第49卷第2期
2009年3月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 49, No. 2
Mar. 2009

应用数学

文章编号：1000-8608(2009)02-0299-04

求解线性0-1规划的一种连续化方法

李艳艳[1]，李兴斯[*2]

（1.大连理工大学 应用数学系，辽宁 大连 116024；
2.大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室，辽宁 大连 116024）

摘要：线性0-1规划作为一种特殊形式的整数规划，在科学和工程问题中有许多应用. 基于拉格朗日松弛方法，提出求解线性0-1规划的一种连续化方法. 该方法不仅给出了原问题显式形式的对偶函数，而且对偶变量的数目仅等于原问题部分约束的个数，原来的线性0-1规划问题被转化为只有简单约束的普通优化问题，极大地方便了工程应用. 以背包问题为例进行的数值实验表明，该方法是求解线性0-1规划的行之有效的实用方法.

关键词：0-1规划；拉格朗日松弛；对偶规划；连续化；凝聚函数

中图分类号：O221.7　　**文献标志码**：A

0 引 言

线性0-1规划是决策变量取0或1的特殊整数规划. 由于0和1可以准确表示有与无、是与否、取与舍等逻辑关系或互斥条件，生产实践中的如线路设计、工厂选址、生产计划安排、旅行购物、背包问题、人员安排、代码选取、可靠性等问题都可以建模为线性0-1规划问题求解. 鉴于该问题的深刻背景和广泛应用，许多学者对此问题的研究产生了浓厚兴趣.

线性0-1规划的一般形式为(P)

$$\begin{aligned}\max\quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leqslant b_i;\ i \in \{1,2,\cdots,m\} \\ & x_j \in \{0,1\};\ j \in \{1,2,\cdots,n\}\end{aligned}$$

求解线性0-1规划的方法主要有分支定界法、隐枚举法、线性化方法、布尔代数方法、半定规划方法、启发式方法和连续化方法等. 诸多方法为生产实践提供了有力工具. 近年来，随着工业技术的发展及大规模问题求解的需要，连续化方法逐渐受到关注并且得到了不同层次的探索性研究[1~5]. 本文基于拉格朗日松弛理论，提出一种新的连续化方法，以便易于计算机数值实现，方便工程应用.

1 线性0-1规划问题的连续化方法

拉格朗日松弛法是优化中一种有效处理约束的技术[6]. 本文利用该方法将问题(P)的约束 $\mathbf{g}(\boldsymbol{x}) \leqslant \mathbf{0}$ 吸收到目标函数中，目标函数仍然保持线性. 其中 $g_i(\boldsymbol{x}) := \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j - b_i$；$i = 1,2,\cdots,m$.

对线性0-1规划问题(P)，对应约束 $\mathbf{g}(\boldsymbol{x}) \leqslant \mathbf{0}$ 的拉格朗日函数为

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a_{ij} x_j - b_i);$$
$$\mathbf{A} \in \boldsymbol{R}^{m\times n},\ \mathbf{c} \in \boldsymbol{R}^{n},\ \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}_{+}^{m} \tag{1}$$

则(P)的松弛问题为

$$(\mathrm{LR})\quad \max_{\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^n} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^{n} \Big(c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij}\Big) x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i \tag{2}$$

设 v_{LR} 和 v 分别代表问题(LR)和(P)的最优值，对于任意可行解 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$，有 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a_{ij} x_j - b_i) \leqslant 0$，所以 $v_{\mathrm{LR}} \geqslant v$. 如何选取合适的 $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}_{+}^{m}$ 使得 v_{LR}

收稿日期：2007-05-10；　**修回日期**：2008-12-15.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10572031).
作者简介：李艳艳(1979-)，女，博士生，E-mail：emilylee424@yahoo.com.cn；李兴斯*(1942-)，男，教授，博士生导师.

最接近 v,转化为求解对偶问题

$$\min_{\boldsymbol{\lambda}\in \mathbf{R}_{+}^{m}} \theta(\boldsymbol{\lambda}) = \max_{\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^{n}} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) \tag{3}$$

一般地,对偶函数没有解析表达式,求解对偶问题需借助于传统的切平面类型或次梯度类型方法[7].与以往算法不同,本文巧妙消掉原变量,得到显式形式对偶函数,过程如下:

$$\begin{aligned}\theta(\boldsymbol{\lambda}) &= \max_{\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^{n}} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = \\ &\sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i + \max_{\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^{n}}\sum_{j=1}^{n}\Big(c_j - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}\Big)x_j = \\ &\sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i + \sum_{j=1}^{n}\max\Big\{c_j - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij},0\Big\}\end{aligned} \tag{4}$$

于是,对偶问题转化为(LD)

$$\begin{aligned}\min \quad & \theta(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i + \sum_{j=1}^{n}\max\Big\{c_j - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij},0\Big\} \\ \text{s. t.} \quad & \boldsymbol{\lambda}\geqslant \mathbf{0}\end{aligned} \tag{5}$$

引理 1 无论原空间中约束集合、目标函数等结构、取值如何,对偶函数 $\theta(\boldsymbol{\lambda})$,$\boldsymbol{\lambda}\in \mathbf{R}^{m}$ 总是凸的、下半连续的[6].

定理 1 对偶问题(LD)为凸规划.

从模型(LD)中可以看出对偶问题的维数仅等于原问题部分约束的个数 m,而通常情况下该数远小于原问题(P)的维数 n.所以,对偶问题是一个相对小规模、仅含有非负约束的连续优化问题.

2 算法实现

模型(LD)中对偶函数为分片线性函数,记 $z_j = c_j - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}$,使得 $z_j=0$ 的 $\boldsymbol{\lambda}\in \mathbf{R}_{+}^{m}$ 为对偶函数的非光滑点.该函数经过凝聚函数[8]光滑化之后,对偶问题转化为可微优化问题($\mathrm{LD_p}$)

$$\begin{aligned}\min \quad & \bar{\theta}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i + \sum_{j=1}^{n}\Big\{\frac{1}{p}\times \\ & \qquad \ln\Big\{\exp\Big[p\Big(c_j - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}\Big)\Big]+1\Big\}\Big\} \\ \text{s. t.} \quad & \boldsymbol{\lambda}\geqslant \mathbf{0}\end{aligned} \tag{6}$$

其中 p 为凝聚参数.

定理 2 $p\to\infty$ 时,$\bar{\theta}(\boldsymbol{\lambda})\to\theta(\boldsymbol{\lambda})$.

证明 设 $\omega_j(\boldsymbol{\lambda}) = \max\Big\{c_j - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij},0\Big\}$,$\bar{\omega}_j(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{p}\ln\Big\{\exp\Big[p\Big(c_j - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}\Big)\Big]+1\Big\}$;$j=1,\cdots,n$.只需证明对任意 $j\in\{1,\cdots,n\}$,当 $p\to\infty$ 时,$\bar{\omega}_j(\boldsymbol{\lambda})\to\omega_j(\boldsymbol{\lambda})$ 成立.

设 $h_{j1}(\boldsymbol{\lambda}) = \exp\Big(c_j - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}\Big)$,$h_{j2}(\boldsymbol{\lambda})=1$,且 $\boldsymbol{h}_j(\boldsymbol{\lambda}) = (h_{j1}(\boldsymbol{\lambda}) \quad h_{j2}(\boldsymbol{\lambda}))^{\mathrm{T}}$.则

$$\begin{aligned}&\omega_j(\boldsymbol{\lambda}) = \ln\max(\boldsymbol{h}_j(\boldsymbol{\lambda})) = \ln\|\boldsymbol{h}_j(\boldsymbol{\lambda})\|_{\infty} \\ &\bar{\omega}_j(\boldsymbol{\lambda}) = \ln\|\boldsymbol{h}_j(\boldsymbol{\lambda})\|_{p} \\ &\lim_{p\to\infty}\bar{\omega}_j(\boldsymbol{\lambda}) = \lim_{p\to\infty}\ln\|\boldsymbol{h}_j(\boldsymbol{\lambda})\|_{p} = \\ &\qquad \ln\lim_{p\to\infty}\|\boldsymbol{h}_j(\boldsymbol{\lambda})\|_{p} = \\ &\qquad \ln\|\boldsymbol{h}_j(\boldsymbol{\lambda})\|_{\infty} = \omega_j(\boldsymbol{\lambda}) \qquad \square\end{aligned}$$

定理 3 $0\leqslant\bar{\theta}(\boldsymbol{\lambda}) - \theta(\boldsymbol{\lambda})\leqslant \dfrac{n\ln 2}{p}$.

证明 只需证明对任意 $j\in\{1,\cdots,n\}$,$0\leqslant\bar{\omega}_j(\boldsymbol{\lambda}) - \omega_j(\boldsymbol{\lambda})\leqslant\ln 2/p$ 成立.设 $\eta_{j1}(\boldsymbol{x}) = c_j - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}$,$\eta_{j2}(\boldsymbol{x})=0$.于是,$\omega_j(\boldsymbol{\lambda}) = \max(\eta_{j1}(\boldsymbol{x}),\eta_{j2}(\boldsymbol{x}))$,而且 $\bar{\omega}_j(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{p}\ln[\exp(p\eta_{j1}(\boldsymbol{x}))+\exp(p\eta_{j2}(\boldsymbol{x}))]$,进一步可以写成

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_j(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{p}\ln\{&\exp[p(\eta_{j1}(\boldsymbol{x}) - \omega_j(\boldsymbol{x}))]+ \\ &\exp[p(\eta_{j2}(\boldsymbol{x}) - \omega_j(\boldsymbol{x}))]\} + \omega_j(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

由于 $\eta_{j1}(\boldsymbol{x})\leqslant\omega_j(\boldsymbol{\lambda})$,$\eta_{j2}(\boldsymbol{x})\leqslant\omega_j(\boldsymbol{\lambda})$,$0\leqslant\bar{\omega}_j(\boldsymbol{\lambda}) - \omega_j(\boldsymbol{\lambda})\leqslant\ln 2/p$.代入式(6),对 j 求和,得证. $\square$

算法(LRC):

Step 1 给定 $n,m,\boldsymbol{b},\mathbf{A},\boldsymbol{c},\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = 5\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{e}_n,p=10^{6},\delta=-10^{-6},k=1$.

Step 2 求解约束极小化问题($\mathrm{LD_p}$),设其最优解为 $\boldsymbol{\lambda}^{*}$.

Step 3 记 $\bar{p}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{*}a_{ij}$;$j=1,\cdots,n$.若 $\bar{p}_j\geqslant\delta$,则 $x_j^{(k)}=1$;否则,$x_j^{(k)}=0$.

Step 4 记 $\boldsymbol{w} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{b}$,$w_{\max} = \max\{w_i \mid i=1,\cdots,m\}$,若 $w_{\max}>0$,则转下一步;否则,终止,输出最优解 $\boldsymbol{x}^{*}$.

Step 5 若 $\bar{p}_j\leqslant\delta$,则 $x_j^{(k)}=0$.否则,$\delta=\delta+0.5\times10^{-6}$,$k=k+1$,转上一步.

3 数值算例

本文以网上 50 多道背包问题为例对上述方法进行了数值试验,并且与其他算法结果进行了比较.这些问题根据约束个数和来源不同分为两部分:

(1)利用 David Pisinger 在文献[9]中提供的

程序（Hhttp://www. diku. dk/～ pisinger/codes. html)，随机生成 50 道考题，对每一道考题，$n=50$，$m=1$. 计算结果如表 1.

表 1　一个约束、50 个变量的背包问题计算结果比较

Tab. 1　Comparison of results for knapsack problem with single constraint and 50 variables

No.	目标函数最优值			约束满足情况		相对对偶间隙
	Best known	LP	本文	LP	本文	本文
1	2 024	2 024	2 024	−22	−22	0.007 996
2	2 168	2 168	2 168	−1	−1	0.000 428
3	1 888	1 900	1 866	17	−43	0.013 058
4	1 914	1 915	1 842	1	−94	0.039 214
5	1 752	1 778	1 704	27	−68	0.031 085
6	2 051	2 071	1 992	12	−80	0.034 486
7	2 061	2 091	2 043	35	−43	0.012 952
8	2 088	2 104	2 030	11	−85	0.032 276
9	2 208	2 205	2 205	−12	−12	0.005 442
10	1 698	1 719	1 672	28	−43	0.017 024
11	2 084	2 108	2 069	18	−29	0.011 631
12	1 862	1 893	1 849	29	−29	0.011 898
13	2 070	2 095	2 047	14	−31	0.016 154
14	2 232	2 247	2 192	12	−55	0.020 597
15	1 899	1 899	1 899	−1	−1	0.000 311
16	1 966	1 966	1 966	−4	−4	0.001 232
17	1 998	1 998	1 998	−6	−6	0.001 900
18	1 936	1 914	1 914	−41	−41	0.015 952
19	2 038	2 062	1 983	19	−79	0.032 115
20	1 927	1 940	1 851	11	−85	0.042 573
21	1 665	1 689	1 645	26	−46	0.017 089
22	2 001	1 993	1 993	−22	−22	0.007 701
23	2 033	2 063	1 992	32	−65	0.023 884
24	2 155	2 182	2 129	26	−43	0.015 514
25	2 135	2 115	2 115	−38	−38	0.015 343
26	2 325	2 338	2 256	10	−74	0.032 020
27	2 143	2 167	2 097	16	−80	0.027 818
28	2 069	2 077	2 007	1	−98	0.034 526
29	1 900	1 917	1 866	16	−45	0.020 162
30	2 063	2 050	2 050	−31	−31	0.010 674
31	1 901	1 907	1 898	5	−12	0.003 347
32	2 225	2 225	2 225	−12	−12	0.004 281
33	2 112	2 100	2 100	−21	−21	0.006 727
34	1 980	1 961	1 961	−30	−30	0.010 836
35	2 022	2 018	2 018	−30	−30	0.010 521
36	1 904	1 924	1 895	18	−30	0.009 565
37	1 683	1 699	1 657	21	−61	0.018 856
38	1 903	1 867	1 867	−59	−59	0.021 068
39	2 445	2 445	2 445	−2	−2	0.000 634
40	2 018	2 018	2 018	−13	−13	0.003 813
41	2 110	2 144	2 069	28	−65	0.025 336
42	2 009	2 005	2 005	−15	−15	0.005 637
43	2 227	2 227	2 227	−2	−2	0.000 794
44	2 270	2 295	2 208	9	−70	0.034 913
45	2 128	2 166	2 082	36	−51	0.023 651
46	2 115	2 124	2 076	5	−53	0.021 128
47	2 164	2 164	2 164	−1	−1	0.000 378
48	2 058	2 058	2 058	−4	−4	0.001 560
49	1 834	1 826	1 826	−23	−23	0.007 697
50	2 218	2 208	2 208	−22	−22	0.008 464

(2)对 OR-library(http://people. brunel. ac. uk/～ mastjjb/jeb/orlib/mknapinfo. html）中 mknap 考题集所含的 7 道考题进行了计算，结果如表 2.

表 2　多约束背包问题计算结果比较

Tab. 2　Comparison of results for multi-dimensional knapsack problem

No.	目标函数最优值			相对对偶间隙
	Best known	LP	本文	本文
1	3 800	3 200	3 800	0.087 895
2	8 706	9 159	8 578	0.083 936
3	4 015	4 105	4 015	0.027 895
4	6 120	5 920	6 090	0.010 673
5	12 400	12 440	12 320	0.011 526
6	10 618	11 403	10 387	0.027 438
7	16 537	16 235	16 256	0.021 900

其中，Best known 为目前已知最优解；LP 为原问题中约束 $\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^n$ 松弛为 $\boldsymbol{x}\in[0,1]^n$ 后，求解相应的线性规划问题，然后通过圆整得到整数解. 相对对偶间隙，即对偶问题目标函数最优值与原问题目标函数最优值的相对差. 约束满足情况表示约束 $g(\boldsymbol{x})$ 右端求得的函数值. 对多约束问题，该量表示一个向量，所以略去，而仅对一个约束的考题，将结果在表 1 中列出.

从表 1、2 可以看出，本文提出的拉格朗日松弛方法与上面提到的 LP 方法得到的对偶问题虽然都相当于原问题的某种凸包络，但是在求解0-1规划时，LP 方法不如本文方法有效. 例如，LP 方法采用圆整化技术将 0.9 整合成 1 之后，约束 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\leqslant\boldsymbol{0}$ 可能不再满足，即得不到可行解. 此外，还可能出现所得到的原问题目标函数值超过其松弛问题所提供的目标函数值的上界.

4　结　语

针对线性 0-1 问题，本文提出了一种思路新颖且易于计算机编程实现的有效算法. 该算法通过巧妙处理，将原来的大规模离散问题转化为一个连续、小规模的对偶问题的求解，具有较高的实用价值. 本文只对该方法进行了初步尝试，关于细节方面的工作，有待进一步完善.

参考文献：

[1] AUDET C, HANSEN P, JAUMARD B, *et al*. Links between linear bilevel and mixed 0-1 programming problems [J]. **Journal of Optimization Theory and Applications**, 1997, **93**(2):273-300

[2] KIWIEL K C, LINDBERG P O, NÕU A. Bregman proximal relaxation of large-scale 0-1 problems [J]. **Computational Optimization and Applications**, 2000, **15**(1):33-44

[3] PARDALOS P M, ROMEIJN H E, TUY H. Recent developments and trends in global optimization [J]. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 2000, **124**(1-2):209-228

[4] PARDALOS P M. Continuous approaches to discrete optimization problems [M] // **Nonlinear Optimization and Applications**. New York: Plenum Publishing, 1996:313-328

[5] NG K M. A continuation approach for solving nonlinear optimization problems with discrete variables [D]. Stanford:Stanford University, 2002

[6] LEMARECHAL C. Lagrangian relaxation [M] // **Computational Combinatorial Optimization**. Heidelberg:Springer-Verlag, 2001

[7] FRANGIONI A. About Lagrangian methods in integer optimization [J]. **Annals of Operations Research**, 2005, **139**(1):163-193

[8] LI Xing-si. An efficient approach to a class of non-smooth optimization problems [J]. **Science in China (Series A)**, 1994, **37**(3):323-330

[9] PISINGER D. Core problems in knapsack algorithms [J]. **Operations Research**, 1999, **47**(4):570-575

A continuous solution to linear 0-1 programming

LI Yan-yan[1], LI Xing-si[*2]

(1. Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Linear 0-1 programming, as a special form of integer programming, has numerous applications to theory as well as to engineering. A Lagrangian relaxation-based continuous solution is presented for solving linear 0-1 programming. It transforms the primal problem into an ordinary optimization problem with an explicit dual function and simple constraints, with smaller size than primal constraints. It is convenient for engineering application. Numerical experiments have been made on certain knapsack problems and computational results show that the proposed algorithm is very promising.

Key words: 0-1 programming; Lagrangian relaxation; dual programming; continuation; aggregate function