文章编号:1000-8608(2008)06-0875-06

结构动力数值分析的时频域转换算法研究

景月岭^{1,2},李建波^{1,2},林 $a^{*1,2}$

(1.大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室,辽宁 大连 116024;
 2.大连理工大学 工程抗震研究所,辽宁 大连 116024)

摘要:研究地震波激励信号及结构响应之间在时频域上的数值对照关系,对于结构动力分析方法的深入发展,及先进时域算法的频域考题验证均有重要意义.首先从理论上公式推导 了复数域傅里叶频谱求解方法与实数域三角函数频谱求解方法之间的等价条件,从而在离散 傅里叶变换之外,找到了一种可求解时程曲线针对任意频率点频谱的三角函数频谱算法.并 针对阻尼体系的动力响应分析,进行了频域与时域算法在激励输入与结构响应领域的转换关 系的解析推导,为结构动力响应求解提供了一种新思路.最后,以多质点的阻尼体系的动力响 应分析为例数值验证了该方法的有效性.

关键词:时频域转换;三角级数;傅里叶变换;频谱;动力响应中图分类号:TU311 文献标志码:A

0 引 言

时域、频域算法在结构动力数值分析中均得 到广泛应用.频域算法表达简练,具有计算量小, 便于以解析手段分析问题的优势,常应用于一些 特殊领域的动力理论推导,如结构与半无限地基 间的动力相互作用^[1].结构频域响应也往往被看 做时域响应稳态过程的体现.随着计算机技术的 飞速发展,简单频域算法逐渐向复杂的时域算法 过渡,这是由于结构时域数值分析适宜考虑破坏 阶段的非线性力学特征,并能提供瞬时响应数据, 较频域算法结果更具信息完备的特点.传统的波 谱频域分析方法也在向全时域方法过渡,如损伤 检测领域^[2].就目前来看,时域算法蓬勃发展.这 也使得研究时频域算法之间的数值转换关系更显 重要.

信号是随时间变化的物理量,具有时间特性 和频率特性^[3],因而信号处理在时域、频域或其他 变换域中均可进行.在频域中,为了实际地获得各 种复杂信号中特定频率的分量,人们常常通过离 散傅里叶变换得到信号的频谱信息,但这些基于 离散傅里叶变换的方法限定了频率点的输出,Δω 的谱线频率间隔使得不能得到任意频率点的频 谱.而本文从波动信号的不同表达出发,利用实数 域三角级数表达与复数域傅里叶级数表达的等价 性,对傅里叶频谱求解方法与三角函数频谱求解 方法之间的等价条件进行公式推导;并在信号频 谱的时频域求解方法等价性条件的基础上,着重 对结构动力响应数值求解中涉及到的激励输入信 号和结构响应的时频域转换问题进行探讨,确定 信号输入与结构响应在时域、频域中的对应转换 关系,在结构动力数值分析的时域解、频域解之间 架起一座桥梁.

复数域傅里叶频谱求解与实数域 三角函数频谱求解之间数值关系

表达一个完整的波动信息 *x*(*t*),主要有如下 3 种级数表达途径;

(1) 以幅值 A_n 、相位 φ_n 及离散频率点 ω_n 表征

收稿日期: 2006-12-04; 修回日期: 2008-10-04.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(90510018,50578032);教育部创新团队资助项目(IRT0518);大连理工大学青年教师培养基金资助项目.

作者简介:景月岭(1983-),男,博士生,E-mail:yljing2000@126.com;林 皋*(1929-),男,教授,博士生导师,中国科学院院士.

的三角级数组合

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t - \varphi_n)$$
(1)

(2) 以三角系数 *a_n*、*b_n* 与离散频率点 ω_n 表征的三角级数组合

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \quad (2)$$

其中

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \omega_n t dt$$
 (3)

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin \omega_n t dt \qquad (4)$$

T表示波动函数 x(t) 的持时.

(3) 复域的傅里叶级数变换形式

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i\omega_n t} d\omega$$
 (5)

其中 c_n 即为 x(t) 针对角频率 ω_n 的频谱值,其值求 解如下:

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) e^{-i\omega_n \tau} d\tau \qquad (6)$$

 c_n 的模 | c_n | 就是 x(t) 的频谱幅值(简称为频谱).

作为波动时程的不同表达方式,式(2)、(5) 是等价的,数学等价性推导见文献[4].

由欧拉公式,可推导频谱值 *c_n* 与 *a_n、b_n* 之间的关系如下:

$$c_{n} = \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) e^{-i\omega_{n}\tau} d\tau =$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) (\cos \omega_{n}\tau - i\sin \omega_{n}\tau) d\tau =$$

$$\frac{T}{2}a_{n} - i\frac{T}{2}b_{n}$$
(7)

即

$$a_n - \mathrm{i}b_n = \frac{2}{\mathrm{T}}c_n \tag{8}$$

由上述推导可看出,三角系数 $a_n \otimes b_n$ 分别反 映了 c_n 的实部、虚部. 而若通过离散傅里叶变换, 由于 $\Delta \omega$ 的选取使得谱线间存在跳跃,对于某一 指定的频率点,可能并不存在该谱线,通常是采用 在波动持时里追加一段很长的零值区段,减小 $\Delta \omega$,以近似找到该谱线,但这样延长波动持时势 必从某种程度上破坏波动信号的时程信息. 相比 较而言,由于 a_n 、 b_n 存在解析的三角函数表达,如 此,可以计算针对任意频率点上的频谱值,所以三 角函数频谱算法存在明显时域优势,尤其针对地 震工程,如在结构动力响应中分离出地震卓越周 期对应的频域上的频谱值.

2 结构动力数值分析的时频域转换 理论推导

在结构动力分析中,时程信号主要包括输入的地震激励信号,及结构响应信号.频域算法往往把外部输入激励表达为简洁的复域形式 P₀e^{iat} 或 其组合,而对应的结构频域输出响应则可用 U₀e^{iat} 表达.其中 P₀ 为激励幅值,U₀ 可理解为频域解的 响应幅值.

时域算法求解则直接以时程信息作为输入, 基于此,如何构架等价的时域与频域地震波激励 信号输入,及如何理解对应的结构响应之间的关 系,是工程界普遍关注的问题.一是仅以外部激励 频域表达的实部 P₀ cos ω_l t或虚部 P₀ sin ω_l t 作为 输入,便可获得完备的频域响应;二是需要两者分 别输入,然后对时域响应作某种组合,取得对应的 频域解.

下面将以阻尼体系的动力响应求解为例,详 细阐述这一问题.

2.1 频域响应求解

首先给出阻尼体系的运动方程

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\,\dot{u} + \omega^2\,u = P_0\,\mathrm{e}^{\frac{i\omega_1\,i}{2}} \tag{9}$$

设频域响应 $u = U_0 e^{i\omega_1 t}$.则解得结果为

$$u = \frac{P_0}{\sqrt{\widetilde{\omega}^2 + \widehat{\omega}^2}} (\sin \theta - i\cos \theta) e^{i\omega_1 t} \quad (10)$$

其中

$$\widetilde{\omega} = \omega^2 - \omega_1^2$$
, $\hat{\omega} = 2\zeta\omega\omega_1$ (11)

$$\sin \theta = \frac{\widetilde{\omega}}{\sqrt{\widetilde{\omega}^2 + \widehat{\omega}^2}}, \quad \cos \theta = \frac{\widehat{\omega}}{\sqrt{\widetilde{\omega}^2 + \widehat{\omega}^2}}$$
(12)

对应的频域解为

$$U_{0} = \frac{P_{0}}{\sqrt{\widetilde{\omega}^{2} + \widehat{\omega}^{2}}} \sin \theta - i \frac{P_{0}}{\sqrt{\widetilde{\omega}^{2} + \widehat{\omega}^{2}}} \cos \theta \quad (13)$$

2.2 时域响应求解及其与频域解的关系

首先,若仅输入频域外载激励 P₀e^{io₁t} 的实部

 b_1

 $P_0 \cos \omega_t$,则运动方程可写为

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega \dot{u} + \omega^2 u = P_0 \cos \omega_1 t$$
 (14)
解得的稳态解如下:

$$u(t) = \frac{P_0}{\sqrt{\widetilde{\omega}^2 + \hat{\omega}^2}} (\sin \theta \cos \omega_1 t + \cos \theta \sin \omega_1 t)$$

(15)

(16)

(17)

利用三角函数频谱求解方法得到式(15)与 ω₁ 对应的三角系数 *a*₁、*b*₁ 如下:

$$a_{1} = \frac{2}{T} \int_{0}^{T} u(t) \cos \omega_{1} t dt = \frac{P_{0}}{\sqrt{\widetilde{\omega}^{2} + \hat{\omega}^{2}}} \sin \theta$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin \omega_1 t dt = \frac{P_0}{\sqrt{\widetilde{\omega}^2 + \widehat{\omega}^2}} \cos \theta$$

对比频域解答式(13)不难发现 $a_1 - ib_1$ 即为 频域响应, a_1 是频域解答的实部, $-b_1$ 是频域解 答的虚部.

其次,若仅输入虚部 $P_0 \sin \omega_1 t$,则运动方程 如下:

 $\ddot{u} + 2\zeta\omega \dot{u} + \omega^2 u = P_0 \sin \omega_1 t$ (18) 解得的稳态解如下:

$$u(t) = \frac{-P_0}{\sqrt{\widetilde{\omega}^2 + \widehat{\omega}^2}} (\cos \theta \cos \omega_1 t - \sin \theta \sin \omega_1 t)$$

(19)

同理利用三角函数频谱求解方法得到式(19) 与 ω₁ 对应的三角系数 *a*₁、*b*₁ 如下:

$$a_{1} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cos \omega_{1} t dt = \frac{P_{0}}{\sqrt{\widetilde{\omega}^{2} + \widehat{\omega}^{2}}} \cos \theta$$

$$(20)$$

$$b_{1} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \sin \omega_{1} t dt = \frac{P_{0}}{\sqrt{\widetilde{\omega}^{2} + \widehat{\omega}^{2}}} \sin \theta$$
(21)

其中 $\tilde{\omega}$ 、 $\tilde{\omega}$ 的表达见式(11), sin θ 、cos θ 表达同式(12).

对比频域解答式(13)不难发现 i(a₁ - ib₁)即 为频域响应,a₁ 是频域解答的虚部,b₁ 是频域解 答的实部.

从以上时域响应求解结果并对比式(13)的频

域解答可以看出,若外部激励复域表达的实部、虚部均输入,然后对时域响应作某种组合,则得到频 谱幅值是错误的.在时域结构动力分析中无论是 输入复域外载谐波的实部还是虚部,从结构时程 响应中均能提取出对应的频域解答.从而可达到 用频域经典理论算例验证时域先进算法的目的. 在下文中将以多自由度结构动力响应分析为例验 证这一点.

3 算例验证

3.1 矩形脉冲激励信号频谱求解

$$u(t) = \begin{cases} 1; & 0 \le t \le 1\\ 0; & t > 1 \end{cases}$$
(22)

矩形脉冲时程如图1所示.



Fig. 1 Time history of rectangular pulsed excitation

例1 持时 6.283 185 3 s,求角频率 ω=10 rad/s 的谱值.

表1中本文方法(1024)表示三角函数频谱 算法,在矩形脉冲持时内取1024个频率点;而本 文方法(2048)表示三角函数频谱方法在矩形脉 冲持时内取2048个频率点.则从表1计算结果 可以看出,与其他3种方法相比,三角函数频谱算 法求解对应的频谱、实部、虚部及相位信息的精度 与离散傅里叶变换方法差别不大.并且时间步长 越短,结果越精确.但在选择矩形脉冲持时时,为 使离散傅里叶变换含有所求频率点,需要刻意调 整脉冲持时,否则可能无法精确捕捉到该频率点.

表 1	数值角	驿 与理	论解对	昭表	(例)	1
/VL I		1 - 1 - 1		1111/12	< <i>V</i> J	/

Tab. 1 Comparison of results between numerical and theory solutions (Case 1)

频谱	理论解	本文方法(1024)	相对误差/%	本文方法(2 048)	相对误差/%	$FFT^{[5]}$	相对误差/%	$\mathrm{DFT}^{[6]}$	相对误差/%
实部	-0.01732	-0.014 81	-14.49	$-0.016\ 11$	-6.99	-0.01813	4.68	-0.01751	1.10
虚部	-0.05854	-0.059 99	2.48	-0.05928	1.26	-0.06630	13.26	-0.05901	0.80
幅值	0.061 05	0.061 79	1.21	0.061 43	0.62	0.068 72	12.56	0.061 56	0.84
相位	-106.48	-103.87	-2.45	-105.29	-1.20	-105.29	-1.12	-106.53	0.04

3.2 正弦波

例 2 *u*(*t*) = sin 10*t*, 持时 20 s, 求 ω= 10 rad/s 的谱值, *u*(*t*)时程分布如图 2 所示.



从图 3 及表 2 对比可以看出,三角函数频谱 算法与 FFT、DFT 绘制的角频率-频谱图吻合很 好,但三角函数频谱算法可以准确捕捉到所求的 角频率谱值,精度也与离散傅里叶变换相差无几.



Fig. 3 Frequency spectrum of harmonic wave

表 2 不同方法计算结果比较(例 2)

Tab. 2	Comparison of results for the various
	numerical methods (Case 2)

方法	$\omega/(rad \cdot s^{-1})$	А
DFT	10.05	9.55
FFT	10.05	9.54
本文方法	10.00	9.99
理论值	10.00	10.02

3.3 多自由度结构动力响应分析

例 3 如图 4 所示,求解质点 2 的时域及频域 响应. 计算中,取简谐荷载 F₁ = P₀ e^{iω},其中 P₀ = 24.5 N, ω = 20 rad/s.

图 4 所示结构体系的振型比例阻尼 ζ = 0.05,对应的两阶自振角频率, ω_1 = 32.418 rad/s, ω_2 = 10.05 rad/s.

首先,建立以复域谐波 $P_0 e^{i\alpha t}$ 作为输入的频 域求解方程:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 9.26176 & -5.42592 \\ -5.42592 & 11.97473 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 2 304 & -2 304 \\ -2 304 & 3456 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 e^{i\alpha t} \\ 0 \end{bmatrix}$$
(23)



图 4 计算模型

Fig. 4 Numerical analysis model

设频域理论解答 $u_1 = \bar{u}_1 e^{i \omega t}, u_2 = \bar{u}_2 e^{i \omega t}.$ 则频域理论解答为

 $\bar{u}_1 = -0.007 313 37 - 0.000 962 65i (24)$

 $\bar{u}_2 = -0.0115293 - 0.000171959i$ (25)

其中下面质点 2 的频谱 | \bar{u}_2 | = 0.011 53 m.

其次,参考第2章的结论,以复域激励的虚部 作为输入,建立时域运动方程:

文三角函数频谱算法求出 $u_2(t)$ 对应的三角系数 a_n, b_n 的基础上,以i $(a_n - ib_n)$ 组合,获得相应的频 域解答.具体频谱幅值对照表见表 3.同时,运用 FFT、DFT方法求解 $u_2(t)$ 针对 ω 频谱幅值,以上 3 种方法的计算所得频谱曲线见图 6.

从图 6 对比结果可以看出,三角函数频谱算法与 FFT、DFT 绘制的角频率-频谱图基本重合, 这说明三角函数频谱算法与常规的离散傅里叶变换方法相比精度上差别不大.但离散傅里叶变换 方法在频率点的输出上具有跳跃性.



Fig. 5 Response history for the No. 2 particle

表 3 不同方法计算结果比较(例 3)

Tab. 3 Comparison of results for the various numerical methods (Case 3)

参数	理论解	本文方法(12)	相对误差 /%	本文方法(24)	相对误差 /%	FFT(19.894 6)	相对误差 /%	DFT(19.894 6)	相对误差 /%
实部/m	-0.011 53	-0.01105	-4.16	-0.01113	-3.47	-0.00827	-28.27	-0.006 47	-43.89
频谱/m	0.011 53	0.011 40	-1.13	0.011 43	-0.87	0.010 78	-6.55	0.010 78	-6.48



图 6 质点 2 频谱图 Fig. 6 Frequency spectrum for the No. 2 particle

以获取角频率为 20 rad/s 的实部、频谱为 例,表 3 将说明这一问题.表 3 中,本文方法(12) 表示三角函数频谱算法计算时,时域响应 $u_2(t)$ 的 持时取 12 s;本文方法(24)表示三角函数频谱算 法计算时,时域响应 $u_2(t)$ 的持时取 24 s;由于 FFT、DFT 方法无法捕捉到 20 rad/s 的频率点, 用最为靠近的频率点 19.894 6 rad/s 代替,FFT (19.894 6)表示用快速傅里叶变换获取的角频率 为 19.894 6 rad/s 的实部、频谱幅值;DFT (19.894 6 rad/s 的实部、频谱幅值.

由于频域理论解答中的虚部较实部小,表 3 中仅比较 ω=20 rad/s 对应频域解的实部及频谱 幅值. 从表 3 的对照结果可以看出,三角函数频谱 算法的结果与理论解相比,差别很小. 由于 FFT、 DFT 不能准确捕捉到 20 Hz 的频率点,而只能用 靠近的频率点近似,与理论解相比偏差较大. 与之 对照的三角函数频谱算法是基于解析的三角函数 表达,可得到任意频率点的频谱,并且随着响应时 程持时的延长,精度逐渐提高. 所以该方法与离散 傅里叶变换相比,存在输出完备的频谱信息的优 势.

4 结 论

(1)针对任意给定频率点的频谱信息,按本 文三角函数频谱算法进行计算,对应的时域三角 系数 a_n 、 b_n 与频域傅里叶频谱 c_n 及波动持时 T 间 存在如下关系: $a_n - ib_n = 2c_n/T$.

(2)针对结构动力响应的时域分析,可仅输入频域分析中复域激励的实部或虚部对应的时程,在获得结构时程域响应后,通过本文的三角函数频谱算法得到对应结构时程响应的三角系数 *a_n*及*b_n*,结合公式*a_n*-*ib_n*或*i*(*a_n*-*ib_n*)便可得到相应的结构频域响应.

(3)以矩形脉冲、谐波信号以及多自由度结构 动力响应的时频域数值算法转换为例,验证了本 文三角函数频谱算法的有效性和精度.同时该算 法可用于频域经典理论算例对先进时域算法的验 证.

(4)为获得具有目标反应谱的地震动,人们常 常根据地震动的特性参数如傅里叶幅值谱、相位 谱、相位差谱等,结合统计的方法生成人工地震 动^[8].而通过三角函数频谱算法可获取任意频率 点上的频谱,在此基础上,以指定频率点的频谱作 为目标建立参数优化的约束方程来达到拟合特殊 形式人工地震动的目的.

参考文献:

[1] 李建波.结构-地基动力相互作用的时域数值分析方 法研究[D].大连:大连理工大学,2005

- [2] 李国强,李 杰.工程结构动力检测理论与应用[M].北京:科学出版社,2002
- [3] 袁晓辉. 信号频谱密度函数的几种常用求法[J]. 电 工教学, 1995, **17**(2):20-23
- [4] 南京工学院数学教研组. 积分变换[M]. 北京:高等 教育出版社, 2003
- [5] 徐士良. FORTRAN 常用算法程序集[M]. 北京:清 华大学出版社, 1995
- [6] 冷建华. 傅里叶变换[M]. 北京:清华大学出版社, 2004
- [7] 钟万勰. 应用力学对偶体系[M]. 北京:科学出版社, 2002
- [8] 杨庆山,姜海鹏.基于相位差谱的时-频非平稳人造 地震动的反应谱的拟合[J].地震工程与工程震动, 2002, 22(1):32-38

Research on numerical conversion algorithms of structure dynamic analysis in time and frequency domains

JING Yue-ling^{1,2}, LI Jian-bo^{1,2}, LIN Gao^{*1,2}

(1. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
 2. Earthquake Engineering Research Division, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The research on the numerical relations between signal of seismic wave input and output responses is significant for further study of the methods of structural dynamic analysis and the verification of advanced time domain algorithm in frequency domain. Firstly, the condition of equivalence between Fourier transform and trigonometric series is deduced in theory, then an algorithm of trigonometric function is introduced to obtain spectrum of arbitrary frequency excluding the methods of discrete Fourier transform. Considering the dynamic response of damp system, the analytical verification of relations between signal input and output responses in time and frequency domains is carried out. Finally, availability of the trigonometric function algorithm is proved through dynamic response analysis of multiple particles damp system.

Key words: transformation of time and frequency domains; trigonometric series; Fourier transform; frequency spectrum; dynamic response