

三维类桁架材料结构弹塑性分析

牛 斌, 阎 军*, 程耿东

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 由在空间周期性排布的三维类桁架材料组成的结构弹塑性分析可知, 如果按空间桁架计算, 由于构件数量巨大, 需要的计算规模和计算时间惊人, 甚至不可行. 为此采用数值均匀化方法对三维类桁架材料构成的结构进行等效弹塑性分析, 并和离散建模的空间桁架计算结果进行对比, 计算结果表明等效分析可以大大节省计算时间, 缩小计算规模, 为类桁架材料复杂结构的计算和优化提供了一种可能. 算例说明该方法不依赖于网格, 可以应用于不同加载路径. 最后给出了半圆柱形结构的等效分析, 说明了方法的适用性.

关键词: 三维; 类桁架材料; 弹塑性分析; 数值均匀化

中图分类号: O343.2 **文献标志码:** A

0 引言

近年来, 对具有轻质和多功能等优势的多孔固体材料研究和应用渐增^[1]. 多孔材料按其微结构规则程度可分为无序泡沫化材料和有序点阵类材料两大类. 由于泡沫化材料较差的力学性能, 近年来对周期性微单胞材料, 特别是类桁架材料研究较多. 类桁架材料, 杆件以拉压为主, 材料的比强度和比刚度高, 更有实际应用意义.

三维类桁架材料的代表性研究工作如下: Wallach 等^[2]对比了这类材料的杆模型和梁模型, 误差仅有 1.4%; 文献[3]研究了类桁架材料杆件缺失对弹性模量和拉伸强度等力学性能的影响, 得到桁架材料比蜂窝和泡沫材料对缺陷较不敏感的结论; Deshpande 等^[4]通过数值和解析方法研究了八面体桁架单胞的等效弹性性能, 以及屈服和弹性屈曲破坏面.

这些三维类桁架材料等效模量和屈服面等的研究很重要, 但是三维金属类桁架材料用于现代航空航天及工业设计时, 面临的载荷环境多种多

样, 材料构件很可能进入塑性, 由于这类三维结构中的微构件数量巨大, 如果按每根构件计算, 计算规模和时间都很大, 甚至不可行. 因此研究三维类桁架材料结构的弹塑性高效计算方法很有实际意义.

基于数学均匀化的弹塑性分析已有许多工作^[5,6]. Terada 等^[7]指出了此类方法求解非线性问题的不足, 给出了能够处理更一般非线性问题的数值均匀化算法. 刘岭等^[8]基于数值均匀化方法, 给出了类桁架材料结构的宏微观两级弹塑性计算格式, 对二维类桁架材料结构进行了等效弹塑性分析.

本文基于 Terada 等^[7]的数值均匀化方法, 将刘岭等^[8]提出的计算方法推广至由三维类桁架材料组成的结构的弹塑性分析, 考虑不同加载路径, 将典型的类桁架材料组成的三维块体结构等效弹塑性计算和相应块体结构按空间桁架进行完全弹塑性计算进行对比. 最后, 计算一个半圆柱体结构以说明本文方法的有效性.

收稿日期: 2006-03-04; 修回日期: 2008-01-04.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(90816025); “九七三”国家重点基础研究计划资助项目(2006CB601205); 大连理工大学引进人才启动经费资助项目; 大连理工大学理学学科研究基金资助项目.

作者简介: 牛 斌(1981-), 男, 博士生; 阎 军*(1978-), 男, 讲师; 程耿东(1941-), 男, 教授, 博士生导师, 中国科学院院士.

1 基于数值均匀化方法的类桁架材料弹塑性分析方法

对于图1所示由具有周期性微结构的材料组成的结构,基于数值均匀化的弹塑性求解方法将原问题分解为宏观尺度和微观尺度两级,宏观尺度计算等效连续体结构,微观尺度计算材料代表体元,参考系分别为 $x_1-x_2-x_3$ 、 $y_1-y_2-y_3$ ^[7,8].

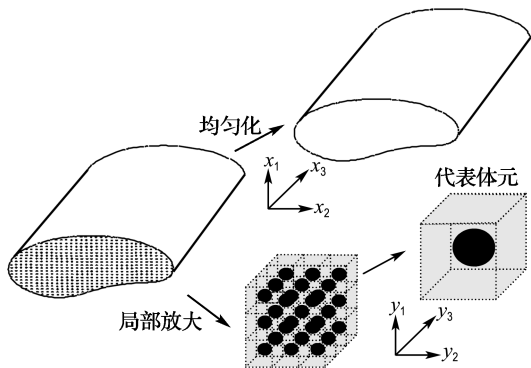


图1 非均质材料组成的结构

Fig. 1 Structure with heterogeneous material

这两级之间通过定义宏观应力 Σ 和宏观应变 E 分别为微观应力 σ 和微观应变 ϵ 在代表体元上的体积平均来建立联系:

$$\Sigma = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma dy, \quad E = \frac{1}{|Y|} \int_Y \epsilon dy \quad (1)$$

这里 Y 指微观计算的代表体元域, $|Y|$ 表示代表体元体积. 注意式(1)体现了数值均匀化区别于数学均匀化将物理量作小参数展开来建立宏微观联系的做法. 下面扼要给出求解格式, 特别注重三维和二维问题不同之处.

(1) 宏观尺度

宏观尺度上材料被等效为连续介质, 计算的是一个等效非均质连续体在约束和载荷作用下的非线性弹性问题, 采用连续体数值方法求解. 由于弹塑性分析的特点, 材料宏观等效模量 D , 也就是宏观应力 Σ 和宏观应变 E 之间的关系, 需要通过对于分析点(有限元计算中取为宏观单元的高斯点)处的单胞微观计算求解得到, 而且计算中材料等效模量 D 是随着迭代需要不断更新的. 宏观分析传递给微观分析的信息是分析点的当前宏观

应变 E .

(2) 微观尺度

在每一个分析点处, 求解在周期性边界条件及给定的宏观应变 E^i 下, 单胞强制协同变形放松过程中的弹塑性问题, 这是一个迭代的过程. 微观分析传递给宏观分析的信息是分析点处的当前宏观应力 Σ 和均匀化得到的当前材料等效模量 D .

三维问题中杆轴向应力应变向三维总体坐标系转换关系为

$$(\bar{\sigma}_k \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T = P_k \cdot \sigma_k \quad (2)$$

$$(\bar{\epsilon}_k \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T = Q_k \cdot \epsilon_k \quad (3)$$

其中 σ_k, ϵ_k 分别表示参考系 $y_1-y_2-y_3$ 下微观应力和应变, $\bar{\sigma}_k, \bar{\epsilon}_k$ 分别表示杆件轴向应力和应变, $\cdot_k (k=1, \dots, N)$ 对应第 k 杆件的物理量, N 为单胞中杆件数. $\bar{\sigma}_k, \bar{\epsilon}_k$ 的具体形式可由下面两式得到:

$$\bar{\sigma}_k = \sigma_x c^2 + \sigma_y s^2 + \sigma_z g^2 + 2\sigma_{yz} sg + 2\sigma_{xz} cg + 2\sigma_{xy} cs \quad (4)$$

$$\bar{\epsilon}_k = \epsilon_x c^2 + \epsilon_y s^2 + \epsilon_z g^2 + \gamma_{yz} sg + \gamma_{xz} cg + \gamma_{xy} cs \quad (5)$$

同时可以得到坐标系 $y_1-y_2-y_3$ 下的应变位移转化矩阵

$$b_k = \frac{1}{L_k} \begin{pmatrix} -c^3 & -c^2 s & -c^2 g & c^3 & c^2 s & c^2 g \\ -s^2 c & -s^3 & -s^2 g & s^2 c & s^3 & s^2 g \\ -g^2 c & -g^2 s & -g^3 & g^2 c & g^2 s & g^3 \\ -2csg & -2s^2 g & -2sg^2 & 2csg & 2s^2 g & 2sg^2 \\ -2c^2 g & -2csg & -2cg^2 & 2c^2 g & 2csg & 2cg^2 \\ -2c^2 s & -2cs^2 & -2csg & 2c^2 s & 2cs^2 & 2csg \end{pmatrix} \quad (6)$$

L_k 是杆件长度; $c = \cos \theta$, $s = \cos \beta$, $g = \cos \gamma$, 其中 θ, β, γ 是杆件 k 和坐标系 $y_1-y_2-y_3$ 轴的夹角.

微观计算时需要迭代, 以实现微观结构的应力自平衡. 应力自平衡可表示为

$$\sum_{k=1, \dots, N} b_k^T \cdot \sigma_k^i = 0 \quad (7)$$

将式(7) Taylor 展开并考虑坐标转换式(2)和(3)可以得到

$$\sum_k b_k^T \cdot d_k^{i,j} \cdot b_k \cdot \Delta u_k^{i,j} = - \sum_k b_k^T \cdot \sigma_k^{i,j} \quad (8)$$

$$\mathbf{d}_k^{i,j} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_k^{i,j}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k^{i,j}} = \mu_k^{i,j} \cdot \begin{pmatrix} c^4 & c^2 s^2 & c^2 g^2 & c^2 sg & c^3 g & c^3 s \\ c^2 s^2 & s^4 & s^2 g^2 & s^3 g & cs^2 g & cs^3 \\ c^2 g^2 & s^2 g^2 & g^4 & g^3 s & g^3 c & g^2 cs \\ c^2 sg & s^3 g & g^3 s & s^2 g^2 & g^2 cs & s^2 cg \\ c^3 g & cs^2 g & g^3 c & g^2 cs & c^2 g^2 & c^2 sg \\ c^3 s & cs^3 & g^2 cs & s^2 cg & c^2 sg & c^2 s^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

给定宏观应变 $\mathbf{E}^i$ 下第 j 步微观迭代所对应的物理量记为 $\cdot^{i,j}$. $\mathbf{u}$ 表示位移, μ 表示杆件切线模量. 式(8)右端项当 $j=0$ 时代表了微观迭代的初始驱动力, 实际上就是强迫微观结构发生整体宏观应变 $\mathbf{E}^i$ 时需要施加的力的负值.

(3) 宏微观的联系

宏微观的联系是通过桁架均匀化方法得到宏观等效连续体的分析点(高斯点)上的等效模量, 该等效模量是等效宏观非线性弹性当前切线模量, 具体列式参考文献[9]. 简要步骤是在周期性边界条件约束下微观上求解一组(空间三维问题是6个)协同变形载荷的弹性问题, 得到广义位移矩阵 $\boldsymbol{\chi}$, 然后可以得到等效模量

$$D^i = \frac{\sum_k [(d_k^i - d_k^i \cdot \mathbf{b}_k \cdot \boldsymbol{\chi}_k^i) \cdot L_k \cdot A_k]}{\sum_k (L_k \cdot A_k)} \quad (10)$$

其中 A_k 是杆件面积.

从以上对方法的简要描述和文献[8]的工作可以看到, 基于数值均匀化方法可以将宏观上具有微结构的三维类桁架材料结构弹塑性等效计算问题, 转化为宏观上一个非线性弹性连续体计算和微观上多个小规模桁架系统的弹塑性计算, 虽然这是一个宏微观迭代计算的过程, 但是为完全弹塑性计算困难甚至不可行的大规模三维类桁架材料结构分析提供了一种可行的变通策略. 从本文算例可以看到这种等效分析能够在保证一定精度的同时, 大大减小计算规模, 节省计算时间.

2 数值算例 I

2.1 计算模型

考虑如图2所示尺寸为 $0.4 \text{ m} \times 0.4 \text{ m} \times 1.0$

m 的由三维类桁架材料组成的一个块体结构, 一端固定, 另一端面上边施加2个方向 (x_2 负方向和 x_3 正方向) 的均匀线载荷. 计算中所用的单胞构型和各杆件面积尺寸如图3. 由于均匀化方法基于单胞无限小的假设, 单胞的实际尺寸在计算中不起作用, 这些值量纲均为1. 杆件材料的本构模型设为双线性及随动强化模型, 弹性阶段模量 $E_e = 210 \times 10^9 \text{ Pa}$, 塑性阶段模量 $E_p = 90 \times 10^9 \text{ Pa}$, 屈服应力 $\sigma_y = 3 \times 10^8 \text{ Pa}$. 宏观分析时有限元网格采用八节点六面体等参元, 网格划为 $8 \times 8 \times 20$.

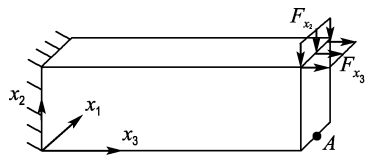
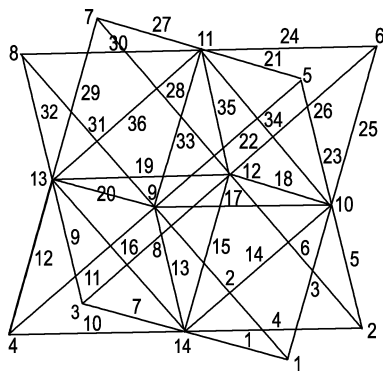


图2 宏观结构和边界条件

Fig. 2 Macrostructure with boundary conditions



注: $\text{Length}[1-36] = 1$, $A[1-12, 21-32] = 0.05$,

$A[13] = 0.1$, $A[14] = 0.08$, $A[15-20, 33-36] = 0.1$

图3 代表体元的构型、尺寸和截面积

Fig. 3 Configuration, size and section area of struts

2.2 简单加载下的结果比较

简单加载计算时两个方向的载荷大小分别为 $10^6 \text{ N/m} \times 0.4 \text{ m}$ 和 $10^7 \text{ N/m} \times 0.4 \text{ m}$. 作为比较, 本文对上述结构还按三维桁架计算, 此时单胞的实际尺寸对结果有影响, 本文计算了单胞尺寸不同的4种情况. 需要注意的是实际结构中单胞数目变化时, 要保证其体分比和图3中的微观结构一致.

表1取A点为比较点, 给出了数值均匀化方法和按照桁架建模求得的位移和求解耗时(微机性能: Pentium 2.4 GHz; 768 MB 内存)的比较.

由于是在 x_2, x_3 方向加载,只给出 x_2, x_3 方向位移的比较.

从表 1 的对比计算中可以得到以下结论:由于均匀化方法基于单胞无限小的假设,对于同样大小的宏观结构,反映材料微结构的单胞尺寸相对于宏观结构尺寸越小,数值均匀化的计算结果越接近按桁架结构做完整计算的结果.当单胞尺寸为 1.57 cm(单胞数 $18 \times 18 \times 45$,节点数 62 290,杆件数 357 696)时,数值均匀化和完全计算结果误差就在 5% 以下,满足工程上一般精度要求.文献[8]中指出对数值均匀化结果误差起控制作用的是宏观结构最小尺寸方向上的单胞数

目.从表 1 还可以看到当宏观结构较小尺度 x_1, x_2 上的单胞数大于 18 时,误差($|(\text{均匀化解} - \text{桁架解}) / \text{桁架解}|$)可以降到 5% 以下.当然,这个结论是对于这个算例得出的,对其他形式的结构可能有不同的最小数目单胞数要求.表 1 同时说明,数值均匀化相比桁架建模完全计算可以大大节省计算时间.材料微结构单胞尺寸越小,数值均匀化在时间上的效益也更加明显.当单胞尺寸小于 0.88 cm(单胞数 $32 \times 32 \times 80$,节点数 340 113,杆件数 1 990 656)时,三维桁架计算在微机上几乎无法运行,而数值均匀化法可以得到一个具有很高精度的近似分析结果.

表 1 与实际结构在节点 A 的位移和求解耗时比较

Tab. 1 Comparison of displacements and time consumption with complete computation at node A

方法	单胞数(单胞尺寸)	$u/10^{-3} \text{ m}$	$v/10^{-3} \text{ m}$	$w/10^{-3} \text{ m}$	v 误差/%	w 误差/%	t/s
数值均匀化 [网格 $8 \times 8 \times 20$]		-0.026 51	-13.435	-3.215 2			894.46
桁架完全计算	$18 \times 18 \times 45$ (1.57 cm)	-0.021 38	-12.904	-3.097 8	4.08	3.78	1 761
	$20 \times 20 \times 50$ (1.41 cm)	-0.022 44	-13.042	-3.130 5	3.01	2.71	4 375
	$24 \times 24 \times 60$ (1.18 cm)	-0.023 16	-13.137	-3.153 1	2.23	1.96	33 784
	$28 \times 28 \times 70$ (1.01 cm)	-0.023 75	-13.207	-3.169 6	1.73	1.44	61 987

图 4 给出了两种方法(桁架模型单胞数 $20 \times 20 \times 50$)在 $x_2=0, x_3=1 \text{ m}$ 和 $x_1=0, x_2=0$ 线上多点 x_2, x_3 方向的位移 v, w 的误差 E 曲线.其中

第 1 组节点是均匀化宏观计算有限单元节点(node set 1);第 2 组节点是非单元节点(node set 2).误差基本在同一水平.

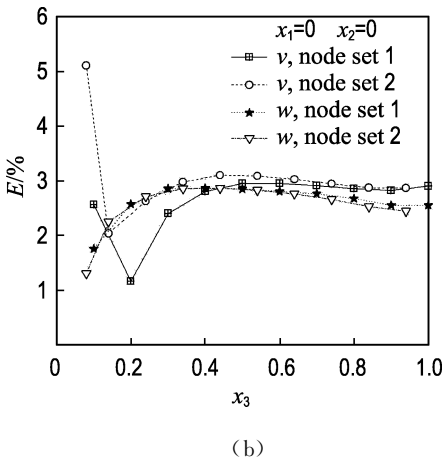
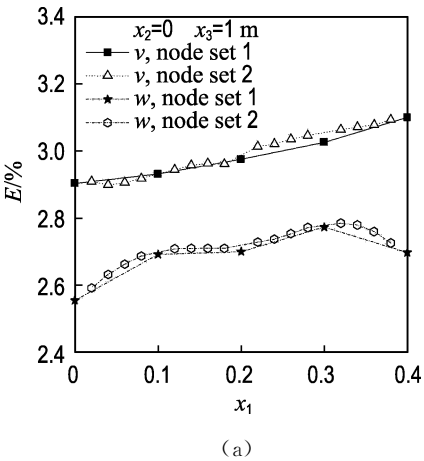


图 4 位移误差曲线
Fig. 4 Error curves of the displacements

2.3 不同网格划分

上面等效分析中使用了规则的宏观网格划分,实际的三维类桁架结构单胞为立方体,每个有限元单元总可以对应实际结构中一些单胞的组合.本文对宏观等效计算采用其他的网格划分,如图 5 所示.同样比较节点 A 的位移结果和计算耗时,见表 2.从表 2 可见,宏观网格划分对结果影响不大.本文还进行了其他网格划分的比较,限于篇幅此处没有列出.在工作量和计算时间上,不同的宏观网格划分会影响到宏观计算的自由度数和微观计算的次数,求解时间略有差别,但都保持在较低的水平.

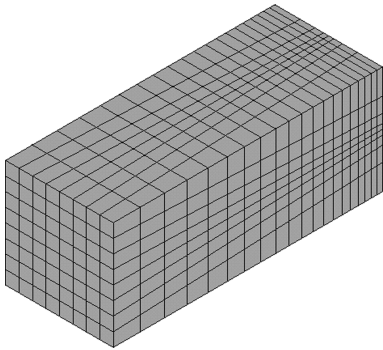


图 5 宏观网格划分

Fig. 5 Different FE mesh of macrostructure

表 2 不同网格下节点 A 的位移和耗时比较

Tab. 2 Comparison of displacements and time consumption using different mesh at node A

方法	$u/10^{-3}\text{ m}$	$v/10^{-3}\text{ m}$	$w/10^{-3}\text{ m}$	v 误差/%	w 误差/%	t/s
数值均匀化	-0.025 37	-13.452	-3.218 7			914.46
桁架完全计算	-0.022 44	-13.042	-3.130 5	3.14	2.81	4 375
[单胞 20×20×50]						

2.4 不同路径加载

图 6 显示了 3 种不同的加载路径 $R_k(k=1, 2, 3)$,虽然最终结构受到的载荷组合都是 $F_{x_2}=-10^6\text{ N}, F_{x_3}=0.6\times 10^7\text{ N}$.

分别采用数值均匀化方法计算这 3 种加载路径下的结构弹塑性响应,并且与按桁架结构做完全计算的结果进行比较,结果见表 3.其中加载路径 R_1, R_2 分别给出了(1)、(2)两阶段加载的比较, R_1 第(1)阶段加载 $F_{x_3}=10^7\text{ N}, F_{x_2}=0$; R_2 第(1)阶段加载 $F_{x_2}=-3\times 10^6\text{ N}, F_{x_3}=0$.不同加载路径得到了不同的结构响应,而与桁架计算对比,误差在较低水平,符合较好,可见基于数值均匀化

方法的弹塑性等效分析同样可以处理复杂加载路径的问题.

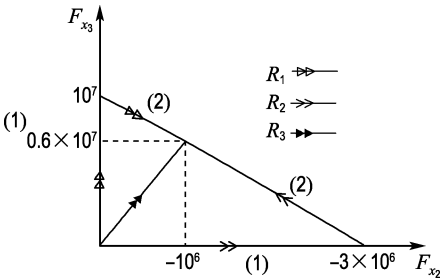


图 6 不同加载路径

Fig. 6 Different loading routines

表 3 不同加载路径的 A 点位移(10^{-3} m)结果比较

Tab. 3 Comparison of displacements (10^{-3} m) at node A under different loading routines

加载阶段		R_1			R_2			R_3		
		u	v	w	u	v	w	u	v	w
(1)	数值均匀化	-0.018 716	-9.341 3	-2.164 3	-0.033 426	-9.826 0	-2.749 8	—	—	—
	桁架完全计算	-0.007 379	-9.014 8	-2.093 9	-0.023 924	-9.385 8	-2.645 6	—	—	—
	E		3.62%	3.36%		4.69%	3.94%			
(2)	数值均匀化	-0.025 57	-8.938 3	-2.229 9	-0.021 12	-8.904 7	-2.218 9	-0.013 07	-8.609 6	-2.148 0
	$F_{x_2}=-10^6\text{ N}$ 桁架完全计算	-0.012 54	-8.611 9	-2.156 7	-0.012 39	-8.458 9	-2.119 1	-0.011 75	-8.451 9	-2.112 2
	$F_{x_3}=0.6\times 10^7\text{ N}$ E		3.79%	3.39%		5.27%	4.71%		1.87%	1.69%

注:数值均匀化,[网格 8×8×20];桁架完全计算,[单胞 20×20×50]

3 数值算例 II

为了适应实际结构的复杂构型和边界条件, 计算了如图 7 所示的三维类桁架材料组成的扁半圆柱体结构. 注意到在宏观结构的外边界上, 单胞不一定完整, 这样的问题更有一般意义. 该图中结构长 $L=1\text{ m}$, 截面扁半圆高 $H=0.3\text{ m}$, 圆的半径 $R=0.4\text{ m}$. 结构左端面($x_3=0$)固定, 底面加均布的线载荷($x_1=0.4\text{ m}, x_2=0$) $F_3=10^6\text{ N/m}$. 微观单胞构型和杆件材料的本构模型同算例 I.

采用数值均匀化方法计算结构的弹塑性响应(有限元节点数为 1 407, 八节点六面体单元数为 1 080), 并与按桁架结构做完全计算(节点数 248 230, 杆件数 1 443 156)在 A 点(见表 4)及其他一系列点处进行位移比较. 从对比结果可以看出, 基于数值均匀化的弹塑性求解方法对于较复

杂宏观构型的问题依然能够减小计算规模, 节省计算时间, 保证较好精度. 图 8 给出 $x_2=0, x_3=1.0\text{ m}$ 线上的多点 x_2, x_3 方向位移比较.

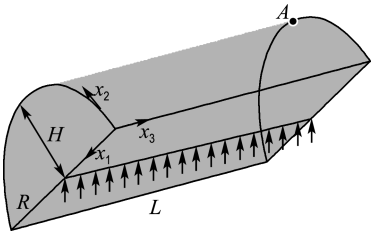


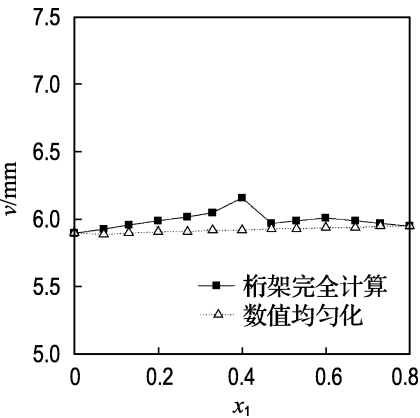
图 7 扁半圆柱形结构

Fig. 7 The 3-D structure as a semi-column

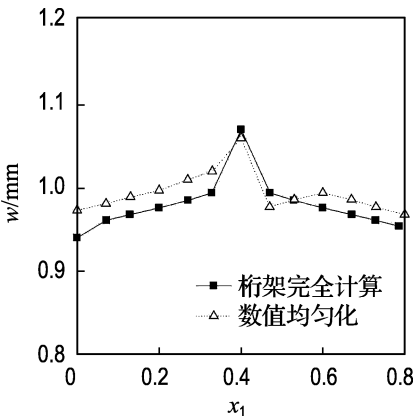
表 4 A 节点位移比较

Tab. 4 Comparison of displacements at node A

方法	$v/10^{-3}\text{ m}$	$w/10^{-3}\text{ m}$	v 误差/%	w 误差/%
数值均匀化	6.019 0	-1.385 0		
桁架完全计算	5.981 7	-1.379 8	0.63	0.38



(a) x_2 方向位移



(b) x_3 方向位移

图 8 位移比较

Fig. 8 Comparison of displacements

4 结 论

本文将数值均匀化方法推广至由三维类桁架材料组成的结构的弹塑性分析, 分析并讨论了在简单加载和非单调加载下的结构弹塑性响应, 并和相应三维桁架结构进行的弹塑性计算结果进行了对比, 说明本文方法在保证一定精度下能够提高计算效率. 等效连续体分析时, 宏观网格的划分对计算结果影响很小. 对于宏观构型复杂且包含有非完整单胞的结构, 此等效分析同样有效. 由于

三维桁架材料组成的结构按桁架完全计算时自由度很多, 对三维类桁架材料结构构件单独建模弹塑性分析优化计算规模和计算时间就更大, 基于数值均匀化方法的等效弹塑性分析方法为复杂三维类桁架材料结构的优化设计提供了可能.

本文的方法可以推广到其他单胞形式的有序点阵材料组成的结构弹塑性分析, 当材料宏观不均匀性的变化尺度大于单胞尺度时, 本文的方法也可应用.

参考文献：

[1] GIBSON L J, ASHBY M F. **Cellular Solids** [M]. Cambridge: Cambridge University, 1997

[2] WALLACH J C, GIBSON L J. Mechanical behavior of a three-dimensional truss material [J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2001, **38**(40-41):7181-7196

[3] WALLACH J C, GIBSON L J. Defect sensitivity of a 3D truss material [J]. **Scripata Materialia**, 2001, **45**(6):639-644

[4] DESHPANDE V S, FLECK N A, ASHBY M F. Effective properties of the octet-truss lattice material [J]. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 2001, **49**(8):1747-1769

[5] FISH J, SHEK K, PANDHEERADI M, *et al.* Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization: Theory and practice [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1997, **148**(1-2):53-73

[6] GHOSH S, LEE K, MOORTHY S. Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and Voronoi cell finite element model [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1996, **132**(1-2):63-116

[7] TERADA K, KIKUCHI N. A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2001, **190**(40-41):5427-5464

[8] 刘 岭, 阎 军, 程耿东. 二维类桁架材料结构弹塑性分析[J]. **力学学报**, 2007, **39**(1):54-62

[9] YAN J, CHENG G D, LIU S T, *et al.* Comparison of prediction on effective elastic property and shape optimization of truss material with periodic microstructure [J]. **International Journal of Mechanical Sciences**, 2006, **48**(4):400-413

Elasto-plastic analysis for 3D structures with truss-like material

NIU Bin, YAN Jun*, CHENG Geng-dong

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: For the problem of the elasto-plastic analysis of three-dimensional (3D) structure composed of truss-like material, it will be expensive or completely intractable in computational time and resources because of the enormous number of struts when all the struts are considered exactly. 3D structure with truss-like material is equivalently analyzed using numerical homogenization technique. In comparison with the complete analysis of discrete structure, the equivalent analysis can save computational time and considerably decrease the computational cost while maintaining high accuracy. The high efficiency of equivalent analysis also provides a possibility for the further design optimization of complicated structure with this material. The numerical examples show that the equivalent analysis can be used for different meshes and loading paths. The applicable conditions of the method are discussed in the last example of irregular macro-structures with non-integrated unit cells.

Key words: 3D; truss-like material; elasto-plastic analysis; numerical homogenization