

一个非解析复映射的广义 Mandelbrot 集

王兴元*, 骆超

(大连理工大学 电子与信息工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 推广了 Michelitsch 等所提出的由一个简单非解析映射构造 Mandelbrot 集的方法, 并由推广的复映射, 构造出一系列实数阶的广义 Mandelbrot 集(简称广义 M 集). 利用复变函数理论和计算机制图相结合的实验数学方法, 对广义 M 集的结构和演化进行了研究. 结果表明: 广义 M 集的几何结构依赖于参数 α 和 R ; 整数阶广义 M 集具有对称性和分形特征; 小数阶广义 M 集出现了错动和断裂, 且其演化过程依赖于相角主值范围的选取.

关键词: 非解析映射; 广义 M 集; 分形; 演化

中图分类号: TP301.5 **文献标志码:** A

0 引言

近 20 年来, 人们对复映射 $z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha \neq 2)$ 所构造的 M 集已进行了深入研究, 发现其中深藏着规律性的结构^[1~5]. 在此基础上, 文献[6、7]研究了 $\alpha \in \mathbf{R}$ 的广义 M 集, 并基于其视觉结构特点提出了几点假设; Glynn 分析了 $\alpha > 0$ 的广义 M 集的对称演化^[8]; 文献[9、10]从理论上进行了研究, 提出了广义 M 集的嵌套拓扑分布定理和裂变演化规律, 证实了文献[6~8]的假设. 此外, Pickover、Hooper 和 Philip 曾分别提出了 ϵ 正交法、星迹法、区域分解法和角度分解法, 研究了 M 集非边界区域的分形结构^[11~13]; Lakhtakia 提出了开关 J 集的构造算法^[14]; Wang 推广了他们的方法, 研究了广义 M 集非边界区域和开关广义 M 集的分形结构^[15、16]. 1992 年, Michelitsch 等研究了复映射 $z \leftarrow \Theta(z^2) - c$ (Θ 为操作符, $\Theta z = \text{Re} z + i |\text{Im} z| = x + i |y|$) 的 M 集^[17], 该映射可转化为二维离散映射

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 - c_x \\ y_{n+1} = 2 |x_n y_n| - c_y \end{cases} \quad (1)$$

式(1)不满足 Cauchy-Riemann 条件^[18]

$$\begin{cases} \partial f_1(x, y)/\partial x = \partial f_2(x, y)/\partial y \\ \partial f_1(x, y)/\partial y = -\partial f_2(x, y)/\partial x \end{cases}$$

故式(1)为非解析映射. 本文将该映射推广为 $z \leftarrow \Theta(z^\alpha) - c (\alpha \in \mathbf{R})$, 并研究由推广后的映射所构造的广义 M 集的分形结构和裂变演化规律.

1 理论和方法

非解析映射 $f: z \leftarrow \Theta(z^\alpha) - c (\alpha \in \mathbf{R})$ 的临界点 z_0 是使其一阶导数为零的点. 若设 $z = re^{i\theta}$, 则 $f(z) = r^\alpha e^{\pm i\alpha\theta} - c$, $f'(z) = \alpha r^{\alpha-1} r' e^{\pm i\alpha\theta} \pm i\alpha r^\alpha e^{\pm i\alpha\theta} \theta'$, 故 f 的临界点应满足 $\alpha r^{\alpha-1} r' e^{\pm i\alpha\theta} \pm i\alpha r^\alpha e^{\pm i\alpha\theta} \theta' = 0$, 即 $\alpha r^{\alpha-1} e^{\pm i\alpha\theta} (r' \pm i r \theta') = 0$. 若 $\alpha \neq 0$, 由 $r' \pm i r \theta' \neq 0$, 可得

$$\begin{cases} \alpha < 1; & \text{临界点为 } z \rightarrow \infty \\ \alpha = 1; & \text{无临界点} \\ \alpha > 1; & \text{临界点为 } z = 0 \end{cases} \quad (2)$$

由非解析映射 f 构造广义 M 集, 应从 f 的临界点开始迭代, 可当 $\alpha > 1$ 时, 若取 $z_0 = 0$, 则 $z_1 = -c$, $z_2 = \Theta(-c)^\alpha - c \cdots$ 当 $\alpha < 0$ 时, 若取 $z_0 = \infty$, 则 $z_1 = -c$, $z_2 = \Theta(-c)^\alpha - c \cdots$ 因此为避免计算机溢出, 选取式(1)迭代初始点为 $z_0 = -c$, 这使得用计算机构造任意实指数 $\alpha \in \mathbf{R}$ 且 $\alpha \notin [0, 1]$ 的广义 M 集的操作得到了统一. 值得注意的是, 当 $\alpha \in [0, 1]$ 时, 仍用 $z_0 = -c$ 作为初始点迭代, 得到的图像不是真正的 M 集. 这是因为: $\alpha = 1$

时,因为无临界点,所以也就谈不上临界点的轨道;
 $0 \leq \alpha < 1$ 时,临界点为 ∞ , ∞ 的轨道上没有参数 $-c$,所以从 $-c$ 开始迭代的图像不是真正的 M 集.

定义 1 设 $f: z \leftarrow \Theta(z^\alpha) - c (\alpha < 0 \text{ 或 } \alpha > 1)$ 为黎曼球 $\hat{C}$ 上的复映射, M_f 表示 C 中 $-c$ 点的轨道有界的复数 c 的集合,即

$$M_f = \{c \in C: \{f^k(-c)\}_{k=1}^\infty \text{ 有界} \} =$$
$$\{c \in C: -c, \Theta(-c)^\alpha - c, \Theta[\Theta(-c)^\alpha - c]^\alpha - c, \cdots, \nrightarrow \infty, k \rightarrow \infty \}$$

则称 M_f 为相应于 f 的广义 M 集.

定义 1 是利用逃逸时间算法绘制 M_f 的计算机图像的理论基础^[4,5]. 选取逃逸半径 $R = \sqrt{200}$ 、逃逸时间限制 $N = 200$,利用逃逸时间算

法作者绘制了 $\alpha \in \mathbf{R}$ 的 M_f . 其中 $\alpha > 0$ 时,图中黑色为稳定区 M_f ,白色为不稳定区 $\overline{M_f}$; $\alpha < 0$ 时,图中白色代表稳定区 M_f ,黑色代表不稳定区 $\overline{M_f}$. 将 α 表示为 $\alpha = \pm(\eta + \epsilon)$,其中 η 是正整数, ϵ 为小数即 $0 < \epsilon < 1$,根据分形图的结构特点,可分 4 种情况来研究 M_f .

2 实验与结果

2.1 $\alpha = \eta$

图 1 为 α 取正整数时的广义 M 集,类似若干不规则的主要花瓣(简称主瓣)组成的花朵,稳定区嵌于不稳定区之中.

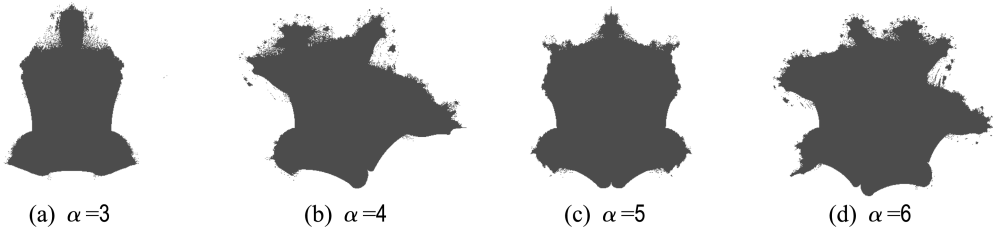


图 1 α 为正整数阶的广义 M 集

Fig. 1 The generalized Mandelbrot sets for positive integer value of α

定理 1 由复映射 $f: z \leftarrow \Theta(z^\alpha) - c (\alpha \in \mathbf{R})$ 构造广义 M 集,当 α 为奇数时,有

$$f^k(c) = -\overline{f^k(-\bar{c})} (k = 1, 2, \cdots, N)$$

证明 利用数学归纳法:由定义 1 知 $f^1(-c) = \Theta(-c)^\alpha - c$,故 $f^1(c) = \Theta(c^\alpha) + c$. 当 α 为奇数时,因

$$f^1(-\bar{c}) = \Theta(-\bar{c})^\alpha - \bar{c} = -[\Theta(\bar{c})^\alpha + \bar{c}] =$$
$$-(\|c\|^\alpha e^{\pm i\alpha\varphi} + \|c\| e^{-i\varphi})$$

所以

$$-\overline{f^1(-\bar{c})} = \|c\|^\alpha e^{\mp i\alpha\varphi} + \|c\| e^{i\varphi} = \Theta(c^\alpha) + c$$

故有 $f^1(c) = -\overline{f^1(-\bar{c})}$.

设

$$f^{k-1}(c) = -\overline{f^{k-1}(-\bar{c})}$$

成立,又 $f^k(c) = f^{k-1}[f(c)] = f^{k-1}[-\overline{f^1(-\bar{c})}]$
 $= -\overline{f^{k-1}[f^1(-\bar{c})]} = -\overline{f^k(-\bar{c})}$,故命题真.

定理 1 表明 α 为奇数时的广义 M 集关于 y 轴对称.

下面分析正整数阶的广义 M 集的分形结构:
由 $\alpha > 0$,可知原点及其邻域中的点 x 满足 $\|f^i(x)\| < R (i = 1, 2, \cdots, N)$,即 $x \in M_f$. 为此可认为主瓣中的点经一次迭代将趋向原点,主瓣

的中心 c_1 是原点的原像,即 $f^1(c_1) = 0$. 故有 $\Theta(c_1^\alpha) + c_1 = 0$,可得

$$c_1 = e^{i[(2m+1)\pi]/(\pm\alpha-1)};$$

$$m = 0, 1, \cdots, |\pm\alpha - 1| - 1 \quad (3)$$

由图 1 还可看到主瓣上生长着小花瓣,小花瓣上又生长着更小花瓣 $\cdots$ 这种结构在不同水平上嵌套出现. 经计算发现生长于主瓣上的最大小花瓣的中心经一次迭代到达主瓣中心,下一次迭代到达原点. 依此类推,若主瓣用 L^1 表示,某小花瓣中心 c_k 满足 $f^k(c_k) = 0 (2 \leq k \leq N)$,可用 L^k 表示它.

$\forall c \in L^k$,有 $f^k(c) \in L^{k-1}$. 设 L^k 的中心为 c_k , L^{k-1} 的中心为 c_{k-1} . 则 $f^1(c_k) = c_{k-1}$. 首先考虑 L^2 ,设其中心为 c_2 ,则有

$$\Theta(c_2^\alpha) + c_2 = c_1 \quad (4)$$

将式(3)代入式(4),即可求出 c_2 . 依此类推, L^k 的中心坐标为

$$\Theta(c_k^\alpha) + c_k = c_{k-1} \quad (5)$$

由式(3)可知 $\alpha = \eta$ 的广义 M 集的 L^1 的个数应为 2η ,可推出 L^k 的个数应为 $(2\eta)^k (1 \leq k \leq N)$. 上述分析表明 $N \rightarrow \infty$ 时,即理论意义上的正整数

阶的广义 J 集具有无穷嵌套的自相似几何结构.

2.2 $\alpha = \eta + \epsilon$

图 2 为 $\alpha = \eta + \epsilon$ 时的广义 M 集, 其类似若干主瓣及一部分花瓣(简称雏瓣)组成的花朵, 并随 ϵ 的增大, 雏瓣不断发育而演化成为一个主瓣. 这一现象可解释为由复映射

$$z \leftarrow \Theta(z^\alpha) - c \quad (6)$$

构造广义 M 集, 对 $\Theta(z^\alpha)$ 的计算, 采用了 DeMoivre 理论

$$\Theta(z^\alpha) = r^\alpha (\cos \alpha\theta + i |\sin \alpha\theta|) \quad (7)$$

这就涉及相角 θ 主值范围的选取, 本文选取 θ 的范围为以下 4 种情况: $[0, 2\pi)$ 、 $[-\pi, \pi)$ 、 $[-3\pi/2,$

$\pi/2)$ 和 $[-\pi/2, 3\pi/2)$. 当 $\alpha = \eta$ 时, 将不会影响式 (6) 的使用, 因

$$\begin{cases} \cos \alpha\theta = \cos (\alpha\theta + 2\pi\alpha) \\ \sin \alpha\theta = \sin (\alpha\theta + 2\pi\alpha) \end{cases} \quad (8)$$

但 $\alpha = \eta + \epsilon$ 时, 式 (7) 不成立, 故 θ 范围的不同选取将导致广义 M 集的不同演化. 另外在使用式 (6) 时, 若 $\alpha\theta$ 超出上述 4 种主值范围, 就要使 $\alpha\theta$ 加或减 2π 的整数倍来进行调整, 这就导致广义 M 集出现了错动和断裂, 产生了雏瓣, 且仅出现在相角 θ 不连续的正 x 、正 y 、负 x 或负 y 轴处, 可见雏瓣 L^1 的出现仅当 α 取正小数时.

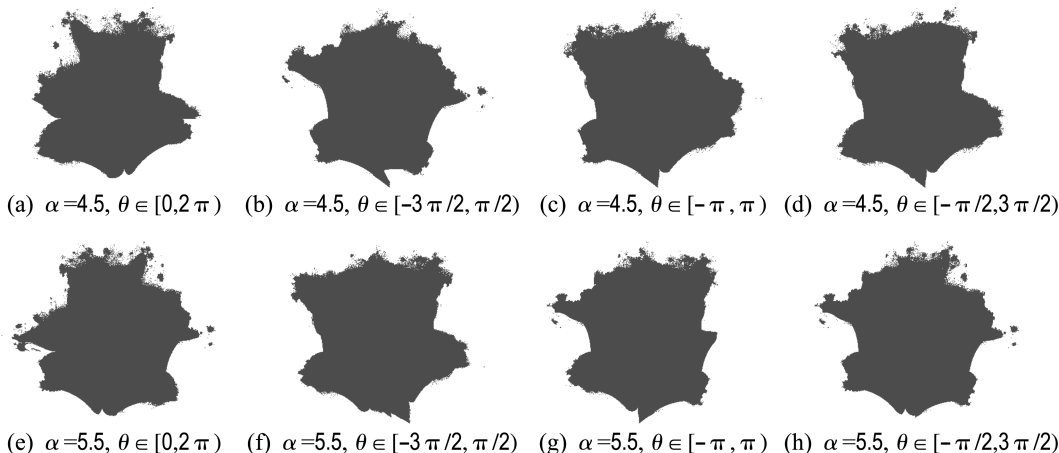


图 2 α 为正小数阶的广义 M 集

Fig. 2 The generalized Mandelbrot sets for positive decimal value of α

2.3 $\alpha = -\eta$

图 3 为 α 取负整数时的广义 M 集, 可见分形图为若干卫星群环绕中央行星的星群结构, 不稳

定区嵌于稳定区之中. 由定理 1 可知 α 为负奇数时的广义 M 集关于 y 轴对称.

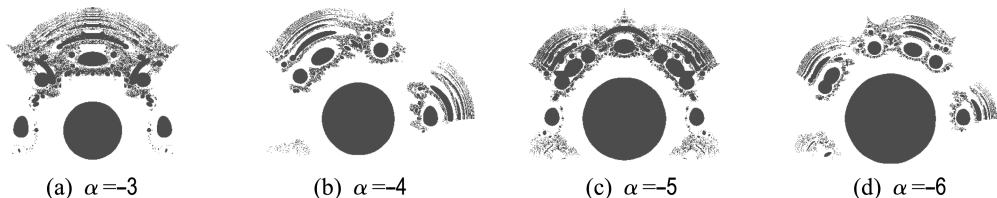


图 3 α 为负整数阶的广义 M 集

Fig. 3 The generalized Mandelbrot sets for negative integer value of α

定理 2 复映射 $f: z \leftarrow \Theta(z^\alpha) - c (\alpha < 0)$ 所产生的广义 M 集的中央行星为以原点为圆心、半径为 $R^{1/\alpha}$ 的近似圆.

证明 因为 $\Theta(z^\alpha) = r^\alpha e^{\pm i\alpha\theta}$, 对于 $\alpha < 0$, 若 $\|x\| < 1$, 则有 $\|f^1(x)\| \geq R$. 由计算知原点为行星中心, 故可认为中央行星上任意点 $c (\|c\| < 1)$ 都满足 $\|f^1(c)\| \geq R$. 又 $f^1(c) = \Theta(c^\alpha) + c$, 若令 $c = \|c\| e^{i\varphi}$, 则

$$f^1(c) = \|c\|^\alpha e^{\pm i\alpha\varphi} + \|c\| e^{i\varphi} \quad (9)$$

因 $\alpha < 0$, $\|c\| < 1$, 故 $\|c\|^\alpha \gg \|c\|$. 由式 (9) 得 $\|f^1(c)\| \cong \|c\|^\alpha$. $\|f^1(c)\| \geq R$, $\|c\|^\alpha \geq R$, 故可推得

$$\|c\| \leq R^{1/\alpha} \quad (10)$$

由式 (10) 知, 当 α 减小时, 中央行星的半径增大并趋于 1. 对式 (9) 求模的平方, 有

$$\|f^1(c)\|^2 = \|c\|^{2\alpha} +$$

$$2 \| c \| ^{\alpha + 1} \cos (\pm \alpha - 1) \varphi + \| c \| ^2$$

(11)

由式(11)可知 $\| c \|$ 为 θ 的函数,根据式(10)可将 $\| c \|$ 写成

$$\| c \| = R^{1/\alpha} [1 - \delta(\theta)]$$

(12)

这里 $\delta(\theta) \ll 1$. 将式(12)代入式(11),基于 $\| f^1(z) \|^2 \geq R^2$ 并取一阶近似,可得

$$\delta(\theta) \cong \frac{\cos (\pm \alpha - 1) \varphi}{\alpha R^{1-1/\alpha}}$$

(13)

可见中央行星与圆的误差具有 $| \pm \alpha - 1 |$ 倍的旋转对称性,且最大误差发生在 $\varphi = 2k\pi / (\pm \alpha - 1) (k \text{ 为整数,且 } 0 \leq k \leq | \pm \alpha - 1 | - 1)$ 处.

定理 2 的证明中并没规定 α 取负整数,故定理 2 的结论也适用于 α 取负小数时的情况.

中央行星上的任意点 c 满足 $\| f^1(c) \| \geq R$,可用 B^1 表示它. 若某卫星上的任意点 c 满足 $\| f^k(c) \| \geq R$ 且 $\| f^{k-1}(c) \| < R$,则用 B^k 表示该卫星.

$\forall c \in B^2, \exists f^1(c) \in B^1$ 和 $\| f^2(c) \| \geq R$. 设 B^2 的中心为 c_2, B^1 的中心为 c_1 ,则 $c_1 = 0$ (原点) 是 c_2 的像. 故有 $\Theta(c_2^o) + c_2 = 0$,则

$$c_2 = e^{i[(2m+1)\pi]/(\pm\alpha-1)};$$

$m = 0, 1, \dots, | \pm \alpha - 1 | - 1$

(14)

由式(14)可知 B^2 的个数为 $2 | \alpha |$. 由图 3 可见 B^2 即为卫星群中最大的卫星.

由图 3 还可看到主要卫星周围环绕着小卫星,小卫星周围又环绕着更小卫星 $\dots$ 这种结构在不同水平上嵌套出现. 下面讨论高阶小卫星 $B^k (3 \leq k \leq N): \forall c \in B^k, \exists f^1(c) \in B^{k-1}$. 设 B^k 的中心为 c_k, B^{k-1} 的中心为 c_{k-1} ,则 $f^1(c_k) = c_{k-1}$. 首先考虑 B^3, B^2 的中心是 B^3 的中心 c_3 的像. 即

$$\Theta(c_3^o) + c_3 = c_2$$

(15)

将式(14)代入式(15),即可求出 c_3 . 依此类推, B^k 的中心坐标为

$$\Theta(c_k^o) + c_k = c_{k-1}$$

(16)

由式(14)、(15)可推出 B^k 的个数应为 $| 2\alpha |^{k-1} (1 \leq k \leq N)$. 上述分析表明 $N \rightarrow \infty$ 时,即理论意义上的负整数阶的广义 J 集具有无穷嵌套的自相似几何结构.

2.4 $\alpha = -(\eta + \epsilon)$

图 4 为 α 取负小数时的广义 M 集,它为若干个卫星群及一个卫星群胚胎环绕中央行星的不对称星群结构,并随 ϵ 的增大,卫星群胚胎不断发育而演化成为完整卫星群.

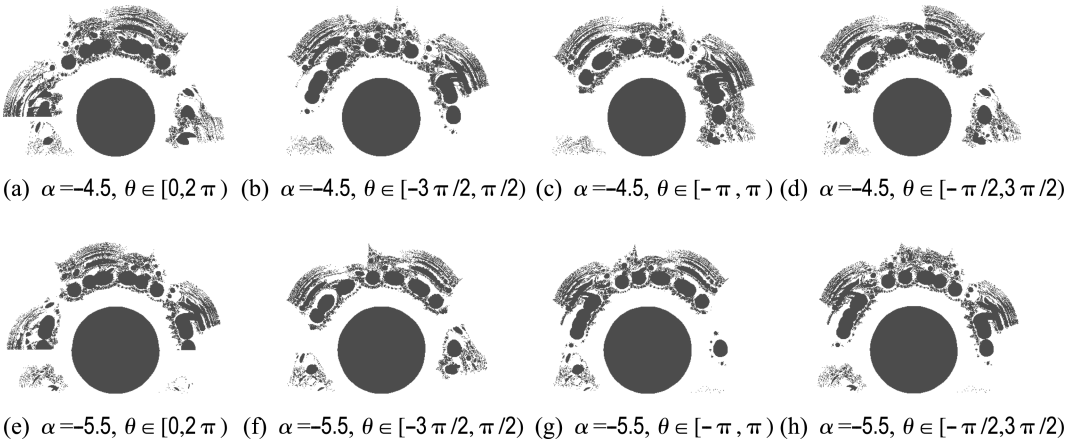


图 4 α 为负小数阶的广义 M 集

Fig. 4 The generalized Mandelbrot sets for negative decimal value of α

构造负小数阶广义 M 集仍然采用了 DeMoivre 理论,当 $\alpha = -\eta$ 时,式(7)成立,故不会影响式(6)的使用;但 $\alpha = -(\eta + \epsilon)$ 时,式(7)不成立,故 θ 范围的不同选取将导致广义 M 集的不同演化. 所不同的是在使用式(7)时, $\alpha\theta$ 可能超出上述 4 种主值范围,为此要使 $\alpha\theta$ 加或减 2π 的整数倍来进行调整,这就导致了广义 M 集部分卫星群的出现,且出现在相角 θ 不连续的正 x 、正 y 、负 x 或负 y 轴处,可见仅

当 α 取负小数时部分卫星群才会出现.

3 结 论

(1)推广了 Michelitsch 等所提出的由简单非解析映射 $z \leftarrow \Theta(z^2) - c$ 构造 Mandelbrot 集的方法,并由推广的复映射 $z \leftarrow \Theta(z^\alpha) - c (\alpha \in \mathbf{R})$ 构造出一系列广义 M 集. 利用复变函数理论和计算机制图相结合的实验数学方法,对广义 M 集的结构和演化进行了研究,发现整数阶广义 M 集具有对

称性和分形特征,小数阶广义 M 集出现了错动和断裂,且其演化过程依赖于相角主值范围的选取.

(2)非解析映射 $z \leftarrow \Theta(z^\alpha) - c (\alpha \in \mathbf{R})$ 的广义 M 集的几何结构依赖于参数 α 和 R ,但这一工作仍然是不完整的,如 $\alpha > 0$ 时广义 M 集花瓣的形状和大小以及 $\alpha < 0$ 时广义 M 集小卫星 $B^k (2 \leq k \leq N)$ 的形状和大小,还有待进一步研究.

参考文献:

- [1] MANDELBROT B B. **The Fractal Geometry of Nature** [M]. San Francisco:Freeman W H, 1982
- [2] PEITGEN H O, SAUPE D. **The Science of Fractal Images** [M]. Berlin:Springer-Verlag, 1988
- [3] BARNSELY M F. **Fractals Everywhere** [M]. Boston:Academic Press Professional, 1993
- [4] 王兴元. 复杂非线性系统中的混沌[M]. 北京:电子工业出版社, 2003
- [5] 王兴元. 广义 M-J 集的分形机理[M]. 大连:大连理工大学出版社, 2002
- [6] LAKHTAKIA A, VARADAN V V, MESSIER R, *et al.* On the symmetries of the Julia sets for the process $z \leftarrow z^p + c$ [J]. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, 1987, **20**:3533-3535
- [7] GUJAR U G, BHAVSAR V C. Fractals from $z \leftarrow z^\alpha + c$ in the complex c -plane [J]. **Computers & Graphics**, 1991, **15**(3):441-449
- [8] GLYNN E F. The evolution of the Gingerbread Man [J]. **Computers & Graphics**, 1991, **15**(4):579-582
- [9] WANG Xing-yuan, LIU Xiang-dong, ZHU

- Wei-yong, *et al.* Analysis of c -plane fractal images from $z \leftarrow z^\alpha + c$ for $\alpha < 0$ [J]. **Fractals**, 2000, **8**(3): 307-314
- [10] 王兴元,刘向东,朱伟勇. 由复映射 $z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha < 0)$ 所构造的广义 M 集的研究 [J]. 数学物理学报, 1999, **19**(1):73-79
- [11] PICKOVER C A. **Computers, Pattern, Chaos and Beauty** [M]. New York:St. Martin's Press, 1990
- [12] HOOPER K J. A note on some internal structures of the Mandelbrot set [J]. **Computers & Graphics**, 1991, **15**(2):295-297
- [13] PHILIP K W. Field lines in the Mandelbrot set [J]. **Computers & Graphics**, 1992, **16**(4):443-447
- [14] LAKHTAKIA A. Julia sets of switched processes [J]. **Computers & Graphics**, 1991, **15**(4):597-599
- [15] WANG Xing-yuan. Fractal structures of the non-boundary region of the generalized Mandelbrot set [J]. **Progress in Natural Science**, 2001, **11**(9): 693-700
- [16] WANG Xing-yuan. Switched processes generalized Mandelbrot sets for complex index number [J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2003, **24**(1): 73-81
- [17] MICHELITSCH M, RÖSSLER O E. The "Burning ship" and its quasi-Julia set [J]. **Computers & Graphics**, 1992, **16**(4):435-438
- [18] BLANCHAREL P. Complex analytic dynamics on the Riemann sphere [J]. **Bulletin of the American Mathematical Society**, 1984, **11**:88-144

Generalized Mandelbrot sets from a nonanalytic complex mapping

WANG Xing-yuan*, LUO Chao

(School of Electronic and Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The method constructing the Mandelbrot sets from a simple nonanalytic mapping developed by Michelitsch, *et al.* was expanded. According to the expanded complex mapping, a series of the generalized Mandelbrot sets for real index number were constructed. Using the experimental mathematical method combining the theory of analytic function of one complex variable with computer-aided drawing, the fractal features and evolutions of the generalized Mandelbrot sets were studied. The results show the following facts: the geometry structure of the generalized Mandelbrot sets depends on the parameters of α and R ; the generalized Mandelbrot sets for integer index number have symmetry and fractal feature; the generalized Mandelbrot sets for decimal index number have discontinuity and collapse, and their evolutions depend on the choice of the principal range of the phase angle.

Key words: nonanalytic mapping; generalized Mandelbrot sets; fractal; evolution