

基于均匀化方法的土工格栅等效本构关系研究

任 懿, 杨海天*, 牛 斌, 阎 军

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 土工格栅在岩土、交通、水利等工程中发挥着重要作用. 将土工格栅与土看做一种广义复合材料, 选取恰当的代表单元, 采用基于周期结构多尺度渐近分析的均匀化技术, 建立了预测弹性等效本构参数的数值计算模型. 利用该模型, 可方便合理地考虑各组分材料性质、尺寸对宏观等效弹性参数的影响, 从而为土工格栅等效弹性参数的试验研究及土工格栅的设计提供有益的理论参考, 其思路也可推广于格栅与土体宏观等效蠕变本构特性的预测.

关键词: 土工格栅; 均匀化; 本构关系
中图分类号: TU432 **文献标志码:** A

0 引言

土工格栅是经拉伸形成的具有方形或矩形格子状的聚合物材料, 重量轻、强度高、耐腐蚀、抗降解、施工简单快捷, 与土工织物、土工膜等其他土工合成材料相比, 具有网孔尺寸稳定性好、不易断裂、抗冲击穿刺性强、对回填土性质要求较低等优点, 被广泛用于挡土墙、边坡、路堤、大坝以及桥台的加固, 在岩土、交通、土木环境、水利等工程中发挥了重要作用^[1~3].

土工格栅研究的重要内容之一, 是在计算分析中如何考虑土工格栅的计算模型. 方法之一是将格栅的影响考虑为土体的等效附加应力^[4,5], 但如何合理确定等效附加应力参数^[5]仍是需要深入探讨的问题. 也可在计算中将格栅与土体作为独立个体处理, 并设置接触面单元考虑土体与格栅的界面效应^[2,3]. 由于单个格栅的尺寸与宏观计算尺度往往相差较大, 当格栅较多时, 不仅给计算带来不便, 计算开销可能也会难以承受.

为方便计算、节省计算开销, 一种变通方法是将格栅与其加固范围内的土体作为一种广义宏观等效复合材料. 等效本构参数可通过试验^[2,3]或理论推导/计算的方式获取.

试验无疑是获取等效本构参数的重要手段, 但很多情况下可能受到设备、外界环境等因素的影响. 另一方面, 有限的试验范围, 只能考虑组分的某些特定组合. 此外, 小尺寸的室内试验结果与大尺寸的等效参数之间可能存在误差. 因此, 通过近代均匀化技术, 从理论上建立预测等效本构参数的一般方法, 不仅可为试验研究提供必要的补充和理论依据, 也可为土工格栅的设计提供必要的参考.

为此, 本文将土工格栅看做广义复合材料, 选取恰当的代表单元, 通过基于周期结构多尺度渐近分析的均匀化技术^[6], 建立预测土工格栅面内弹性等效本构参数的数值计算模型, 可考虑格栅中含与不含土体的情况.

1 渐近均匀化方法简介

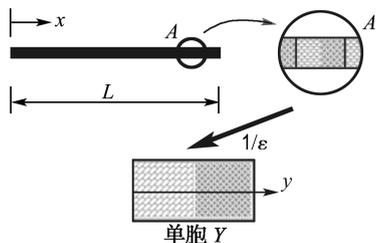
渐近均匀化方法^[6]在周期性假设前提下, 通过多尺度展开, 来有效地预测材料的宏观力学特性.

考虑由单胞周期性排布形成的复合材料, 引入坐标 x 和 $y (= x/\epsilon)$, ϵ 为一小参数. x 表示宏观尺度, y 表示“放大了”的微观尺度^[6], 如图 1 所示.

收稿日期: 2007-06-11; 修回日期: 2009-04-13.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772035, 10721062, 10472019); “九七三”国家重点基础研究规划资助项目(2005CB321704); 辽宁省中青年学术带头人基金资助项目.

作者简介: 任 懿(1980-), 男, 博士生; 杨海天*(1956-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, E-mail: haitian@dlut.edu.cn.

图1 x, y 及 ϵ 的关系Fig. 1 The relationship among x, y and ϵ

考虑一个弹性问题,其平衡方程表示为

$$\sigma_{ijkl}^{\epsilon} + f_{ijkl}^{\epsilon} = 0 \quad (1)$$

应力 - 应变及应变 - 位移关系为^[6]

$$\sigma_{ij}^{\epsilon} = E_{ijkl}^{\epsilon} e_{kl}^{\epsilon} \quad (2)$$

$$e_{kl}^{\epsilon} = \frac{1}{2}(u_{k,l}^{\epsilon} + u_{l,k}^{\epsilon}) \quad (3)$$

式中: $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$; f_{ijkl}^{ϵ} 为体力; E_{ijkl}^{ϵ} 为材料弹性模量; u^{ϵ} 为位移; σ_{ij}^{ϵ} 为应力; e_{kl}^{ϵ} 为应变; 上标 ϵ 表示这些量对场的依赖。

式(1)及相应边界条件的虚位移方程可写为

$$\int_{\Omega^{\epsilon}} E_{ijkl}^{\epsilon} \frac{\partial u_k^{\epsilon}}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega^{\epsilon}} f_i^{\epsilon} v_i d\Omega - \int_{\Gamma_i} t_i v_i d\Gamma = 0 \quad (4)$$

其中 Ω^{ϵ} 表示材料的实体部分, t_i 表示作用在 Ω^{ϵ} 边界 Γ_i 上的面力, v_i 为虚位移。

将位移按小参数 ϵ 展开^[6]:

$$u_i^{\epsilon}(x) = u_i^0(x, y) + \epsilon u_i^1(x, y) + \epsilon^2 u_i^2(x, y) + \dots \quad (5)$$

考虑到如果 $\varphi = \varphi(x, y)$ 是标量、向量或张量函数,那么^[6]

$$\frac{\partial \varphi^{\epsilon}(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y_j};$$

$$\nabla \varphi^{\epsilon}(x) = \varphi(x, y) \quad (6)$$

将式(5)代入式(4)并考虑到式(6),比较 ϵ 同阶项系数,并经推导可得^[6]

$$\int_{\Omega^{\epsilon}} E_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega^{\epsilon}} f_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_i} t_i v_i d\Gamma = 0 \quad (7)$$

其中 $u_k^0(x, y) = u_k^0(x)$ 表示等效材料的宏观位移,与尺度 y 无关; E_{ijkl}^H 为等效弹性张量分量,可由下式求出^[6]:

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{ijkl} - E_{ijpn} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_n} \right) dY \quad (8)$$

其中 E_{ijkl} 是单胞组分的弹性模量; 广义位移函数 χ_p^{kl} ($k, l, p \in \{1, 2, 3\}$) 满足

$$\int_Y E_{ijkl} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y E_{ijpm} \frac{\partial v_i}{\partial y_l} dY \quad (9)$$

\int_Y 表示单胞上的积分, $|Y|$ 表示单胞的体积。

求解式(9)得到广义位移函数 χ_p^{kl} 后代入式(8)即可求得等效弹性矩阵。

对二维问题,方程(8)可简化为^[7]

$$\int_Y (E_{ab} - E_{ac} e_{cb}^{\chi}) e_b^v dY = 0; a, b = 1, 2, 3 \quad (10)$$

其中

$$e_{ab}^{\chi} = L_{ai} \chi_i^b, e_a^v = L_{ai} v_i; i = 1, 2 \quad (11)$$

L_{ai} 是一个微分算符; L_{ai}, χ_i^b, v_i 用矩阵表示分别为

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix}^T \quad (12a)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_1^1 & \chi_1^2 & \chi_1^3 \\ \chi_2^1 & \chi_2^2 & \chi_2^3 \end{pmatrix} \quad (12b)$$

$$\mathbf{v} = (v_1 \quad v_2)^T \quad (12c)$$

于是,式(9)的矩阵表示为

$$\int_Y \mathbf{v}^T \mathbf{L}^T (\mathbf{E} - \mathbf{E} \mathbf{L} \boldsymbol{\chi}) dY = 0 \quad (13)$$

其中 \mathbf{E} 表示由 E_{ab} 组成的矩阵, \mathbf{v} 为虚位移向量。

将 $\boldsymbol{\chi}$ 和 \mathbf{v} 在单胞上按有限元方法离散得

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{N} \bar{\boldsymbol{\chi}} \quad (14a)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{N} \bar{\mathbf{v}} \quad (14b)$$

其中 \mathbf{N} 是形函数矩阵, $\bar{\boldsymbol{\chi}}$ 和 $\bar{\mathbf{v}}$ 分别代表 $\boldsymbol{\chi}$ 和 \mathbf{v} 的节点矩阵和向量。

将式(14)代入式(13)得

$$\sum_{e_i} \int_{e_i} \mathbf{B}^T (\mathbf{E} - \mathbf{E} \mathbf{B} \bar{\boldsymbol{\chi}}^{e_i}) d\mathbf{y} = 0 \quad (15)$$

$$\mathbf{K} \bar{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{F} \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N} \quad (17)$$

$$\mathbf{F} = \sum_{e_i} \int_{e_i} \mathbf{B}^T \mathbf{E} d\mathbf{y} \quad (18)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e_i} \int_{e_i} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\mathbf{y} \quad (19)$$

\sum_{e_i} 表示对有限元单元的累加。

在一个单胞域上利用式(16)和周期性边界条件可求得 $\bar{\boldsymbol{\chi}}$, 进而可通过式(20)获得等效本构参数 \mathbf{E}_{ab}^H 。

$$E_{ab}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y (E - EB\bar{X}) dY =$$

$$D = \begin{pmatrix} D(11) & D(12) & D(13) \\ D(21) & D(22) & D(23) \\ D(31) & D(32) & D(33) \end{pmatrix} \quad (20)$$

2 双向土工格栅等效弹性本构参数预测

本文考虑双向土工格栅. 图2为双向土工格栅及单胞的示意图, 图3为代表单胞的详图, 其中 β 表示格栅肋的相对宽度.

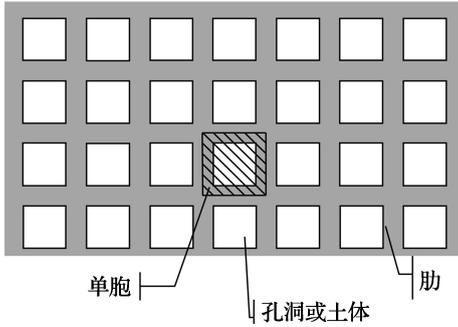


图2 土工格栅及单胞

Fig. 2 The geogrid and the cell

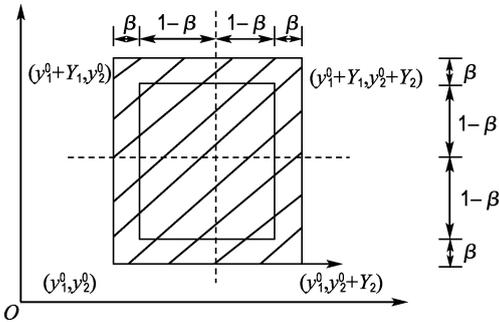


图3 代表单胞

Fig. 3 A representative cell

如将格栅与土体作为一种宏观复合材料, 本文假定:

- (1) 格栅与土体的材料为弹性, 并按周期性排列;
- (2) 格栅与土体之间有良好的粘结, 不考虑界面效应.

本文分两种情况计算双向土工格栅的宏观等效本构参数:

- (1) 不考虑格栅中的土体, 土工格栅可以看做四边是肋(聚合物)、中部有空洞的复合材料;
- (2) 考虑格栅中的土体, 土工格栅可以看做四

边是肋(聚合物)、中间是土体的复合材料.

对于二维情况, 设格栅与土体的本构关系为

$$\sigma_\alpha = D_\alpha \varepsilon_\alpha \quad (21)$$

其中 σ_α 、 ε_α 分别为组分材料的应力、应变向量, D_α 为组分材料的弹性矩阵, 下标 $\alpha = g, s$ 分别对应于格栅肋(聚合物)与土体.

考虑平面应变情况

$$D_\alpha = \frac{E_\alpha(1-\nu_\alpha)}{(1+\nu_\alpha)(1-2\nu_\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu_\alpha}{1-\nu_\alpha} & 0 \\ \frac{\nu_\alpha}{1-\nu_\alpha} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu_\alpha}{1-\nu_\alpha} \end{pmatrix} \quad (22)$$

方程(16)与(20)的求解, 需利用周期性条件

$$\phi(y_1^0, y_2^0) = \phi(y_1^0 + Y_1, y_2^0) =$$

$$\phi(y_1^0 + Y_1, y_2^0 + Y_2) =$$

$$\phi(y_1^0, y_2^0 + Y_2) \quad (23)$$

其中 Y_1 和 Y_2 是结构的周期, (y_1^0, y_2^0) 、 $(y_1^0 + Y_1, y_2^0)$ 、 $(y_1^0 + Y_1, y_2^0 + Y_2)$ 、 $(y_1^0, y_2^0 + Y_2)$ 是单胞4个角点坐标(如图3), ϕ 可以是标量、矢量或张量函数.

计算中采用八节点等参单元.

计算中格栅的网孔规格为 $40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$, 材料弹性本构参数取自 EGA1 * 1A-N 玻璃纤维[8], 可不考虑蠕变效应[2], $E_g = 6.7 \times 10^{10} \text{ Pa}$, $\nu_g = 0.3$, 与式(22)对应的弹性矩阵为

$$D_g = \begin{pmatrix} 0.90192 \times 10^{11} & 0.38654 \times 10^{11} & 0 \\ 0.38654 \times 10^{11} & 0.90192 \times 10^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0.25769 \times 10^{11} \end{pmatrix} \quad (24)$$

图4为单胞有限元网格图, 计算中采用36单元.

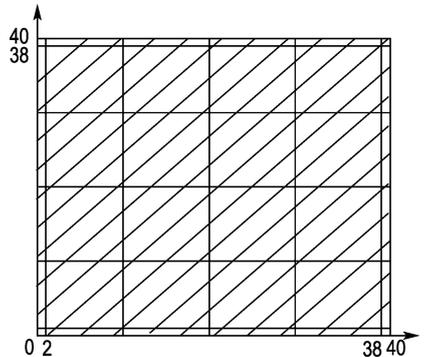


图4 代表单胞有限元网格

Fig. 4 FEM mesh on a representative cell

2.1 不含土体的等效本构预测

在本例中,肋宽 4 mm,即 β 为 10%,考虑格栅间的空洞,将格栅整体作为一种复合材料(格栅和空洞组成)预测结果为

$$D_h = \begin{pmatrix} 0.38382 \times 10^{10} & 0.13688 \times 10^9 & 0 \\ 0.13688 \times 10^9 & 0.38382 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0.47087 \times 10^8 \end{pmatrix} \quad (25)$$

不难看出,由于大面积的空洞,等效刚度 D_h 远低于聚合物本身的刚度 D_g .

2.2 含有土体的等效本构预测

由于土体面内的弹性参数与面外垂直压力的大小关系密切,为在等效本构关系中考虑这种影响,借助邓肯-张本构模型^[9],用 σ_3 近似面外垂直压力,以估算土体的切线初始弹性模量和初始切线泊松比^[9].

$$E_i = K p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (26)$$

$$\nu_i = G - F \lg \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right) \quad (27)$$

其中 K, F, G 是材料参数, $p_a = 101.4$ kPa 是标准大气压强.

在计算中取 $E_s = E_i, \nu_s = \nu_i$.

采用某工程数据^[10] $K = 451.7, n = 0.372, F = 0.034, G = 0.256$. 计算 β 为 5%, σ_3 分别为 100、150、200、250、300、350 MPa 时土工格栅等效弹性本构参数,如图 5 所示. 由图可见,面外正压力的增大提高了等效弹性刚度. 表 1 给出了组分等效本构参数的比较,可以看出,等效参数在土体和聚合物之间. 图 6 给出当 $\sigma_3 = 100$ MPa, β 分别为 5%、6%、7%、8%、9%、10% 时,等效本构参数随格栅肋相对宽度的变化,表明随着格栅肋相对宽度的逐渐增加,等效弹性刚度逐渐增大.

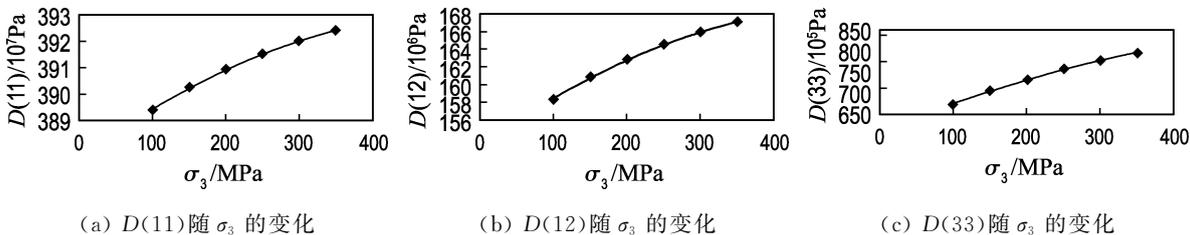


图 5 等效本构参数随 σ_3 的变化

Fig. 5 The variation of equivalent constitutive parameters with σ_3

表 1 组分等效本构参数

Tab. 1 The equivalent constitutive parameters of components

组分	$D(11)/Pa$	$D(12)/Pa$	$D(33)/Pa$
土体	0.55594×10^8	0.19129×10^8	0.18232×10^8
格栅肋(聚合物)	0.90192×10^{11}	0.38654×10^{11}	0.25769×10^{11}
格栅	0.38945×10^{10}	0.15836×10^9	0.67225×10^8

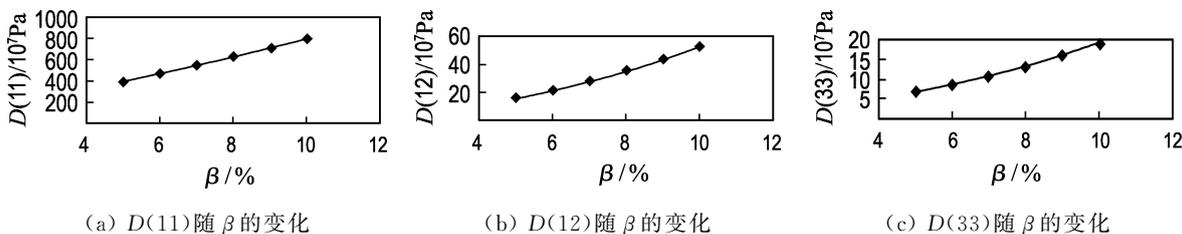


图 6 等效本构参数随 β 的变化

Fig. 6 The variation of equivalent constitutive parameters with β

3 结 论

本文就土工格栅的宏观等效弹性本构参数进行了预测, 计算结果在物理上是合理的. 一些计算表明土工格栅的实际受力远小于其抗拉强度^[11], 这种情况下弹性预测是有实际意义的. 即使考虑格栅和土的蠕变、塑性效应, 本文的预测对于包含格栅与土的整体结构的初始瞬时弹性状态描述也有重要的参考作用.

参 考 文 献:

- [1] 施建勇. 土工织物加筋机理的研究[J]. 河海大学学报, 1996, **24**(4):30-35
- [2] 肖成志. 土工格栅流变特性及加筋挡土墙长期工作性能研究[D]. 大连:大连理工大学, 2005
- [3] 李敬峰. 土工格栅加筋挡土墙的有限元数值分析和性能研究[D]. 大连:大连理工大学, 2004
- [4] 介玉新, 李广信. 加筋土数值计算的等效附加应力法[J]. 岩土工程学报, 1999, **21**(5):614-616
- [5] 介玉新, 李广信, 郑继勤. 纤维加筋土计算的新方法

- [J]. 工程力学, 1999, **16**(3):81-89
- [6] HASSANI B, HINTON E. A review of homogenization and topology optimization I-homogenization theory for media with periodic structure [J]. **Computers and Structures**, 1998, **69**(6):707-717
- [7] 刘书田. 复合材料性能预测与梯度功能材料优化设计[D]. 大连:大连理工大学, 1994
- [8] 马振泉. 玻纤格栅技术指标[EB/OL]. [2007-02-10]. <http://mzq1860.bokee.com/viewdiary.11506218.html>
- [9] 李广信. 高等土力学[M]. 北京:清华大学出版社, 2004
- [10] 大连理工大学工程力学系环境土力学教研室. 北京威克冶金有限责任公司郝家庄尾矿库加高增容现场勘查、取样试验研究及坝体动、静稳定分析(第一部分)现场勘查和土工试验[R]. 大连:大连理工大学, 2005
- [11] 刘 军. 土工格栅加筋挡土墙数值模拟及特性研究[D]. 南京:河海大学, 2006

A homogenization-based investigation on equivalent constitutive relationship of geogrid

REN Yi, YANG Hai-tian*, NIU Bin, YAN Jun

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Geogrid plays an important role in geotechnical, transportation and water conservancy projects. Geogrid and soil are regarded as a kind of general composite material for which the representative cell is selected reasonably. A numerical model to evaluate equivalent elastic constitutive parameters is developed via a multi-scale asymptotic analysis for periodic structures-based homogenizing technology, and the effects of properties and sizes of component materials on the macro-equivalent elastic constitutive parameters can be taken into account conveniently. The work presented here may provide valuable reference for the further application of geogrid and help in the promotion of the forecast of the geogrid and soil macro-equivalent creep constitutive properties.

Key words: geogrid; homogenization; constitutive relationship