

不可压缩非等温非牛顿流广义特征线基分裂算法

段庆林, 李锡夔*

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 发展了用于不可压缩非等温非牛顿流模拟的广义特征线基分裂算法, 推广了控制方程沿粒子特征线的离散格式, 经典的特征线伽辽金法和时域的 Crank-Nicolson 离散格式可分别被归纳为离散格式的两个特例. 为消除流体的不可压缩性导致的虚假数值振荡, 采用压力稳定型分步算法. 利用粘性系数关于等效应变速率的指数模型来模型化流体的非牛顿特性. 平面 Poiseuille 流动和 4:1 平面收缩流动的数值模拟结果突出地显示了该方法处理不可压缩非等温非牛顿流动问题的有效性及良好性能.

关键词: 非等温非牛顿流; 分步算法; 特征线; 特征线基分裂

中图分类号: O357.1 **文献标志码:** A

0 引言

不可压缩流的数值模拟存在两大困难: 其一来源于控制方程组的混合特性, 即质量守恒方程中不包含压力变量, 这要求速度、压力的插值空间满足所谓的 LBB 条件, 否则, 标准的 Galerkin 空间离散会导致压力场的虚假振荡^[1,2]; 另一困难来源于控制方程组的对流-扩散特性, 即当对流项占优势地位时, 标准的 Galerkin 空间离散将导致速度场的数值振荡^[3]. 为消除压力场的虚假振荡, Hughes 等首先放弃了标准的 Galerkin 离散格式, 而采用 Petrov-Galerkin 离散格式, 提出了 PSPG^[4,5] 稳定化方案. 在该方案中, 一个压力摄动项被引入到系统弱形式中以提高求解格式的压力稳定性. 应指出的是, 广泛应用于计算流体力学的分步算法并不具有较好的压力稳定性, 尤其是它的增量型分裂格式, 该格式虽然比全量型分裂格式具有更高的求解精度, 但其压力稳定性却更为虚弱^[6,7]. Li 等^[8] 基于 Onate 的有限增量微积分 (finite increment calculus, FIC) 理论^[9], 将质量守恒方程写成 FIC 稳定化形式, 并通过引入一个附加变量有效改善了增量型分裂格式的压力稳定性. 另一方面, 针对对流占优问题, 中外学者也发展了各自的稳定化方案, 如 Brooks 和 Hughes 的

SUPG 法^[10] 以及 Donea 的 Taylor-Galerkin 法^[11] 等. Zienkiewicz 等提出的特征线伽辽金法 (characteristic Galerkin, CG)^[12] 可有效处理对流占优问题, 而且其稳定项的引入更为理性和直观. 该方法的基本思想是着眼于物质点而非空间点, 即要沿着物质粒子运动的特征线来离散控制方程, 从而非线性非自伴随的对流项自然消失, 则标准的 Galerkin 法离散重新成为最优.

与不可压缩牛顿流的数值求解相比较, 不可压缩非牛顿流的数值模拟更为复杂, 此时方程的非线性不仅来源于对流项, 同时还来源于粘性扩散项, 即粘性系数并不为常数而是依赖于应变速率的大小, 也就是依赖于速度压力的计算结果. 对于不可压缩非等温非牛顿流, 粘性系数对于温度的依赖性进一步增强了方程的非线性, 这使得它的数值模拟更为复杂^[13].

本文的目的是发展用于不可压缩非等温非牛顿流模拟的特征线基分裂 (characteristic based split, CBS) 算法. 在经典的特征线法中, 参考时刻总是选为 t_{n+1} , 而在本文中, 参考时刻可以选为 $[t_n, t_{n+1}]$ 中的任一时刻, 即可为 $t_{n+\alpha}$ ($0 \leq \alpha \leq 1$). 从此意义上说, 本文的推导具有更好的普遍性, 因而将其称为广义特征线法.

收稿日期: 2007-06-15; 修回日期: 2008-12-20.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (重大研究计划 90715011; 10590354; 10672033).

作者简介: 段庆林 (1979-), 男, 博士生; 李锡夔* (1940-), 男, 教授, 博士生导师.

1 不可压缩非等温非牛顿流的控制方程及本构关系

不可压缩流的动量、质量和能量守恒方程可分别写为

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \tau_{ij} \dot{\epsilon}_{ji} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \quad (3)$$

式中: ρ 、 c 和 k 分别为密度、比热容和导热系数; u_i 、 p 和 T 分别为速度、压力和温度; g_i 为单位质量力; $\dot{\epsilon}_{ji}$ 为应变速率张量分量; τ_{ij} 为粘性应力张量分量. 对于纯粘性流体, $\tau_{ij} = 2\eta(\dot{\gamma}) \dot{\epsilon}_{ij}$, $\eta(\dot{\gamma})$ 为非牛顿粘性系数, 在本文中, 考虑其服从如下的指数模型:

$$\begin{cases} \eta(\dot{\gamma}) = m \dot{\gamma}_0^{n-1}; & \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0 \\ \eta(\dot{\gamma}) = m \dot{\gamma}^{n-1}; & \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_0 \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\dot{\gamma} = \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ji}}$ 为等效应变速率; $\dot{\gamma}_0$ 是一个小量, 以防止当 $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ 时方程(4) 出现奇异性. 在本文中, $\dot{\gamma}_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. 对于剪切稀化流体, $0 < n < 1$; 而对于剪切变稠流体, $n > 1$. 当 $n = 1$ 时, 方程(4) 退化为牛顿流模型. 若粘性系数还与温度相关, 则上述指数模型可修改为

$$\begin{cases} \eta(\dot{\gamma}, T) = m \dot{\gamma}_0^{n-1} e^{-\beta(T-T_{\text{ref}})}; & \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0 \\ \eta(\dot{\gamma}, T) = m \dot{\gamma}^{n-1} e^{-\beta(T-T_{\text{ref}})}; & \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_0 \end{cases} \quad (5)$$

其中 β 为温度相关系数; T_{ref} 为参考温度.

2 动量和能量守恒方程的广义特征线离散

设 $\mathbf{X}(t)$ 为追踪粒子的运动轨迹(即为其特征线), 则沿着它动量守恒方程(1) 为

$$\rho \frac{D u_i(\mathbf{X}(t), t)}{D t} = \frac{\partial \tau_{ij}(\mathbf{X}(t), t)}{\partial x_j} - \frac{\partial p(\mathbf{X}(t), t)}{\partial x_i} + \rho g_i(\mathbf{X}(t), t) \quad (6)$$

采用梯形法则, 上式的时域离散为

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{\Delta t} [u_i(\mathbf{X}(t_{n+1}), t_{n+1}) - u_i(\mathbf{X}(t_n), t_n)] = \\ & \theta \left[\frac{\partial \tau_{ij}(\mathbf{X}(t_{n+1}), t_{n+1})}{\partial x_j} - \frac{\partial p(\mathbf{X}(t_{n+1}), t_{n+1})}{\partial x_i} \right] + \\ & (1 - \theta) \left[\frac{\partial \tau_{ij}(\mathbf{X}(t_n), t_n)}{\partial x_j} - \frac{\partial p(\mathbf{X}(t_n), t_n)}{\partial x_i} \right] + \rho g_i \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\theta \in [0, 1]$, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ 为时间步长, 单位质

量力 g_i 被认为是常数. 为获得时域离散的二阶精度, 上式中的 θ 必须选为 0.5. 应注意的是, $\mathbf{X}(t_{n+1}) \neq \mathbf{X}(t_n)$, 即上式中的各项不是在同一空间点计算的. 为获得方程(7) 的数值求解, 该式的各项必须在同一空间点上计算. 为处理该问题, 对于任一物理量 φ , 可以把 $\varphi(\mathbf{X}(t_{n+1}), t_{n+1})$ 和 $\varphi(\mathbf{X}(t_n), t_n)$ 在同一空间点 $\mathbf{x}$ 处展开, 其中 $\mathbf{x}$ 为该粒子在参考时刻 $\bar{t}$ 的空间位置, 即 $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\bar{t})$. 如前所述, 对于时间步 $[t_n, t_{n+1}]$, 该参考时刻可选为 $\bar{t} = t_{n+\alpha} = t_n + \alpha \Delta t$. 由此, $\mathbf{X}(t_{n+1})$ 和 $\mathbf{X}(t_n)$ 可分别采用 $\mathbf{x}$ 近似表达为

$$\mathbf{X}(t_{n+1}) = \mathbf{x} + (1 - \alpha) \Delta t \mathbf{u}^{n+\beta} + O(\Delta t^2) \quad (8)$$

$$\mathbf{X}(t_n) = \mathbf{x} - \alpha \Delta t \mathbf{u}^n + O(\Delta t^2) \quad (9)$$

其中 $\beta = 0$ 和 $0 < \beta \leq 1$ 分别表示对 $\mathbf{X}(t_{n+1})$ 的显式和隐式近似. 则由上述两式, $\varphi(\mathbf{X}(t_{n+1}), t_{n+1})$ 和 $\varphi(\mathbf{X}(t_n), t_n)$ 可分别近似为

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{X}(t_{n+1}), t_{n+1}) &= \varphi^{n+1} + (1 - \alpha) \Delta t \mathbf{u}^{n+\beta} \cdot \\ & \nabla \varphi^{n+\beta} + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{X}(t_n), t_n) &= \varphi^n - \alpha \Delta t \mathbf{u}^n \cdot \nabla \varphi^n + O(\Delta t^2) \\ & \quad (11) \end{aligned}$$

其中 φ^{n+1} 表示参考位置 $\mathbf{x}$ 处的物理量在 t_{n+1} 时刻的值, 即 $\varphi^{n+1} = \varphi(\mathbf{X}(\bar{t}), t_{n+1}) = \varphi(\mathbf{x}, t_{n+1})$. 在后面的推导中, 未具体说明空间位置的物理量均表示在参考点 $\mathbf{x}$ 处的值. 采用中心差分法, $\mathbf{X}(t_{n+1})$ 和 $\mathbf{X}(t_n)$ 可分别高一阶精度地近似为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t_{n+1}) &= \mathbf{x} + (1 - \alpha) \frac{\Delta t}{2} [(1 + \alpha) \mathbf{u}^{n+1} + \\ & (1 - \alpha) \mathbf{u}^n] + (1 - \alpha)^2 \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{u}^{n+\beta} \cdot \\ & \nabla \mathbf{u}^{n+\beta} + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t_n) &= \mathbf{x} - \alpha \frac{\Delta t}{2} [\alpha \mathbf{u}^{n+1} + (2 - \alpha) \mathbf{u}^n] + \\ & \alpha^2 \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (13)$$

则应用上述两式, $\varphi(\mathbf{X}(t_{n+1}), t_{n+1})$ 和 $\varphi(\mathbf{X}(t_n), t_n)$ 可分别高阶近似为

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{X}(t_{n+1}), t_{n+1}) &= \varphi^{n+1} + (1 - \alpha) \frac{\Delta t}{2} [(1 + \alpha) \mathbf{u}^{n+1} + \\ & (1 - \alpha) \mathbf{u}^n] \cdot \nabla \varphi^{n+1} + (1 - \\ & \alpha)^2 \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{u}^{n+\beta} \cdot \nabla (\mathbf{u}^{n+\beta} \cdot \nabla \varphi^{n+\beta}) + \\ & O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{X}(t_n), t_n) &= \varphi^n - \alpha \frac{\Delta t}{2} [\alpha \mathbf{u}^{n+1} + (2 - \alpha) \mathbf{u}^n] \cdot \\ & \nabla \varphi^n + \alpha^2 \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{u}^n \cdot \nabla (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \varphi^n) + \\ & O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (15)$$

由以上推导可知,粒子的特征线 $\mathbf{X}(t)$ 的低阶和高阶近似可分别采用式(8)、(9)和式(12)、(13),相应地,该粒子上的任一物理量 φ 可分别按式(10)、(11)和式(14)、(15)进行近似.因此,方程(7)沿特征线的离散可写为

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\Delta t} [u_i^{n+1} - u_i^n] + \rho u_j^{n+1/2} \frac{\partial u_i^{n+1-\alpha}}{\partial x_j} &= \frac{\partial \tau_{ij}^{n+1/2}}{\partial x_j} - \\ \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x_i} + \rho g_i + (2\alpha - 1) \frac{\Delta t}{2} u_k^{n+\beta} \frac{\partial}{\partial x_k} &\left[\rho u_j^{n+\beta} \frac{\partial u_i^{n+\beta}}{\partial x_j} - \right. \\ \left. \frac{\partial \tau_{ij}^{n+\beta}}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{n+\beta}}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)等式右侧最后一项是由于沿着特征线离散而引入的处理对流占优的稳定项.还应说明的是,一方面,若取 $\alpha \equiv 0$ 和 $\beta \equiv 0$,上式退化为经典的特征线离散格式;另一方面,若取 $\alpha = 0.5$,则上式可退化为式(7)的经典 Crank-Nicolson 时域离散.对于这种推广, α 和 β 还可选取其他值来提高计算格式的某些性能,这将在后面的数值算例中得到体现.

采用上述同样的推导过程,能量守恒方程的特征线离散可写为

$$\begin{aligned} \frac{\rho c}{\Delta t} [T^{n+1} - T^n] + \rho c u_j^{n+1/2} \frac{\partial T^{n+1-\alpha}}{\partial x_j} &= \\ \tau_{ij}^{n+1/2} \dot{\epsilon}_{ji}^{n+1/2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T^{n+1/2}}{\partial x_j} \right) + \\ (2\alpha - 1) \frac{\Delta t}{2} u_k^{n+\beta} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho u_j^{n+\beta} \frac{\partial T^{n+\beta}}{\partial x_j} - \right. \\ \left. \tau_{ij}^{n+\beta} \dot{\epsilon}_{ji}^{n+\beta} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T^{n+\beta}}{\partial x_j} \right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

动量和能量守恒方程的特征线离散可以采用不同的 α 和 β . 根据计算经验,不同的 β 会给出非常相似的计算结果,即它对计算格式的影响不大.因而,在本文中 β 取为 0.5.

3 分步算法和压力稳定化

分步算法最初由 Chorin^[14,15] 和 Temam^[16] 在有限差分领域中提出,后由 Comini 等^[17] 和 Donea 等^[18] 引入到有限元领域.首先,引入一中间速度 $\mathbf{u}^*$, 式(16)可分裂为

$$\begin{aligned} \left[\frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{I}_3 - \frac{1}{2} \mathbf{S}^T (\eta^{n+1/2} \mathbf{D}_0) \mathbf{S} \right] (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n) &= \\ -\rho \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1-\alpha} + \mathbf{S}^T (\eta^{n+1/2} \mathbf{D}_0 \mathbf{S}) \mathbf{u}^n - \\ \nabla p^n + \rho \mathbf{g} + (2\alpha - 1) \frac{\Delta t}{2} \mathbf{u}^{n+\beta} \cdot \nabla [\rho \mathbf{u}^{n+\beta} \cdot \\ \nabla \mathbf{u}^{n+\beta} - \mathbf{S}^T (\eta^{n+\beta} \mathbf{D}_0 \mathbf{S}) \mathbf{u}^{n+\beta} + \nabla p^{n+\beta}] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{I}_3 - \frac{1}{2} \mathbf{S}^T (\eta^{n+1/2} \mathbf{D}_0) \mathbf{S} \right] (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*) &= \\ -\frac{1}{2} \nabla (p^{n+1} - p^n) \end{aligned} \quad (19)$$

其中对于三维问题, $\mathbf{I}_3$ 为 3×3 的单位阵.如前所述,为提高分步算法的压力稳定性,本文采用文献[8]的做法,即将质量守恒方程写成下述的稳定化形式:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} - \lambda^d \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}^{n+1} - \frac{\lambda^d}{\rho} \nabla^2 p^{n+1} = 0 \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{n+1} + \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} = 0 \quad (21)$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}$ 为一附加变量, λ^d 为一数值参数,可按式(22)选取^[8]:

$$\lambda^d = \left(\frac{4\nu}{h^2} + \frac{2U}{h} \right)^{-1} \quad (22)$$

式中: U 为流场的特征速度; ν 为运动粘性系数; h 为计算网格的特征尺寸.若将式(21)代入到式(20)中,则式(20)中的稳定项将消失,该式会退化为标准的质量守恒方程式(2).这表明稳定化形式的质量守恒方程(20)、(21)在连续的情况下(即未空间离散之前)与标准的质量守恒方程是等价的.一旦空间离散之后,这些稳定项将不再消失,并能起到消除压力场数值振荡的作用,具体说明和数值验证可参见文献[8].对式(19)两边取散度,然后将式(20)代入其中,并省略高阶小量可得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda^d}{\Delta t} \right) \nabla^2 (p^{n+1} - p^n) &= \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* - \frac{\rho \lambda^d}{\Delta t} \nabla \cdot \\ \boldsymbol{\varphi}^{n+1} - \frac{\lambda^d}{\Delta t} \nabla^2 p^n \end{aligned} \quad (23)$$

若 $\lambda^d = 0$,则上式退化为经典分步算法的压力泊松方程.

4 空间离散和算法流程

应用标准的 Galerkin 过程,式(18)、(17)、(23)、(21)和(19)可分别离散为

$$\begin{aligned} \left[\frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{M}_u + \frac{1}{2} \mathbf{K}_u (\eta^{n+1/2}) - \frac{1}{2} \mathbf{K}_u^T (\eta^{n+1/2}) \right] (\bar{\mathbf{u}}^* - \bar{\mathbf{u}}^n) &= \\ -\rho \mathbf{C}_u (\mathbf{u}^{n+1/2}) \bar{\mathbf{u}}^{n+1-\alpha_u} - \mathbf{K}_u (\eta^{n+1/2}) \bar{\mathbf{u}}^n + \mathbf{L}^T \bar{\mathbf{p}}^n + \\ f_u - (2\alpha_u - 1) \frac{\Delta t}{2} \rho \mathbf{C}_u^S (\mathbf{u}^{n+\beta}) \bar{\mathbf{u}}^{n+\beta} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\rho c}{\Delta t} \mathbf{M}_T + \frac{1}{2} \mathbf{K}_T - \frac{1}{2} \mathbf{K}_T^T \right] (\bar{\mathbf{T}}^{n+1} - \bar{\mathbf{T}}^n) &= \\ -\rho \mathbf{C}_T (\mathbf{u}^{n+1/2}) \bar{\mathbf{T}}^{n+1-\alpha_T} - \mathbf{K}_T \bar{\mathbf{T}}^n + \boldsymbol{\Phi} (\mathbf{u}^{n+1/2}) + \\ f_T - (2\alpha_T - 1) \frac{\Delta t}{2} \rho \mathbf{C}_T^S (\mathbf{u}^{n+\beta}) \bar{\mathbf{T}}^{n+\beta} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda^d}{\Delta t}\right) \mathbf{K}_p(\bar{\mathbf{p}}^{n+1} - \bar{\mathbf{p}}^n) = -\frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{L} \bar{\mathbf{u}}^* - \frac{\rho \lambda^d}{\Delta t} \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\varphi}}^{n+1} - \frac{\lambda^d}{\Delta t} \mathbf{K}_p \bar{\mathbf{p}}^n \quad (26)$$

$$\mathbf{M} \bar{\boldsymbol{\varphi}}^{n+1} + \frac{1}{\rho} \mathbf{D}^T \bar{\mathbf{p}}^{n+1} = 0 \quad (27)$$

$$\left(\frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{M}_u + \frac{1}{2} \mathbf{K}_u(\eta^{n+1/2}) - \frac{1}{2} \mathbf{K}_u^T(\eta^{n+1/2})\right) \times (\bar{\mathbf{u}}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}^*) = \frac{1}{2} \mathbf{L}^T(\bar{\mathbf{p}}^{n+1} - \bar{\mathbf{p}}^n) \quad (28)$$

可以看到,式(24)、(25)的右端出现了未知量,如 $\bar{\mathbf{u}}^{n+1/2}$ 等. 因而,上述各式须进行迭代求解,具体的计算流程可表达为

(1) 初始化 $\bar{\mathbf{u}}_0^{n+1} \leftarrow \bar{\mathbf{u}}^n$ 、 $\bar{\mathbf{T}}_0^{n+1} \leftarrow \bar{\mathbf{T}}^n$ 、 $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_0^{n+1} \leftarrow \bar{\boldsymbol{\varphi}}^n$, 并记迭代次数 $i \leftarrow 1$.

(2) 由 $\bar{\mathbf{u}}_{i-1}^{n+1}$ 和 $\bar{\mathbf{T}}_{i-1}^{n+1}$ 计算 $\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1/2}$ 、 $\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1-\alpha_u}$ 、 $\bar{\mathbf{u}}_i^{n+\beta}$ 、 $\bar{\mathbf{T}}_i^{n+1/2}$ 、 $\bar{\mathbf{T}}_i^{n+1-\alpha_T}$ 和 $\bar{\mathbf{T}}_i^{n+\beta}$, 从而可算出 $\eta^{n+1/2} = \eta(\bar{\mathbf{u}}^{n+1/2}, \bar{\mathbf{T}}^{n+1/2})$, 然后由这些量通过方程(24)和(25)分别求解 $\bar{\mathbf{u}}^*$ 和 $\bar{\mathbf{T}}_i^{n+1}$.

(3) 用 $\bar{\mathbf{u}}^*$ 和 $\bar{\mathbf{p}}^n$ 由方程(26)、(27)迭代求解 $\bar{\mathbf{p}}^{n+1}$.

(4) 由 $\bar{\mathbf{u}}^*$ 、 $\bar{\mathbf{p}}^n$ 以及 $\bar{\mathbf{p}}^{n+1}$ 求解方程(28)得到 $\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1}$.

(5) 计算第 i 次迭代的收敛率, 若 $\|(\bar{\mathbf{Q}}_i^{n+1} - \bar{\mathbf{Q}}_{i-1}^{n+1})/\bar{\mathbf{Q}}_{i-1}^{n+1}\|_2 \leq \epsilon(\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}})$, 则 $\bar{\mathbf{u}}^{n+1} \leftarrow \bar{\mathbf{u}}_i^{n+1}$, $\bar{\mathbf{T}}^{n+1} \leftarrow \bar{\mathbf{T}}_i^{n+1}$, 并结束本时间步内的迭代循环; 否则, $i \leftarrow i+1$, 返回(2).

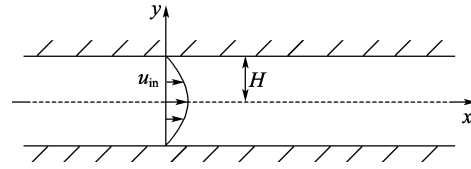
若粘性系数与温度无关, 则能量守恒方程式(25)可以在速度-压力场收敛后进行独立求解.

5 数值算例

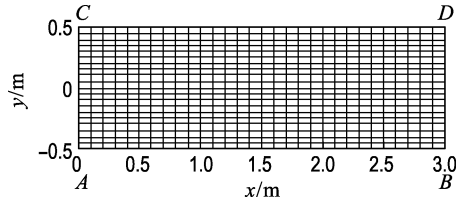
5.1 平面 Poiseuille 流动

流场的几何形状及计算网格配置分别如图1(a)和图1(b)所示. 节点在 y 方向要比在 x 方向配置得密一些, 单元尺寸在这两个方向分别为 $h_y = 0.05$ m, $h_x = 2h_y = 0.1$ m. 流体的粘度模型采用式(4), 即为与温度不相关的指数模型. 在固定壁面 AB 和 CD 上 x 、 y 向速度均固定为 0, 温度固定为 T_w . 在出口边界 BD 上, y 向速度和压力固定为 0. 入口边界 AC 上的 y 向速度固定为 0, x 向速度按该算例的解析解固定.

首先, 考察不同的 α_u 对于算法求解速度压力场所允许的最大时间步长 $\Delta t_{\max}$ 的影响, 其结果如表1所示. 可见, $\alpha_u = 0.5$ 的计算格式, 即经典的 Crank-Nicolson 时域离散, 在低 Re 的情况下可



(a) 示意图



(b) 计算网格配置

图1 平面 Poiseuille 流动问题

Fig. 1 The plane Poiseuille flow problem

以采用很大的时间步长, 尤其是在 $Re = 1$ 的情况下, 它的 $\Delta t_{\max}$ 大约是其两种格式的 20 倍. 但是, 随着 Re 的增大, 该格式的 $\Delta t_{\max}$ 急剧地减小, 到 $Re = 1\,000$ 时, 它的 $\Delta t_{\max}$ 只有 $\alpha_u = 0.8$ 格式的 $1/10$ 了, 说明它不能有效处理对流占优问题. 另一方面, 其他两种格式, 即 $\alpha_u = 0.8$ 和 $\alpha_u = 1.0$ 的 $\Delta t_{\max}$ 在各种 Re 下保持不变, 说明它们对于 Re 的变化具有很好的健壮性. $\alpha_u = 0.8$ 格式的 $\Delta t_{\max}$ 要比 $\alpha_u = 1.0$ 的大一些.

表1 不同 α_u 下 $\Delta t_{\max}$ 随流动 Re 变化的比较

Tab. 1 Comparisons of maximum time step sizes $\Delta t_{\max}$ taken for different α_u with different Re

α_u	$\Delta t_{\max}/s$			
	$Re=1$	$Re=10$	$Re=100$	$Re=1\,000$
1.0	0.04	0.04	0.04	0.040
0.8	0.05	0.05	0.05	0.050
0.5	0.80	0.30	0.03	0.005

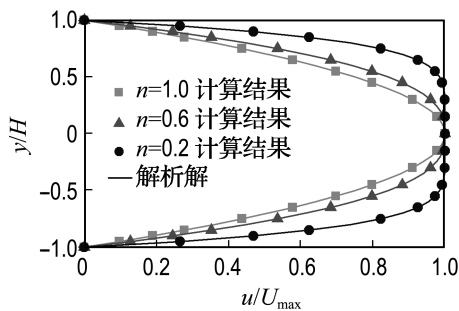
表2给出了这3种特征线算法求解温度场时在4种热 Pe 下的 $\Delta t_{\max}$. 可以看到, 它们的表现和前述的速度压力场的情况相似, 即 $\alpha_T = 0.5$ 的 $\Delta t_{\max}$ 随热 Pe 的增大而急剧减小, 而 $\alpha_T = 0.8$ 和 $\alpha_T = 1.0$ 的则保持不变. 这是不难理解的, 因为 Re 和热 Pe 都表示所求解的方程中对流项和扩散项的比例, 因而它们具有相似性. 对于温度场的计算, $\alpha_T = 0.8$ 格式的 $\Delta t_{\max}$ 是 $\alpha_T = 1.0$ 格式(相应于经典的特征线算法)的2倍. 图2(a)和图2(b)分别给出了该格式在3种不同指数情况下的 x 向速度和温度的计算结果. 本文结果在各种情况下都与解析解吻合得很好. 图3给出了 $n = 0.6$ 时由

该格式计算得到的压力分布图,显然,压力场没有数值振荡发生.

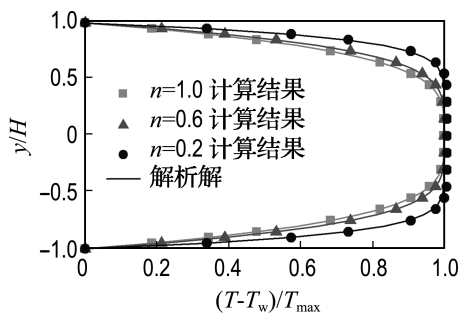
表 2 不同 α_T 下 $\Delta t_{\max}$ 随热 Pe 变化的比较

Tab. 2 Comparisons of maximum time step sizes $\Delta t_{\max}$ taken for different α_T with different thermal Pe

α_T	$\Delta t_{\max}/s$			
	$Pe=1$	$Pe=10$	$Pe=100$	$Pe=1\ 000$
1.0	0.3	0.3	0.300	0.3
0.8	0.6	0.6	0.600	0.6
0.5	1.0	1.0	0.001	—



(a) x 向速度



(b) 温度

图 2 格式 $\alpha_u = \alpha_T = 0.8$ 计算结果与解析解比较

Fig. 2 Comparison of numerical results obtained by the scheme $\alpha_u = \alpha_T = 0.8$ with theoretical solutions

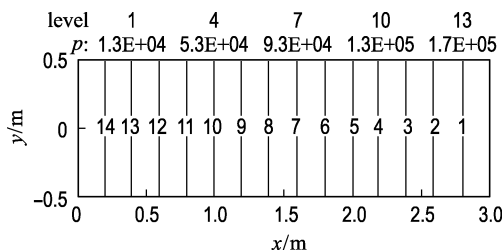
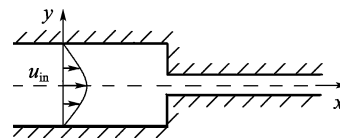


图 3 $n=0.6$ 由格式 $\alpha_u = \alpha_T = 0.8$ 计算得到的压力等值线

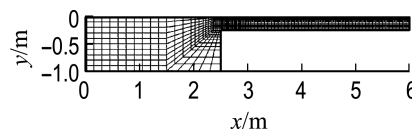
Fig. 3 Pressure contours obtained by the scheme $\alpha_u = \alpha_T = 0.8$ for $n=0.6$

5.2 4 : 1 平面收缩流动

经典的 4 : 1 平面收缩流动代表了一类较为复杂的考题,流场的示意图如图 4(a)所示. 由于对称性,取腔体的一半进行计算,网格配置如图 4(b)所示. 在固定壁面上 x 、 y 向速度均固定为 0,温度固定为 T_w ;在对称面上, y 向速度和热流量固定为 0;在出口边界上, y 向速度和压力固定为 0;在入口边界上, y 向速度固定为 0, x 向速度和温度分别按 5.1 中算例的解析解固定. 流体的粘度模型采用式 (5),即为与温度相关的指数模型. 材料各参数分别为 $m = 10^4 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $n = 0.5$, $T_{\text{ref}} = 273 \text{ K}$, $\beta = 0.01 \text{ K}^{-1}$, $\rho = 1\ 000 \text{ kg/m}^3$, $k = 1 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$. 根据 5.1 中算例的计算结果,格式 $\alpha_u = \alpha_T = 0.8$ 相对于另外两种格式既具有很好的健壮性又能使用较大的时间步长,因而只有这种格式被用来求解该考题,以测试它在复杂情况下的性能.



(a) 示意图



(b) 计算网格配置

图 4 4 : 1 收缩流动问题

Fig. 4 The 4 : 1 contraction flow problem

图 5(a)~(d)分别给出了热 $Pe=1, 10, 100, 1\ 000$ 的温度等值线. 可以看到,这些等温线的形状与 Bell 等^[19]给出的结果很一致. 在 $Pe=1$ 的情况下,在压缩转角附近有一个局部的“热点”出现. 这是由于在这个区域,速度场变化很剧烈,产生了很多的粘性热,同时由于对流强度很弱(因为热 Pe 小),这些热量不能及时传出去,造成了局部高温点的出现. 然而,随着对流强度的增强,也就是随着热 Pe 的不断增大,这一局部的“热点”逐渐消失了.

图 6(a)和(b)分别给出了 $Pe=1\ 000$ 情况下的流线和压力云图. 实际上,其他热 Pe 的结果和图 6 非常相似. 可以看到,图 6(a)给出的流线形状与 Bell 等^[19]给出的结果相一致. 而且在压缩区域的右下角处没有漩涡产生,这也与文献^[19]给出的结论相一致. 从图 6(b)看出,压力场很光

滑, 没有数值振荡产生。

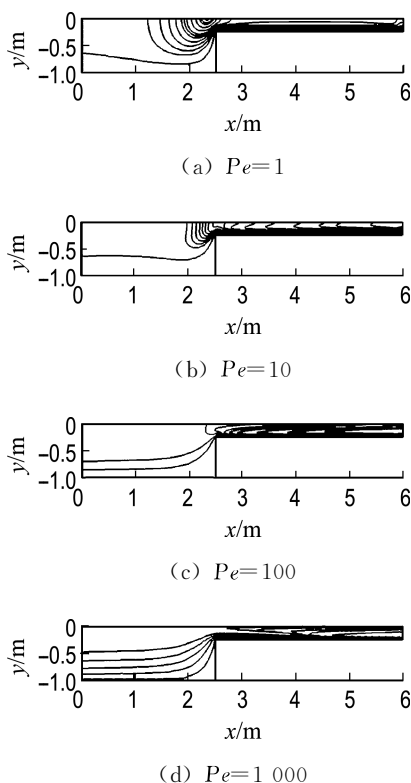


图5 不同热 Pe 下, 4 : 1 收缩流动问题的等温线

Fig. 5 Isotherm plots for the 4 : 1 contraction flow problem with different thermal Pe

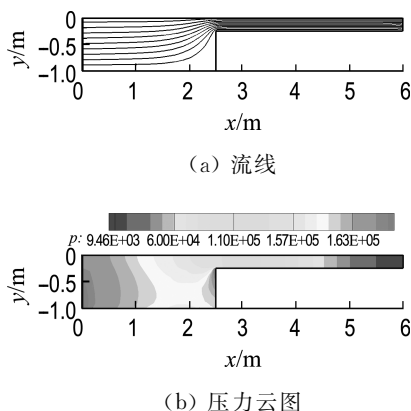


图6 $Pe=1000$, 4 : 1 收缩流动问题的数值结果

Fig. 6 Numerical results of the 4 : 1 contraction flow problem with $Pe=1000$

6 结 论

本文拓展了经典特征线方法的离散格式, 并用其发展了处理不可压缩非等温非牛顿流动问题

的广义特征线基分裂算法. 由于这种拓展, 经典的特征线方法和经典的时域 Crank-Nicolson 离散格式可以被纳入到本文给出的统一框架之内, 这对于理解各种方法之间的联系是十分有意义的. 两个典型算例的数值模拟结果突出地显示了本文方法处理不可压缩非等温非牛顿流动问题的有效性及良好性能. 将这一算法应用于成型充填过程的数值模拟将在另文中给出.

参考文献:

- [1] HUERTA A, VIDAL Y, VILLON P. Pseudo-divergence-free element free Galerkin method for incompressible fluid flow [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, **193** (12-14):1119-1136
- [2] 段庆林, 李锡夔. 不可压缩 Stokes 流动的 PSPG 无网格法[J]. *计算力学学报*, 2007, **24**(2):192-196
- [3] LI Xi-kui, HAN Xian-hong. An iterative stabilized fractional step algorithm for numerical solution of incompressible N-S equations [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2005, **49**(4):395-416
- [4] HUGHES T J R, FRANCA L P, BALESTRA M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1986, **59**(1):85-99
- [5] TEZDUYAR T E, MITTAL S, ERAY S, *et al.* Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure element [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1992, **95**(2): 221-242
- [6] GUERMOND J L, QUARTAPELLE L. On stability and convergence of projection methods based on pressure Poisson equation [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1998, **26**(9): 1039-1053
- [7] CODINA R. Pressure stability in fractional step finite element methods for incompressible flows [J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, **170**(1): 112-140
- [8] LI Xi-kui, DUAN Qing-lin. Meshfree iterative stabilized Taylor-Galerkin and characteristic-based split (CBS) algorithms for incompressible N-S

- equations [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2006, **195**(44-47): 6125-6145
- [9] ONATE E. A stabilized finite element method for incompressible viscous flows using a finite increment calculus formulation [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2000, **182**(3-4): 355-370
- [10] BROOKS A N, HUGHES T J R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1982, **32**(1-3):199-259
- [11] DONEA J. A Taylor-Galerkin method for convective transport problems[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1984, **20**(1): 101-119
- [12] ZIENKIEWICZ O C, CODINA R. A general algorithm for compressible and incompressible flow -Part I. The split, characteristic based scheme [J]. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, 1995, **20**(8-9):869-885
- [13] HAN Xian-hong, LI Xi-kui. An iterative stabilized CNBS-CG scheme for incompressible non-isothermal non-Newtonian fluid flow [J]. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 2007, **50**(5-6):847-856
- [14] CHORIN A J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations [J]. **Mathematics of Computation**, 1968, **22**(104):745-762
- [15] CHORIN A J. On the convergence of discrete approximation to the Navier-Stokes equations [J]. **Mathematics of Computation**, 1969, **23**(106): 341-353
- [16] TEMAM R. Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires II [J]. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, 1969, **33**(5):377-385
- [17] COMINI G, DEL G S. Finite element solution of incompressible Navier-Stokes equations [J]. **Heat Transfer, Part A: Applications**, 1972, **5**(2):463-478
- [18] DONEA J, GIULIANI S, LAVAL H, *et al.* Finite element solution of unsteady Navier-Stokes equations by a fractional step method [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1982, **30**(1):53-73
- [19] BELL B C, SURANA K S. p-Version least squares finite element formulation for two-dimensional incompressible Newtonian and non-Newtonian non-isothermal fluid flow [J]. **Computers and Structures**, 1995, **54**(1):83-96

A generalized characteristic based split (CBS) algorithm for incompressible non-isothermal non-Newtonian fluid flows

DUAN Qing-lin, LI Xi-kui *

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A generalized scheme of the fractional step algorithm using characteristic based split (CBS) for numerical simulation of the incompressible non-isothermal non-Newtonian fluid flows is presented. The discretization scheme of the governing equations along the characteristics is generalized, so the classical characteristics Galerkin method and the classical Crank-Nicolson time discretization scheme can be classified as two special cases of the discretization scheme developed respectively. Pressure stabilized fractional step algorithm is employed to remove the spurious numerical oscillations induced by the incompressibility of the fluid. The power law model of the viscosity in terms of the equivalent strain rate is used to model the non-Newtonian character of the fluid. Numerical results of the plane Poiseuille flow and the 4 : 1 plane contraction flow demonstrate and validate the performance and the capability of the proposed scheme.

Key words: non-isothermal non-Newtonian fluid flows; fractional step algorithm; characteristics; characteristic based split (CBS)