第49卷第1期
2009年1月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 49, No. 1
Jan. 2009

文章编号：1000-8608(2009)01-0008-05

基于连续本构模型的泡沫铝弹塑性断裂问题无网格法分析

孙士勇[1]，陈浩然*[1]，胡晓智[2]

（1. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室，辽宁 大连 116024；
2. 西澳大利亚大学 机械工程学院，佩斯 WA6009）

摘要： 应用无网格伽辽金法对单轴远场拉应力加载下泡沫铝弹塑性断裂问题进行了分析. 首先，基于连续本构模型，将泡沫铝考虑成塑性可压缩材料，并通过引入 Weibull 分布，建立了宏观尺度上的泡沫铝本构关系. 其次，在无网格伽辽金法的基础上，采用应力应变增量形式表征材料的弹塑性本构关系，用罚函数法施加本质边界条件，并考虑裂纹区的不连续性，用 Newton-Raphson 增量迭代实现非线性分析. 最后通过算例讨论了概率参数对本构关系的影响，及泡沫铝相对密度与 J 积分值的变化规律. 算例分析表明 Weibull 分布中的尺度参数对泡沫铝的宏观力学性质和断裂参数 J 积分有较大影响，而形状参数影响较小.

关键词： 泡沫铝；无网格伽辽金法；连续本构模型；断裂；韦伯分布；J 积分

中图分类号： O341　　**文献标志码：** A

0 引 言

泡沫金属是一种以金属或金属合金为基体，包含大量孔洞的轻质多孔材料，是功能和结构一体化的新型工程材料. 泡沫金属以其独特的结构在物理、力学、热学、电学、声学上具有许多优异的性能. 低密度、高效的吸收能量和声、良好的力学强度以及高热传导使得泡沫金属有着广泛的潜在应用，如作为轻质结构、夹心板的芯体、热控制、包装材料和各种汽车零件. 近年来，随着制备工艺的成熟和生产成本的降低，泡沫金属在汽车工业、航空航天、建筑工业和铁路运输等领域的应用前景日益广泛.

国内外学者对泡沫金属在准静态和动态条件的力学性能进行了相应的研究，其中文献[1]对多孔材料的力学和物理性能作了较全面的论述. Blazy 等[2]通过大量的试验研究，对泡沫铝在复杂载荷条件下的力学响应和断裂问题进行了统计分析和尺度研究. Guo 等[3]基于连续本构模型，给出了泡沫金属平面应力裂纹扩展的解析解. Chen 等[4]运用内聚力模型，预测了泡沫金属 I 型裂纹的阻力曲线.

无网格法作为新的数值分析方法之一，近十年得到力学研究工作者的青睐，该方法分析裂纹问题有其独特的优势[5]. 无网格法的近似函数采用基于节点的函数拟合，可以保证基本场变量在整个求解域内连续；无网格法没有网格依赖性，可以灵活布置节点来取得理想的精度，且能避免网格重构带来的困难. 其中尤以无网格伽辽金法在断裂力学中得到较为广泛的应用[6,7].

本文基于连续本构模型，假设胞的屈服应变服从两参数 Weibull 分布，导出含非均匀分布参数的应力-应变关系表达式，从而建立能反映泡沫金属弹塑性状态的本构模型；同时应用无网格伽辽金法对单轴远场拉应力加载下泡沫铝平面裂纹问题进行弹塑性增量分析.

1 泡沫金属连续本构模型[8]

泡沫金属中胞的形状、大小和分布在不同材料中各不相同，自然会影响其力学与物理性能. 如果对胞的形状、大小和分布逐一追踪描述，则表述复杂，力学问题求解十分困难. 若针对不同的相对

收稿日期： 2007-03-22；　**修回日期：** 2008-12-11.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(10672017)；国家"九七三"重大基础研究计划资助项目(2006CB601205).
作者简介： 孙士勇(1981-)，男，博士生；陈浩然*(1940-)，男，教授，博士生导师，E-mail：chenhr@dlut.edu.cn；胡晓智(1957-)，男，教授，博士生导师.

密度 ρ^*/ρ_s 去测量其材料模量，例如 E、ν，那么在一定程度上能给出多孔材料力学性能的定量描写，这是一种唯象的方法. 1990 年，Triantafillou 等在 Gibson 等所提出的多孔材料屈服面的基础上，提出了多孔材料弹塑性本构方程[9].

金属与高分子多孔材料是弹塑性材料，具有塑性可压缩性，因而平均应力 $\sigma_m(=\sigma_{kk}/3)$ 或静水压力 $p(=-\sigma_m)$ 要进入塑性本构关系. 引入广义有效应力 $\hat{\sigma}$，材料的屈服 / 加载面方程可表示成

$$\Phi \equiv \hat{\sigma} - Y \tag{1}$$

文献[9] 建议有效应力 $\hat{\sigma}$ 计算式为

$$\hat{\sigma} = \sigma_e + 0.03\frac{\rho^*}{\rho_s}\sigma_m \tag{2}$$

其中 σ_e 为 von Mises 有效应力，

$$\sigma_e = \left(\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}\right)^{1/2} \tag{3}$$

考虑各向同性硬化，由流动法则和屈服演化方程，得到弹塑性本构方程

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij} + \frac{\dot{\hat{\sigma}}}{H(\hat{\sigma})}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}} \tag{4}$$

式中：$\dot{\varepsilon}_{ij}$ 为应变率；$\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}$ 为弹性应变率；$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$ 为塑性应变率；$\dot{\sigma}_{ij}$ 为应力率；E 为弹性模量；ν 为泊松比；δ_{ij} 为单位张量分量；$H(\hat{\sigma})$ 为硬化模量，可以由一维应力 - 应变关系近似标定，即 $H(\hat{\sigma}) = \mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\varepsilon^p$.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{3}{2}\frac{1}{\sigma_e}s_{ij} + 0.01\frac{\rho^*}{\rho_s}\delta_{ij} \tag{5}$$

2　考虑 Weibull 分布的应力-应变关系

图 1 是由文献[10]给出的开孔泡沫铝单向拉伸实验曲线，曲线过最高点后泡沫出现断裂破碎，本文暂不考虑软化现象，则基于 Ramberg-Osgood模型的一维幂硬化弹塑性应力-应变关系可以较好地满足实验结果[4]：

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon; & \sigma \leqslant \sigma_y \\ \sigma = \sigma_y(\varepsilon/\varepsilon_y)^N; & \sigma > \sigma_y \end{cases} \tag{6}$$

其中 ε_y 和 σ_y 分别为屈服应变和屈服应力，N 为应变硬化指数.

对于具有随机胞的开孔泡沫金属材料，可以通过引入概率统计函数来反映其微观上的不均匀性引起其宏观本构关系的随机特性. 假设仅考虑材料屈服应变的随机性，并假设其服从两参数的 Weibull 分布，则概率密度函数可表达为

$$f(\varepsilon_y) = \frac{m}{\eta}\cdot\left(\frac{\varepsilon_y}{\eta}\right)^{m-1}\cdot\exp\left[-\left(\frac{\varepsilon_y}{\eta}\right)^m\right] \tag{7}$$

分布函数为

$$F(\varepsilon_y) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\varepsilon_y}{\eta}\right)^m\right] \tag{8}$$

其中 η 是尺度参数，$m > 1$ 是形状参数.

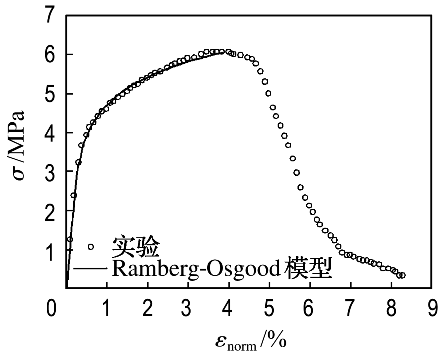

图 1　泡沫铝实验曲线与 Ramberg-Osgood模型的比较[10]

Fig. 1　Comparison between experimental and Ramberg-Osgood model results of uniaxial tensile stress-strain curves for aluminum foam material[10]

(1) 对于某一个胞，当 $\varepsilon < \varepsilon_y$ 时，该胞处于弹性阶段

$$\sigma = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y}\cdot\varepsilon \tag{9}$$

则屈服应变的分布函数为

$$P(\varepsilon < \varepsilon_y) = P(\varepsilon_y > \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{1} f(\varepsilon_y)\mathrm{d}\varepsilon_y \tag{10}$$

(2) 当 $\varepsilon \geqslant \varepsilon_y$ 时

$$\sigma = \sigma_y\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y}\right)^N \tag{11}$$

屈服应变的分布函数为

$$P(\varepsilon \geqslant \varepsilon_y) = \int_0^{\varepsilon} f(\varepsilon_y)\mathrm{d}\varepsilon_y \tag{12}$$

泡沫金属的宏观应力 σ 就应该是所有胞应力的统计平均值

$$\sigma = \int_{\varepsilon}^{1}\frac{\sigma_y}{\varepsilon_y}\cdot\varepsilon f(\varepsilon_y)\mathrm{d}\varepsilon_y + \int_0^{\varepsilon}\sigma_y\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y}\right)^N f(\varepsilon_y)\mathrm{d}\varepsilon_y \tag{13}$$

将式(7) 代入式(13)，可得到泡沫金属宏观应力的表达式

$$\sigma = \frac{\sigma_y\varepsilon}{\eta}\left\{\Gamma\left[1-\frac{1}{m},\left(\frac{1}{\eta}\right)^m\right] - \Gamma\left[1-\frac{1}{m},\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^m\right]\right\} + \sigma_y\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^N\Gamma\left[1-\frac{N}{m},\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^m\right] \tag{14}$$

其中 Γ 为 Gamma 函数.

3 弹塑性力学问题的无网格伽辽金法[11]

无网格伽辽金法用移动最小二乘(MLS)建立近似函数,建立时不需要借助网格.移动最小二乘近似函数的形式为

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{m}\Phi_I(\boldsymbol{x})u_I = \sum_{I=1}^{m}\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x})u_I \tag{15}$$

其中 m 是基函数的个数,$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})$ 是基函数,通常使用单项式作为基函数,也可以使用任何其他函数,如奇异函数.形函数 $\Phi_I(\boldsymbol{x})$ 为

$$\Phi_I(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \tag{16}$$

由于裂纹的存在,在构建近似函数时应当引入这种不连续性,常用的有可视准则、衍射法、穿透法等方法,这些方法对不同类型的问题有着不同的适用性.本文经比较采用衍射法方案.在计算权函数 $w(x-x_I)$ 时,点 x 和节点 I 的有效距离由下式给出:

$$s(x) = \left(\frac{s_1 + s_2(x)}{s_0(x)}\right)^{\lambda} s_0(x) \tag{17}$$

具体过程可参见文献[6].

由弹性力学控制方程得到其变分形式

$$\int_{\Omega}(\delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij} - \delta u_i b_i)\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t}\delta u_i \bar{t}_i \mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{18}$$

将移动最小二乘近似函数代入,得离散方程

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}^{\mathrm{ext}} \tag{19}$$

其中

$$\boldsymbol{K} = \int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega \tag{20}$$

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{ext}} = \int_{\Gamma_t}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{t}}\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\mathrm{d}\Omega \tag{21}$$

由于材料和结构的弹塑性行为与加载以及变形的历史有关,在进行结构的弹塑性分析时,通常将载荷分成若干个增量,然后对于每一个载荷增量,将弹塑性方程线性化,则可将这一弹塑性非线性分析问题分解为一系列线性问题来处理.具体推导过程参见文献[6、11].

4 算例分析及讨论

4.1 考虑 Weibull 分布时,参数对应力-应变关系及其导数的影响

基于图1的实验曲线,参照文献[2]参数取值范围,通过试算法,表1给出3组 Weibull 参数对弹性模量 E 的影响.由表1可知,参数 η 对弹性模量影响较大,η 越大,弹性模量越小,而参数 m 对其影响较小.

表1 Weibull 参数对弹性模量的影响

Tab.1 The effect of Weibull parameters upon elastic modulus

Weibull 参数		E/MPa
η	m	
0.003	8	1 275.6
0.004	8	956.7
0.003	5	1 241.1

图2和图3分别给出了不同参数下泡沫铝应力-应变关系及其导数变化曲线.由图分析可知:(1)考虑 Weibull 分布时的应力-应变曲线和其切线模量-应变曲线都是光滑连续的,并可以较好地反映泡沫铝在拉伸状态下的弹性及塑性硬化阶

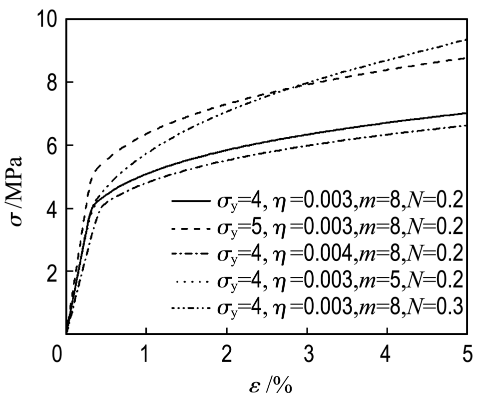

图2 不同参数下泡沫铝应力-应变曲线

Fig.2 The curves of stress vs. strain with different parameters

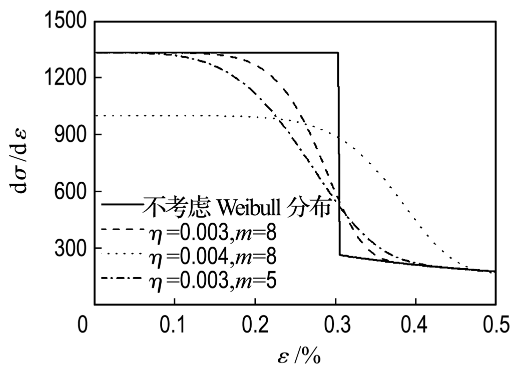

图3 不同参数下泡沫铝切线模量-应变曲线

Fig.3 The curves of tangent modulus vs. strain with different parameters

段，而不含 Weibull 分布时其切线模量-应变曲线有跳跃现象.(2)不同 Weibull 参数对两类曲线的影响是不同的，其中参数 m 对应力 - 应变曲线整体影响不大，但对切线模量 - 应变曲线有较大的影响，m 越大，材料越均匀，切线模量在屈服应变附近(由弹性阶段到塑性阶段)变化越剧烈；而 η 将影响曲线整体尺度，η 越小，材料屈服应变越小，初始切线模量越大.

4.2　本构参数对泡沫铝 J 积分值的影响

设一远场受均匀拉伸时跨中具有单边裂纹的泡沫铝矩形薄板，板长为 100 mm、宽为 50 mm，裂纹长 20 mm，在长边两侧受均布拉伸载荷作用.相对密度 $\rho^*/\rho_s=0.4$ 时，泡沫铝材料常数为 $E=1.276$ GPa，$N=0.2$，$\sigma_y=3.827$ MPa，$\nu=0.3$；Weibull 参数取为 $\eta=0.003$，$m=8$.计算中，在整个计算域布置 21×11 个均匀节点，20×10 个积分子域，每个子域采用 3×3 高斯积分.

图 4 为随外载增加 3 种不同相对密度的泡沫铝矩形薄板 J 积分值变化曲线.由图可知：(1) 在弹性阶段，泡沫铝矩形薄板的 J 积分值随外载增加其变化较平缓，而材料进入塑性阶段后，其 J 积分值随着外载的增加迅速增大.(2) 对于相同 J 积分值，泡沫铝的相对密度越大，则需要外载越大，说明材料越不易断裂.

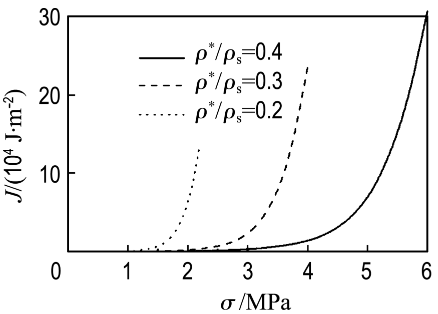

图 4　I 型平面应力状态下相对密度对 J 积分值的影响

Fig. 4　The influence of relative density ρ^*/ρ_s on J-integral values of mode I crack under plane stress

图 5 为在不同概率参数下，泡沫铝矩形薄板 J 积分值随外载增加的变化曲线.由图可知：(1) 当材料处于弹性阶段时，m 和 η 对 J 积分值影响不明显.(2) 当材料进入塑性阶段时，η 是尺度参数，η 越大，相同应力状态下，变形越大，J 积分值越大，材料越容易断裂，但是参数 m 是反映泡沫材料均匀程度的，其对 J 积分值影响较小.

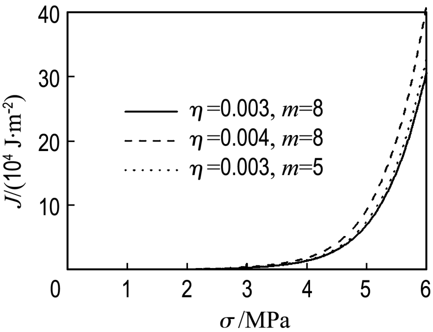

图 5　I 型平面应力状态下 Weibull 参数对 J 积分值的影响

Fig. 5　The influence of Weibull parameters on J-integral values of mode I crack under plane stress

5　结　论

(1)考虑概率分布时的本构模型可以反映开孔泡沫金属的弹性及塑性阶段分布特性.在 I 型平面应力状态下，用无网格法求出的具有单边裂纹泡沫金属的 J 积分值与屈服应力、幂硬化指数和 Weibull 分布参数有关.

(2)本文提出的考虑概率分布泡沫金属分析方法和结论将对泡沫金属的力学分析和优化设计提供一定的参考价值.

作者将无网格伽辽金法推广应用到分析弹塑性的不连续问题，该方法具有不需要划分网格和计算精度高等优点.今后，作者还拟将此方法应用于裂纹扩展分析问题，这将能进一步显示出其具有有限元法不可比拟的优越性.

参考文献：

[1] GIBSON L J, ASHBY M F. **Cellular Solids: Structures and Properties: 2nd ed.** [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997

[2] BLAZY J S, MARIE-LOUISE A, FOREST S, *et al*. Deformation and fracture of aluminium foams under proportional and non proportional multi-axial loading: statistical analysis and size effect [J]. **International Journal of Mechanical Sciences**, 2004, **46**(2): 217-244

[3] GUO Rui-ping, MAI Y W, FAN Tian-you, *et al*. Plane stress crack growing steadily in metal foams

[J]. **Materials Science and Engineering A**, 2004, **381**(1-2):292-298

[4] CHEN C, FLECK N A, LU T J. The mode I crack growth resistance of metallic foams [J]. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 2001, **49**(2): 231-259

[5] LI S, LIU W K. Meshfree and particle methods and their applications [J]. **Applied Mechanics Reviews**, 2002, **55**(1):1-34

[6] BELYTSCHKO T, FLEMING M. Smoothing enrichment and contact in the element-free Galerkin method [J]. **Computers and Structures**, 1999, **71**(2): 173-195

[7] RAO B N, RAHMAN S. An efficient meshless method for fracture analysis of cracks [J]. **Computational Mechanics**, 2000, **26**(4):398-408

[8] 范天佑. 断裂理论基础[M]. 北京:科学出版社, 2003

[9] TRIANTAFILLOU T C, GIBSON L J. Constitutive modeling of elastic-plastic open-cell foams [J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1990, **116**: 2772-2778

[10] 王 曦,虞吉林. 泡沫铝的单向力学行为[J]. 实验力学, 2001, **16**(4):438-443

[11] 龙述尧,陈莘莘. 弹塑性力学问题的无单元伽辽金法[J]. 工程力学, 2003, **20**(2):66-70

Element-free method for elasto-plastic fracture analysis of aluminum foam by a continuum constitutive model

SUN Shi-yong[1], CHEN Hao-ran[*1], HU Xiao-zhi[2]

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. School of Mechanical Engineering, University of Western Australia, Perth WA 6009, Australia)

Abstract: Element-free Galerkin (EFG) method is applied to solve the elasto-plastic fracture problems of aluminum foams under uniaxial tensile load. Firstly, a continuum constitutive model is taken into account for the plastic compressibility of aluminum foams. The Weibull statistical analysis is used to represent microscopic heterogeneity. Then, the increments of stress and strain are used to characterize the elasto-plastic constitutive relationship on the basis of EFG method with penalty function method. Considering the discontinuity of crack, Newton-Raphson iteration method is used in computation. Lastly, several examples are given to show the influence of parameter on curve of stress-strain and the relation of values of J-integral versus relative density. The numerical analysis for aluminum foams shows that the influence of the scale parameter of Weibull distribution upon macroscopic mechanical properties and fracture parameter J-integral is significant, while the shape parameter is not obvious.

Key words: aluminum foams; element-free Galerkin method; continuum constitutive model; fracture; Weibull distributions; J-integral