其中 $\langle 1 \otimes \dot{\nu}, \phi \rangle = 1 \otimes \dot{\nu}(\phi)$ 表示 $1 \otimes \dot{\nu}$ 在 ϕ 上的作用. $\dot{\nu}$ 表示 ν 的广义 Radon-Nikodym 导数.

定义 5　定义纯跳 Lévy 白噪声过程为

$$\dot{\eta}_\phi(x,\omega) = \int_{\mathbf{R}^d} \phi_x(u) \mathrm{d}\eta(u) = \langle \omega - 1 \otimes \dot{\nu}, \phi(u-x) y \rangle \tag{15}$$

其中 $\eta(u)$ 为 $\tilde{\eta}(u)$ 的 càdlàg 版本：

$$\tilde{\eta}(x) = \int_X \chi_{[0,x_1]\times\cdots\times[0,x_d]} y \widetilde{N}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y);$$

$$x \in (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbf{R}^d$$

这里，当 $x_i < 0$ 时，$[0, x_i]$ 可以理解为 $[x_i, 0]$.

定义 6

$$f(\omega) = \sum_{\gamma \in J} a_\gamma K_\gamma(\omega) \in (S)_{-1}$$

$$g(\omega) = \sum_{\delta \in J} b_\delta K_\delta(\omega) \in (S)_{-1}$$

则 f 和 g 的 Wick 乘积定义为

$$f \diamond g = \sum_{\gamma,\delta} a_\gamma b_\delta K_{\gamma+\delta}(\omega) \tag{16}$$

Wick 乘积是与 Itô-Skorohod 积分紧密联系的，原因在于：若 $Y(t) = Y(t,\omega)$ 为 Skorohod 可积的，则有

$$\int_0^T Y(t) \delta\eta(t) = \int_0^T (Y(t) \diamond \dot{\eta}(t,\omega)) \mathrm{d}t \tag{17}$$

等式的右边是在 $(S)_{-0}$ 上的 Bochner 积分，等式的左边是对 $Y(t,\omega)$ 的积分. 而且，如果 $Y(t,\omega)$ 是适应的，则有下面等式成立：

$$\int_0^T Y(t) \delta\eta(t) = \int_0^T Y(t) \mathrm{d}\eta(t) \tag{18}$$

定义 7　定义 Wick 指数为

$$\exp^\diamond(F) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} F^{\diamond n} \tag{19}$$

其中 F 的 n 次 Wick 幂表示为 $F^{\diamond n} = F \diamond F \diamond \cdots \diamond F$.

定理 2　Wick 乘积运算满足封闭性：

$$F, G \in (S)_{-1} \Rightarrow F \diamond G \in (S)_{-1} \tag{20}$$

$$f, g \in (S)_1 \Rightarrow f \diamond g \in (S)_1 \tag{21}$$

定义 8　$F(\omega) = \sum_{\gamma \in J} C_\gamma K_\gamma(\omega) \in (S)_{-1}$ 的 Hermite 变换定义为函数 $\mathscr{H}F: \mathbf{C}_0^{\mathbf{N}} \to \mathbf{C}$，满足下面的关系：

$$\widetilde{F}(z) := \mathscr{H}F(z) := \sum_\gamma C_\gamma z^\gamma \tag{22}$$

这里

$$z = (z_1, z_2, \cdots) \in \mathbf{C}_0^{\mathbf{N}},$$

$$z^\gamma = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots, \gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$$

Hermite 变换之所以在白噪声分析的应用中起到了重要作用,在于它其中一个漂亮的性质:Hermite 变换可以将 Wick 乘积变换为普通乘积.如果 g 在 $\mathscr{H}(F)(0)$ 处,有实系数的 Taylor 展开,则存在着惟一的 $Y\in(S)_{-1}$ 使得

$$\mathscr{H}(Y)(z)=(g\circ\mathscr{H}(F))(z) \tag{23}$$

命题 1 若 $F,G\in(S)_{-1}$,则有

$$\mathscr{H}(F\diamond G)(z)=\mathscr{H}(F)(z)\cdot\mathscr{H}(G)(z) \tag{24}$$

对所有的 z 成立,使得 $\mathscr{H}(F)(z)$ 和 $\mathscr{H}(G)(z)$ 存在.

定义 9 对于 $0<R,q<\infty$,$\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ 的无限维邻域 $K_q(R)$ 定义为

$$K_q(R)=\left\{(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in\mathbf{C}^{\mathbf{N}}:\sum_{\alpha\neq0}|\xi^\alpha|^2(2\mathbf{N})^{q\alpha}<R^2\right\} \tag{25}$$

下面介绍本文最重要的 $(S)_{-1}$ 特征定理.

定理 3 (1) 如果 $F=\sum_{\gamma\in J}C_\gamma K_\gamma\in(S)_{-1}$,则存在着 $q,M_q<\infty$,使得对所有的 $z\in(\boldsymbol{C}^{\mathbf{N}})_c$,下面的不等式成立:

$$|\mathscr{H}F(z)|\leqslant\sum_{\gamma\in J}|c_\gamma||z^\gamma|\leqslant M_q\Big(\sum_{\gamma\in J}(2\mathbf{N})^{q\gamma}|z^\gamma|^2\Big)^{1/2} \tag{26}$$

特别地,对于所有的 $R<\infty$,$\mathscr{H}F$ 在 $K_q(R)$ 上为有界解析函数.

(2) 反之,假设 $g(z)=\sum_{\gamma\in J}b_\gamma z^\gamma$ 为 $z\in(\boldsymbol{C}^{\mathbf{N}})_c$ 的级数,满足:存在着 $q<\infty$,$R>0$,且 $g(z)$ 为绝对收敛并且在 $K_q(R)$ 上有界,那么存在着惟一的 $G\in(S)_{-1}$ 使得 $\mathscr{H}G=g$,即 G 具有如下的形式:

$$G=\sum_{\gamma\in J}b_\gamma K_\gamma$$

2 随机薛定谔方程的白噪声解法

随机薛定谔方程形如

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Delta U+V(x)\diamond U(x)=-f(x); & x\in D\\ U(x)=0; & x\in\partial D\end{cases} \tag{27}$$

其中 D 为 $\mathbf{R}^d$ 上的有界区域,$V(x)$、$f(x)$ 为随机分布过程.称 $V(x)$ 为位势.

在本文中,考虑如下形式的随机薛定谔方程:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Delta U(x)+\rho\exp^\diamond[\dot{\eta}(x)]\diamond U(x)=-f(x);\\ \quad x\in D\\ U(x)=0;\quad x\in\partial D\end{cases} \tag{28}$$

其中 $f(x)$ 为给定的随机分布过程,$\rho\exp^\diamond[\dot{\eta}(x)]$ 是位势,$\dot{\eta}(x)$ 为纯跳 Lévy 白噪声,$\exp^\diamond[\dot{\eta}(x)]$ 为 Wick 指数.

在解此方程之前,先做一些假设:令 $\{b_t\}_{t\geqslant0}$ 为 $\mathbf{R}^d$ 上的辅助布朗运动;$\hat{E}^x$ 表示起始于 x 的、在概率测度 $\hat{p}^x$ 下的期望.

定义 10 $\{b_t\}_{t\geqslant0}$ 的首次退出时定义为

$$\tau_D=\inf\{t\geqslant0,b_t\notin D\} \tag{29}$$

令 λ_0 表示使下面边界值问题有有界解 $U\in C^2(D)$ 的最小 λ:

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\Delta U(x)=\lambda U(x); & x\in D\\ U(x)=0; & x\in\partial_R D\end{cases} \tag{30}$$

其中 $\partial_R D$ 为 D 的正则边界,根据已知结论,则 λ_0 与 τ_D 有如下的关系:

命题 2 对所有的 $x\in D$,有

$$\lambda_0=\sup\{\rho\in\mathbf{R};\hat{E}^x[\exp[\rho\tau_D]]<\infty\} \tag{31}$$

引理 2[6] 令 G 为一个 $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d$ 上的有界开子集.设过程 $U:G\to(S)_{-1}$,满足 $\mathscr{H}(U)=u$.令 U 和其偏导数 $\dfrac{\partial U}{\partial t}$,$\left(\dfrac{\partial U}{\partial x_j}\right)_{j=1,\cdots,d}$,$\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial {x_j}^2}\right)_{j=1,\cdots,d}$ 在 $G\times K_q(R)$ 上有界;对所有的 $z\in K_q(R)$,U 和其偏导数关于 $(t,x)\in G$ 连续,对所有的 $(t,x)\in G$,$q<\infty$,$R>0$,U 和其偏导数在 $z\in K_q(R)$ 上为解析的.则在 $K_q(R)$ 上有

$$\mathscr{H}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)=\frac{\partial u}{\partial t};\ \mathscr{H}(\Delta U)=\Delta u;\ \mathscr{H}(\nabla U)=\nabla u$$

定理 4 令 $f(x)$ 为 $(S)_{-1}$ 过程,满足条件:$\tilde{f}(x,z)$ 对于某个 q_1,R_1,在 $(x,z)\in D\times K_{q_1}(R_1)$ 上为有界的.令 D 为 $\mathbf{R}^d$ 的有界区域,而且其所有的点在 D 中为经典 Dirichlet 问题规则的.令 $\rho<\lambda_0$ 为常数,则存在着惟一的 $(S)_{-1}$ 过程解 $U(x)$,满足随机薛定谔方程(28):

$$U(x)=\hat{E}^x\left[\int_0^{\tau_D}\exp^\diamond[\rho\exp^\diamond(\dot{\eta}(b_s))\mathrm{d}s]\diamond f(b_t)\mathrm{d}t\right] \tag{32}$$

证明　首先，利用 Hermite 变换得到方程

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\Delta u(x,z)+\rho\exp[\widetilde{\dot{\eta}}(x)(z)]\cdot u(x,z)= \\ \quad -\widetilde{f}(x);\quad x\in D \\ u(x,z)=0;\quad x\in\partial D\end{cases} \tag{33}$$

解方程(33)，利用 Feynmann-Kac 公式，得到

$$u(x,z)=\hat{E}^x\left[\int_0^{\tau_D}\exp[\rho\exp(\widetilde{\dot{\eta}}(b_s,z))\mathrm{d}s]\times \widetilde{f}(b_t,z)\mathrm{d}t\right] \tag{34}$$

接下来证明 $u(x,z)$ 的有界性：对 $z\in K_q(R)$

$$\begin{aligned}&|\widetilde{\dot{\eta}}(b_s,z)|^2= \\ &m\left|\sum_{j=1}^{\infty}\zeta_j(b_s)z_{\kappa(j,1)}\right|^2\leqslant \\ &m\sup_{j,x}|\zeta_j(x)|^2\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|z_{\kappa(j,1)}|\Big)^2\leqslant \\ &m\sup_{j,x}|\zeta_j(x)|^2\sum_{j=1}^{\infty}|z_{\kappa(j,1)}|^2\times \\ &(2\mathbf{N})^{\epsilon_{\kappa(j,1)}}\sum_{j=1}^{\infty}(2\mathbf{N})^{-\epsilon_{\kappa(j,1)}}\leqslant \\ &m\sup_{j,x}|\zeta_j(x)|^2R^2\sum_{j=1}^{\infty}(2\kappa(j,1))^{-q}:= \\ &C(q,R)^2<\infty\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}&|u(x,z)|\leqslant \\ &M\hat{E}^x\left[\int_0^{\tau_D}\exp\left[\rho\int_0^t\exp[C(q,z)]\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t\right]= \\ &M\hat{E}^x\left[\int_0^{\tau_D}\exp[\rho\exp[C(q,z)]t]\mathrm{d}t\right]\leqslant \\ &\frac{M}{\rho\exp[C(q,R)]}\hat{E}^x\left[\exp[\rho\exp[C(q,R)]\tau]\right]\end{aligned} \tag{36}$$

$$M=\sup\{|\widetilde{f}(x,z)|;(x,z)\in D\times K_{q_1}(R_1)\}$$

选取 $q_2,R_2,\varepsilon>0$，使得 $\rho e^{C(q_2,R_2)}<(1-\varepsilon)\lambda_0$，则对于 $q\geqslant\max(q_1,q_2)$，$R\leqslant\min(R_1,R_2)$，$(x,z)\in D\times K_q(R)$

$$|u(x,z)|\leqslant\frac{M}{\rho\exp[C(q,R)]}\hat{E}^x[\exp[(1-\varepsilon)\lambda_0\tau]]<\infty \tag{37}$$

下面验证 $U(x)$：由 $u(x,z)$ 在 $z\in(\mathbf{C}^{\mathbf{N}})_c\cap K_q(R)$ 上为解析的，则根据引理 2，存在着 $U(x)\in(S)_{-1}$，使得 $\mathscr{H}(U)=u$.

对式(34)利用 Hermite 反变换和 $(S)_{-1}$ 特征定理，可得

$$U(x)=\hat{E}^x\left[\int_0^{\tau_D}\exp^{\diamond}[\rho\exp^{\diamond}(\dot{\eta}(b_s))\mathrm{d}s]\diamond f(b_t)\mathrm{d}t\right] \tag{38}$$

接下来的引理给出：在一定的特定条件下，将 $\eta(x)$ 表示成 $\eta_\phi(x)$ 后，方程(34)的解在“弱”的意义下，可以存在于 $L^1(\upsilon)$ 中，其具体证明过程是文献[4]中定理 4.4.2 的平行推广，不在本文中具体给出.

引理 3　使 D 为 $\mathbf{R}^d$ 上的有界区域，且 $\partial D=\partial_R(D)$，设：$f(x)$ 为确定的，且在 $\overline{D}$ 中有界；$\rho<\lambda_0$. 对 $x\in\overline{D}$ 和 $\phi\in S(\mathbf{R}^d)$，定义

$$U(x)=U(\phi,x,\omega)= \hat{E}^x\left[\int_0^{\tau_D}\exp^{\diamond}\left[\rho\int_0^t\exp^{\diamond}[\eta_\phi(b_s)]\mathrm{d}s\right]f(b_t)\mathrm{d}t\right] \tag{39}$$

那么，(1)$U(x)\in L^1(\upsilon)$，$x\to U(x)\in L^1(\upsilon)$ 对 $x\in\overline{D}$ 为连续的.

(2)$U(x)$ 在弱分布的意义下，对 $x\in D$，满足随机薛定谔方程：

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\Delta U(x)+\rho\exp^{\diamond}[\dot{\eta}_\phi(x)]\diamond U(x)=-f(x); \\ \quad x\in D \\ U(x)=0;\quad x\in\partial D\end{cases} \tag{40}$$

即存在着 $\Omega_\phi\subset S'(\mathbf{R}^d)$，$\upsilon(\Omega_\phi)=1$，对 $\omega\in\Omega_\phi$，$\psi\in C_0^\infty(D)$ 使得

$$\frac{1}{2}(U,\Delta\psi)+\rho(\exp^{\diamond}[\dot{\eta}_\phi]\diamond U,\psi)=-(f,\psi) \tag{41}$$

其中$(\cdot,\cdot)$表示 $L^2(\mathbf{R}^d)$ 上的内积.

3　结　语

本文最终所得到的随机薛定谔方程的解是分布空间 $(S)_{-1}$ 上的一个过程. 从形式上可以看到，这个解包含了 $(S)_{-1}$ 空间上特有的结构，如 Wick 乘积、Lévy 白噪声过程等. 应用白噪声分析的方法解随机薛定谔方程在文献[4]中有所讨论. 所不同的是：文献[4]中讨论方程的随机项是由 Gauss 白噪声过程的 Wick 幂驱动的，即方程(27)

中的 $V(x)=\rho\exp^{\diamond}[W_{\phi}(x)]$，这表示物理系统中的随机因素是连续的. 本文所得到的解和文献[4]中的解具有相似的形式，但在具体意义上有很大的区别. 文献[4]中的解存在于Gauss分布函数空间，在弱分布的意义下，属于 $L^1(\mu)$，μ 为Gauss白噪声测度. 本文中的解(38)存在于纯跳Lévy分布函数空间，在弱分布的意义下，属于 $L^1(\upsilon)$，υ 为纯跳 Lévy 白噪声测度.

参考文献：

[1] HIDA T. White noise analysis and its application [C] // **Proceedings of the International Mathematical Conference**. Amsterdam:[s n], 1982:43-48

[2] KONDRATIEV Y, DA SILVA J L, STREIT L. Generalized Appell system [J]. **Methods of Functional Analysis and Topology**, 1997, **3**:28-61

[3] KONDRATIEV Y, DA SILVA J L, STREIT L, *et al*. Analysis on Poisson and Gamma spaces [J]. **Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability Related Topics**, 1998, **1**:91-117

[4] HOLDEN H, ϕKSENDAL B, UBϕE J, *et al*. **Stochastic Partial Differential Equations — A Modeling, White Noise Functional Approach** [M]. Boston:Birkhäuser, 1996.

[5] LϕKKA A, ϕKSENDAL B, PROSKE F. Stochastic partial differential equations driven by Lévy space time white noise [J]. **Annals of Applied Probability**, 2004, **14**: 1506-1582

[6] PROSKE F. The stochastic transport equation driven by Lévy white noise [J]. **Communications in Mathematical Sciences**, 2004, **2**:627-641

[7] HOLDEN H, LINDSTRϕM T, ϕKSENDAL B, *et al*. Stochastic boundary value problem: A white noise functional approach [J]. **Probability Theory and Related Fields**, 1993, **95**:391-419

Stochastic Schrödinger equation driven by pure jump Lévy white noise

FENG Jing-hai*, WANG Yan, FENG En-min

(Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The white noise approach for stochastic Schrödinger equation (SSE) driven by pure jump Lévy white noise is presented. The potential of the SSE is proportional to the Wick exponential of pure jump Lévy white noise, which describes the physical system with jump. The white noise approach is based on $(S)_{-1}$-characterization theorem. The SSE is firstly reduced to the ordinary non-random Schrödinger equation (OSE) by Hermite transform, which can be solved by Feynmann-Kac formula. Then the solution of the SSE is obtained by $(S)_{-1}$-characterization theorem, converting the solution of the OSE to a $(S)_{-1}$-process . Furthermore, the solution is in $L^1(\upsilon)$ in sense of weak distribution under some certain conditions.

Key words: pure jump Lévy white noise; Wick product; Hermite transform; stochastic Schrödinger equation