第49卷第1期
2009年1月
大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology
Vol. 49, No. 1
Jan. 2009

文章编号：1000-8608(2009)01-0144-03

混合成套产品定价最小价格矩阵解法

万福才*[1,2]， 王 伟[1]

（1.大连理工大学 信息与控制研究中心，辽宁 大连 116024；
2.沈阳大学 信息工程学院，辽宁 沈阳 110044）

摘要：电子商务网站可以通过与消费者的在线交互收集一些有用的信息，为价格决策提供有力的支持.通过得到的数据，运用可靠的分析工具确定产品价格，可以增加企业的收益.在描述混合成套产品定价方法的基础上，给出最小价格矩阵求解方法.对算法的复杂度分析表明，该算法具有较小的时间复杂度.实例分析证明，提出的方法适合求解混合成套产品定价模型，具有重要的实际应用价值.

关键词：产品单卖；纯成套产品定价；混合成套产品定价；最小价格矩阵
中图分类号：F224　　**文献标志码：**A

0 引 言

许多企业在提供主要产品的同时，还提供某些与主要产品密切关联的选择品.在制定价格时，企业经常将其生产和经营的产品组合在一起，制定一个成套产品的价格.随着 Internet 的飞速发展，电子商务网站可以通过与消费者的在线交互收集一些有用的信息，为价格决策提供有力的支持.

多个产品组合的价格低于分别购买其中每一件产品的价格总和，而企业的收益往往高于单个产品定价，这种定价策略属于产品组合定价.如果所有产品只能合在一起购买，则这种定价策略称为纯成套产品定价.如果有的产品也能分开购买，则称这种定价策略为混合成套产品定价.比如旅游套餐、电视和VCD(DVD)等都是属于成套产品定价的例子.

对于多产品定价，已有很多学者进行研究.而作为多产品定价的特殊形式，成套产品定价亦受到许多学者的关注.Dobson 等讨论了产品线的定位及定价方法，并讨论了产品线定价的启发式算法[1]；文献[2、3]研究了给定需求和生产成本条件下极大化企业总收益的组合定价方法；Rusmevichientong 讨论了竞争环境下的多产品定价问题并设计了相应的启发式算法[4]；Hennessy 等对多产品决策问题进行对偶分析，并讨论了价格在决策过程中的作用[5].文献[6～8]给出纯成套产品定价的一些算法，讨论了纯成套产品定价时的总收益与单卖时的关系；文献[9]给出了一种混合成套产品的定价方法，并讨论了解的存在性问题.但关于混合成套产品定价，还没有给出具体的算法.本文在讨论这种定价方法的基础上，针对混合成套产品定价模型，设计最小价格矩阵算法进行求解.

1 成套产品定价方法回顾

1.1 问题描述

顾客对产品的估价是顾客购买该产品愿意支付的最高价格，常被称为保留价格.假设某企业的成套产品有 n 个单独的产品，m 个顾客.记顾客 i 对产品 k 的保留价格为 p_{ik}，$i=1,2,\cdots,m$，$k=1,2,\cdots,n$. m 个顾客对 n 种产品的保留价格可用矩阵 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{r}}$ 表示如下：

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{r}}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & P_{\mathrm{r}1} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & P_{\mathrm{r}2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} & P_{\mathrm{r}m} \end{pmatrix} \tag{1}$$

其中 $P_{\mathrm{r}i}=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}$ 表示顾客 i 的保留价格之和.

收稿日期：2007-03-04；　**修回日期：**2008-01-04.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60274027).
作者简介：万福才*(1967-)，男，博士，副教授，硕士生导师，E-mail：wfucai@163.com；王 伟(1955-)，男，教授，博士生导师，E-mail：wangwei@dlut.edu.cn.

下面分析产品单卖和成套出售时的总收益.

不失一般性，假设顾客按保留价格之和由大到小排序，即 $P_{r1} \geqslant P_{r2} \geqslant \cdots \geqslant P_{rm}$.

1.2　产品单卖时的总收益

设 p_k 表示第 k 种产品的价格. 为使每一种产品都能卖出 m 个，则第 k 种产品的价格应定为 $p_k = \min\limits_i\{p_{ik}\}, k=1,2,\cdots,n$. 记企业的总收益为 R_{ts}，则

$$R_{ts} = mp_1 + mp_2 + \cdots + mp_n = m\sum_{k=1}^{n} p_k \quad (2)$$

1.3　混合成套产品定价方法

设 P_b 为成套产品的价格，则为使 m 套都能卖出去，由顾客按保留价格之和由大到小排序的假设，应该有 $P_b = \min\limits_{i\in I}\{P_{ri}\} = P_{rm}$，则企业的总收益

$$R_{tb} = mP_b \quad (3)$$

上述方法称为纯成套产品定价方法.

可以证明，存在 $k^{\#}$，把前 $k^{\#}$ 套产品按照纯成套产品定价，而后 $m-k^{\#}$ 套产品按照单卖定价，使得企业的总收益达到最大[9].

设按照混合成套产品定价方法企业获得的总收益为 R_{th}. 由于顾客的保留价格之和是按照由大到小的顺序排列的，前 $k^{\#}$ 套产品的价格应为 $P_{k^{\#}} = P_{tk^{\#}}$，剩余的 $m-k^{\#}$ 套产品中第 j 种产品的单卖价格应为 $P_j^{(m-k^{\#})} = \min\limits_{i\in\{k^{\#}+1,k^{\#}+2,\cdots,m\}}\{p_{ij}\}$. 前 $k^{\#}$ 套产品的收益为 $R_t^{(k^{\#})} = k^{\#}P_{tk^{\#}}$，剩余的 $m-k^{\#}$ 套产品的收益为 $R_t^{(m-k^{\#})} = (m-k^{*})\sum\limits_{j=1}^{n} P_j^{(m-k^{\#})}$. 企业能够获得的最大收益为

$$R_{th} = R_t^{(k^{\#})} + R_t^{(m-k^{\#})} \quad (4)$$

根据文献[9]有下面的结论：企业按照纯成套产品定价的总收益大于单卖定价的总收益；按照混合成套产品定价的总收益大于按照纯成套产品定价的总收益.

混合成套产品定价方法中 $k^{\#}$ 的存在性文献[9]已给出了证明，但没有给出求解方法，本文重点讨论用最小价格矩阵法求解 $k^{\#}$.

2　混合成套产品定价模型的最小价格矩阵求解

2.1　算法的基本思想

在顾客数量 m 有限的情况下，通过枚举法可以确定 $k^{\#}$；但是，在企业的顾客数量很大的条件下，问题的求解就成了NP难问题，所以研究适当的求解方法显得尤为重要. 本文算法的基本思想为构造一个 $m\times(n+1)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{P}_{ri}$ 如下：

$$\boldsymbol{P}_{ri} = \begin{pmatrix} p'_{11} & p'_{12} & \cdots & p'_{1n} & P_{t1} \\ p'_{21} & p'_{22} & \cdots & p'_{2n} & P_{t2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p'_{m1} & p'_{m2} & \cdots & p'_{mn} & P_{tm} \end{pmatrix} \quad (5)$$

其中 $p'_{ij} = \min\limits_{k\in\{i+1,i+2,\cdots,m\}} p_{kj}, P_{ti} = \sum\limits_{j=1}^{n} p'_{ij}$.

即除第 $n+1$ 列外，矩阵第 j 列的第 i 个元素是式(1)中第 j 种产品自第 i 个顾客后的最小保留价格，而矩阵的第 $n+1$ 列的元素是本行前 n 个最小价格之和. 这样由式(1)构成的价格矩阵和式(5)构造的最小价格矩阵的最后一列，就能以最小的代价求出混合成套产品定价中的最优解 $k^{\#}$. 算法的关键是构造最小价格矩阵，这将决定算法的最终复杂度.

构造最小价格矩阵的方法是从顾客的保留价格矩阵的最后一行开始逐行向前计算. 显然，$\boldsymbol{P}_{ri}$ 最小价格矩阵的最后一行向量等于 $\boldsymbol{P}_r$ 的最后一行；从 $\boldsymbol{P}_{ri}$ 倒数第二行开始重复以下步骤直到正数第一行：$\boldsymbol{P}_r$ 的第 i 行元素同 $\boldsymbol{P}_{ri}$ 的第 $i+1$ 行对应元素比较，保留其最小者作为 $\boldsymbol{P}_{ri}$ 第 i 行的对应元素.

2.2　算法的基本步骤

依据上述想法，给出相应的算法描述.

Step 1

Step 1.1　$k=m, p'_{kj}=p_{kj}, j=1,2,\cdots,n$;

Step 1.2　$p'_{kj} = \min\{p_{kj}, p'_{(k+1)j}\}, j=1,2,\cdots,n, k=k-1$;

Step1.3　If $k<1$ Then 结束 Step 1. Else 重复 Step 1.2;

Step 2　$k=1, R_{th}=0, k^{\#}=k$;

Step 3　$Total = \sum\limits_{i=1}^{k} R_{ti} + \sum\limits_{i=k+1}^{m} p'_{in}$, If $Total > R_{th}$ Then $R_{th} = Total$, $k^{\#}=k$;

Step 4　If $k<m$ Then $k=k+1$，重复步骤3 Else 算法中止输出最优值 $R_{th}, k^{\#}$.

其中，Step 1 为构造最小价格矩阵的过程.

2.3　算法的复杂度分析

算法的关键是构造最小价格矩阵，由于算法是从矩阵的最后一行起，每构造一行最小价格矩阵，都只是用保留价格矩阵的当前行与最小价格矩阵的后一行进行比较，算法的复杂度为 $O(m\times n)$；而求最优成套数量的算法复杂度为 $O(m)$. 因此，总的算法复杂度为 $O(m\times n)$.

3 算　例

假设有 10 个顾客，10 种产品，顾客对产品的保留价格矩阵如下：

$$
\boldsymbol{P}_{\mathrm{r}}=\begin{pmatrix}
30 & 260 & 30 & 800 & 420 & 785 & 100 & 30 & 400 & 550 & 3\,405 \\
40 & 290 & 18 & 780 & 385 & 745 & 130 & 58 & 350 & 588 & 3\,384 \\
66 & 210 & 20 & 700 & 380 & 750 & 120 & 20 & 390 & 580 & 3\,236 \\
60 & 240 & 17 & 700 & 420 & 700 & 130 & 21 & 362 & 570 & 3\,220 \\
70 & 200 & 15 & 800 & 360 & 750 & 110 & 55 & 370 & 480 & 3\,210 \\
34 & 260 & 25 & 790 & 400 & 730 & 110 & 30 & 360 & 460 & 3\,199 \\
65 & 250 & 25 & 790 & 350 & 790 & 120 & 30 & 320 & 450 & 3\,190 \\
66 & 230 & 15 & 760 & 380 & 725 & 130 & 40 & 260 & 500 & 3\,101 \\
40 & 200 & 16 & 750 & 390 & 710 & 120 & 54 & 370 & 440 & 3\,100 \\
40 & 200 & 20 & 750 & 410 & 700 & 100 & 35 & 260 & 430 & 2\,945
\end{pmatrix}
$$

最小价格矩阵计算结果如下：

$$
\boldsymbol{P}_{\mathrm{ri}}=\begin{pmatrix}
20 & 200 & 15 & 700 & 350 & 700 & 100 & 20 & 200 & 430 & 2\,735 \\
20 & 200 & 15 & 700 & 350 & 700 & 100 & 20 & 200 & 430 & 2\,735 \\
20 & 200 & 15 & 700 & 350 & 700 & 100 & 20 & 200 & 430 & 2\,735 \\
20 & 200 & 15 & 700 & 350 & 700 & 100 & 20 & 200 & 430 & 2\,735 \\
20 & 200 & 15 & 700 & 350 & 700 & 100 & 20 & 200 & 430 & 2\,735 \\
20 & 200 & 15 & 700 & 350 & 700 & 100 & 20 & 200 & 430 & 2\,735 \\
20 & 200 & 15 & 700 & 350 & 700 & 100 & 20 & 200 & 430 & 2\,735 \\
20 & 200 & 15 & 750 & 380 & 700 & 100 & 35 & 260 & 430 & 2\,890 \\
40 & 200 & 16 & 750 & 390 & 700 & 100 & 35 & 260 & 430 & 2\,921 \\
40 & 200 & 20 & 750 & 410 & 700 & 100 & 35 & 260 & 430 & 2\,945
\end{pmatrix}
$$

经计算得 $R_{\mathrm{th}}=31\,000$，$k^{\#}=7$. 而按照纯成套产品定价出售的总收益是 29 450. 可见混合成套产品定价方法可以为企业增加总收益.

4 结　语

针对混合成套产品定价模型，提出最小价格矩阵求解方法，该方法简便快速；算例证明该算法具有较小的时间复杂度.

参考文献：

[1] DOBSON G, KALISH S. Heuristics for pricing and positioning a product-line using conjoint and cost data [J]. **Management Science**, 1993, **39**(2):160-175

[2] HANSOM W, MARTIN K. Optimal bundle pricing [J]. **Management Science**, 1990, **36**(2):155-174

[3] HAUSER J R, SIMMIE P. Profit maximizing perceptual positions: an integrated theory for the selection of product features and price [J]. **Management Science**, 1981, **27**(1):33-56

[4] RUSMEVICHIENTONG P. A non-parametric approach to multi-product pricing: theory and application [D]. California:Stanford University, 2003

[5] HENNESSY D A, LAPAN H E. An algebraic theory of multi-product decisions [J]. **Economic Theory**, 2005, **25**(4):819-829

[6] 菲利普·科特勒. 营销管理——分析、计划和控制[M]. 梅汝和，等译. 上海：上海人民出版社，1996：671-673

[7] KOTLOR P, ARMSTRONG G. **Principles of Marketing** [M]. New Jersey:Prentice Hall Inc., 1996:368-369

[8] 唐小我，李仕明，曾　勇，等. 管理经济分析理论与应用[M]. 成都：电子科技大学出版社，2000:402-405

[9] 唐小我，倪得兵. 成套产品定价方法研究[J]. 中国管理科学，2002，**10**(5):46-50

A min-price matrix method to solve mix product-set pricing problem

WAN Fu-cai*[1,2], WANG Wei[2]

(1. Research Center of Information and Control, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. College of Information Engineering, Shenyang University, Shenyang 110044, China)

Abstract: Through interaction with online consumers, e-commerce websites can gather data reflecting consumer's preferences. Such data allows significant revenue increase through strategic price setting via sophisticated analytical tools. Based on the description of mix product-set pricing, a min-matrix method is proposed to solve this problem. The complexity analysis results show that the proposed algorithm has less time complexity. Optimal solution of the given example shows that this method is effective for the mix product-set pricing, and the given method has important value for application in practice.

Key words: single product pricing; pure product-set pricing; mix product-set pricing; min-price matrix