

供热空调管网大变化灵敏度计算模型及应用

孙多斌^{*1,2}, 王树刚¹, 解茂昭¹, 唐大伟²

(1. 大连理工大学 能源与动力学院, 辽宁 大连 116024;

2. 中国科学院工程热物理研究所, 北京 100190)

摘要: 在稳态流体管网灵敏度基础上, 通过构造一个实值函数获得一种形式的管网节点压力方程, 在该方程的系数矩阵中引入动力源的压头性能曲线, 最后推导出包含动力源压头变化时管网大变化灵敏度的计算公式和求解方法. 通过算例对比分析, 验证了所导出的大变化灵敏度计算模型的正确性和算法的有效性. 当系统组件的阻抗产生波动之后, 系统输出的压头将随着动力源特性曲线上工况点的移动而发生变化. 表明考虑动力源压头特性曲线之后使得管网大变化灵敏度的计算更符合实际. 该模型在管网系统故障诊断、管网在线模拟以及管网的实际运行特性评估等方面具有较大的应用潜力.

关键词: 大变化灵敏度; 计算模型; 管网

中图分类号: TU833.12 **文献标志码:** A

0 引言

流体管网包括流体管道、管道部件(包括阀门、调节设施)等元件. 管网的微分灵敏度指当管网元件参数有微小变化时, 它所引起的网络性能参数的相对改变量与元件参数的相对改变量之比. 微分灵敏度反映了元件参数的相对变化量对管网性能参数相对变化量的影响. 而大变化灵敏度指在管网微分灵敏度原理基础上, 对于元件参数发生较大变化时, 管网性能参数产生的变化量. Shamir 等^[1]引入了灵敏度概念, 分析了它在网络解算中的作用; Stoner^[2]对描述天然气输送系统的节点形式稳态数学模型进行了微分灵敏度分析, 将非线性模型线性化获得了满意的模拟结果. 大变化灵敏度原理在线性电路分析与设计中应用很成熟, 而在流体管网中相关研究报道很少.

由于供热空调管网系统中的分支参数在管网调节时会发生较大变化, 如阻抗的变化会引起流量的非线性变化, 同时又引起动力源(水泵或风机)的工况变化. 因此, 从管网大变化灵敏度的角度研究管网性能, 更能反映出管网变化的实际情况, 对系统优化节能研究会有较宽的研究余地. 文

献[3]将动力源压头设为定值, 本文将这一条件放宽, 在推导计算模型时将动力源压头特性曲线引入其中, 并对同一算例进行对比分析.

1 基本数学原理

1.1 管网节点压力方程

若一个管网的节点数为 $N+1$, 管段数为 b , 构造某一实值函数 f_1 如下:

$$f_1(Q_b) = \frac{1}{1+\sigma} \sum_{i=1}^b R_i |Q_i|^{\sigma+1} - h_e^T Q_b - h_p^T Q_b \quad (1)$$

式中: $Q_b = (Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_b)^T$ 为分支流量 (b 维) 列矢量; R_i 代表分支阻抗值; $\sigma \geq 1$, 本文取 $\sigma = 2$; $h_e = (h_{e1} \ \dots \ h_{ek} \ \dots \ h_{eb})^T$, $h_{ek} = \frac{a_2}{3} Q_k^2 + \frac{a_1}{2} Q_k + a_0$, a_0, a_1, a_2 是与动力源压头(如水泵扬程、风机风压等)曲线 $h_f = a_2 Q^2 + a_1 Q + a_0$ 对应的二项式系数; $h_p = (h_{p1} \ \dots \ h_{pk} \ \dots \ h_{pb})^T$ 为分支的附加作用压头或自然循环作用力列矢量. 相应式(1)的二阶导数矩阵为

$$\nabla^2 f_1(\mathbf{Q}_b) = \sigma \begin{pmatrix} R_1 | \mathbf{Q}_1 |^{\sigma-1} - \frac{1}{\sigma} a_1 - \frac{2}{\sigma} a_2 | \mathbf{Q}_1 | & & \\ & \ddots & \\ & & R_b | \mathbf{Q}_b |^{\sigma-1} - \frac{1}{\sigma} a_1 - \frac{2}{\sigma} a_2 | \mathbf{Q}_b | \end{pmatrix} \quad (2)$$

引入文献[3]中的节点压力方程如下：

$$\mathbf{A}\mathbf{G}_k^{-1}\mathbf{A}^T \mathbf{p}_N = \mathbf{W} \quad (3)$$

式中： \mathbf{A} 为 $N \times b$ 阶基本节点-分支关联矩阵，其元素由+1和-1或0组成； $\mathbf{p}_N = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_N)^T$ 为节点压力(N 维)列矢量； \mathbf{W} 为输入激发向量。对于一般管网问题，迭代矩阵 \mathbf{G}_k 取为

$$\mathbf{G}_k = \begin{cases} \nabla^2 f_1(\mathbf{Q}_b^{(k)})/\sigma; & \text{若} \nabla^2 f_1(\mathbf{Q}_b^{(k)}) \text{ 正定} \\ \nabla^2 f_1(\mathbf{Q}_b^{(k)})/\sigma + \mathbf{I}/k; & \text{否则} \end{cases} \quad (4)$$

其中 \mathbf{I} 为单位矩阵， k 为迭代次数。令 $\mathbf{H} = \mathbf{A}\mathbf{G}_k^{-1}\mathbf{A}^T$ ，则得最后的管网节点方程为

$$\mathbf{H}\mathbf{p}_N = \mathbf{W} \quad (5)$$

对比文献[3]，矩阵 \mathbf{H} 可表示为

$$\mathbf{H} = \sum_i \left[1 / \left(R_i | \mathbf{Q}_i | - \frac{1}{2} a_1 - a_2 | \mathbf{Q}_i | \right) \right] \times (e_{j_i} - e_{k_i})(e_{j_i} - e_{k_i})^T \quad (6)$$

式中： R_i 表示连在节点 j_i 和 k_i 之间的分支 i 的阻抗； \mathbf{Q}_i 表示分支 i 的流量； e_j 是第 j 个分量为1而其他分量为0的单位向量，也可视为单位矩阵的第 j 列。

1.2 数学模型

假设在一个由 b 个分支组成的管网中只有 m 个($m < b$)分支有变化，下面将形成一个 $(m+1) \times (m+1)$ 维的矩阵，通过它就能获得全部所需的信息^[4]。若有 m 个分支的原始参数值 R_{10} 、 R_{20} 、 \dots 、 R_{m0} 发生了大变化，其变化量分别为 δ_1 、 δ_2 、 \dots 、 δ_m ，则变化后的分支参数新值为

$$R_i = R_{i0} + \delta_i; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

同时，再假设 m 个分支参数的变化引起了 n 个分支的流量发生变化，即 $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_{i0} + \Delta\mathbf{Q}_i$ (该式右端两项分别表示变化前的流量及其变化值)。此时式(6)矩阵 \mathbf{H} 元素的分式部分变为

$$\begin{aligned} & 1 / \left[R_i | \mathbf{Q}_i | - a_2 | \mathbf{Q}_i | - \frac{1}{2} a_1 \right] = \\ & 1 / \left[R_{i0} | \mathbf{Q}_{i0} | - a_2 | \mathbf{Q}_{i0} | - \frac{1}{2} a_1 \right] - \\ & (| \mathbf{Q}_i | - | \mathbf{Q}_{i0} |) (R_{i0} - a_2) / \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(R_{i0} | \mathbf{Q}_{i0} | - a_2 | \mathbf{Q}_{i0} | - \frac{1}{2} a_1 \right) \left(R_{i0} | \mathbf{Q}_i | - a_2 | \mathbf{Q}_i | - \frac{1}{2} a_1 \right) \right] - \delta_i | \mathbf{Q}_i | / \left[\left(R_{i0} | \mathbf{Q}_i | + \delta_i | \mathbf{Q}_i | - a_2 | \mathbf{Q}_i | - \frac{1}{2} a_1 \right) \left(R_{i0} | \mathbf{Q}_i | - a_2 | \mathbf{Q}_i | - \frac{1}{2} a_1 \right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

n 个分支流量的变化又引起了方程(5)右端激发向量的变化^[5]，令 $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \hat{\mathbf{W}}$ ，附加激发向量 $\hat{\mathbf{W}}$ 的分量为

$$\hat{\mathbf{W}}_k = \sum_{i=1}^b a_{ki} \left\{ \left[R_i | \mathbf{Q}_i | \mathbf{Q}_i - (a_0 + a_1 | \mathbf{Q}_i | + a_2 \mathbf{Q}_i^2) - h_{pi} \right] / \left(R_i | \mathbf{Q}_i | - a_2 | \mathbf{Q}_i | - \frac{1}{2} a_1 \right) - \left[R_{i0} | \mathbf{Q}_{i0} | \mathbf{Q}_{i0} - (a_0 + a_1 | \mathbf{Q}_{i0} | + a_2 \mathbf{Q}_{i0}^2) - h_{pi} \right] / \left(R_{i0} | \mathbf{Q}_{i0} | - a_2 | \mathbf{Q}_{i0} | - \frac{1}{2} a_1 \right) \right\} \quad (9)$$

这里的 a_{ki} 和 a_1 、 a_2 是不同的系数。把参数变化的分支以 $1 / \left(R_i | \mathbf{Q}_i | - a_2 | \mathbf{Q}_i | - \frac{1}{2} a_1 \right) \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$ 的形式填入改进节点方程组，其中

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{e}_{j_i} - \mathbf{e}_{k_i}, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{e}_{k_i} - \mathbf{e}_{j_i} \quad (10)$$

\mathbf{e}_l 是除了第 l 个分量为1以外其余分量全为零的向量，下标 i 的下标表示分支 i 的端点。考虑到这 m 个分支参数变化后的改进管网节点方程组变为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{p}_N = & \left\{ \mathbf{H}_0 - \sum_{j=1}^m \left\{ \left[(| \mathbf{Q}_j | - | \mathbf{Q}_{j0} |) (R_{j0} - a_2) \right] / \right. \right. \\ & \left. \left[\left(R_{j0} | \mathbf{Q}_{j0} | - a_2 | \mathbf{Q}_{j0} | - \frac{1}{2} a_1 \right) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \left(R_{j0} | \mathbf{Q}_j | - a_2 | \mathbf{Q}_j | - \frac{1}{2} a_1 \right) \right] \hat{\mathbf{u}}_j \hat{\mathbf{v}}_j^T \right\} - \\ & \sum_{i=1}^m \left\{ \delta_i | \mathbf{Q}_i | / \left[\left(R_{i0} | \mathbf{Q}_i | + \delta_i | \mathbf{Q}_i | - a_2 | \mathbf{Q}_i | - \frac{1}{2} a_1 \right) \left(R_{i0} | \mathbf{Q}_i | - a_2 | \mathbf{Q}_i | - \frac{1}{2} a_1 \right) \right] \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \right\} \right\} \mathbf{p}_N = \mathbf{W} \end{aligned} \quad (11)$$

或写成矩阵形式为

$$(H_0 + \hat{U} \hat{\Lambda} \hat{V}^T + U \mathbf{A} V^T) p_N = W_0 + \hat{W} \quad (12)$$

式中: $\hat{\Lambda}$ 是 $n \times n$ 维对角阵, \mathbf{A} 是 $m \times m$ 维对角阵; \hat{U} 和 \hat{V} 是 $N \times n$ 维矩阵, U 和 V 是 $N \times m$ 维矩阵, 它们只含 0 和 ± 1 元素, 分别写成

$$\begin{aligned} \hat{U} &= (\hat{u}_1 \ \hat{u}_2 \ \dots \ \hat{u}_n), \hat{V} = (\hat{v}_1 \ \hat{v}_2 \ \dots \ \hat{v}_n), \\ U &= (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m), V = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m) \end{aligned} \quad (13)$$

1.3 输出参数求解

参见文献[3], 输出参数定义为

$$F = D^T p_N \quad (14)$$

其中 D 是一个常数列向量, 与所要求的响应函数有关, 有响应时为 1, 否则为 0. 对指定的扰动 δ_i 寻找输出 F , 由 δ_i 引起 F 的变化就是大变化灵敏度.

再采用以下记号: $S = V^T H_0^{-1} \hat{U}_{(m \times n)}$; $\hat{S} = \hat{V}^T H_0^{-1} \hat{U}_{(n \times n)}$; $B = V^T H_0^{-1} U_{(m \times m)}$; $\hat{B} = \hat{V}^T H_0^{-1} U_{(n \times m)}$; $G = D^T H_0^{-1} U_{(1 \times m)}$; $\hat{G} = D^T H_0^{-1} \hat{U}_{(1 \times n)}$; $E = V^T H_0^{-1} W_0 = V^T p_{N0} (m \times 1)$; $\hat{E} = \hat{V}^T H_0^{-1} W_0 (n \times 1)$; $T = V^T H_0^{-1} \hat{W}_{(m \times 1)}$; $\hat{T} = \hat{V}^T H_0^{-1} \hat{W}_{(n \times 1)}$; $F_0 = D^T H_0^{-1} W_0$; $\hat{F}_0 = D^T H_0^{-1} \hat{W}$. 式(12)可简化成最后的 3 个方程:

$$(\hat{\Lambda}^{-1} + \hat{S}) \hat{z} + \hat{B}z = \hat{E} + \hat{T} \quad (15)$$

$$S \hat{z} + (\mathbf{A}^{-1} + B)z = E + T \quad (16)$$

$$F = F_0 + \hat{F}_0 - \hat{G} \hat{z} - Gz \quad (17)$$

从这些方程组可以清楚地看到, 对任何一组扰动 δ_i , 求解上述 3 个方程即可求得 F , 即根据前面所述的原理与方程可以编制 FORTRAN 解算程序, 对管网的灵敏度进行求解.

2 应用算例

以文献[3]的算例为基础(如图 1 所示), 共有 6 个热用户, 一台循环水泵, 其特性曲线为 $-0.192 2Q^2 + 53.058Q + 738 118$, 管网干管和各热用户的阻抗值见表 1. 管网系统在正常工况时, 用户分支 13、14、15、16、17、18 按需提供的流量均为 $100 \text{ m}^3/\text{h}$. 如果切断用户 16(即分支 16 的阻抗发生了大变化), 由编制的 FORTRAN 解算程序求得该管网的大变化灵敏度值见表 2(取节点压力作为输出参数). 表 2 给出了分支 16 的阻抗发生变化前后的用户分支的流量和压损.

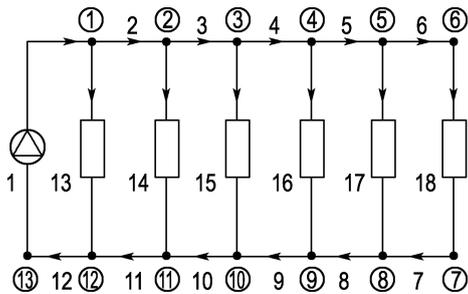


图 1 某供热系统管网简图

Fig. 1 Schematic diagram of a heating pipe network

表 1 各分支阻抗值

Tab. 1 The resistance factor of all branches in the network

干管	阻抗/ (Pa · (m ³ · h ⁻¹) ⁻²)	用户	阻抗/ (Pa · (m ³ · h ⁻¹) ⁻²)
1	0.139	13	60
2	0.200	14	50
3	0.313	15	40
4	0.556	16	30
5	1.250	17	20
6	5.000	18	10
7	5.000		
8	1.250		
9	0.556		
10	0.313		
11	0.200		
12	0.139		

表 2 部分计算结果

Tab. 2 The part calculating results

用户	变化前流量/ (m ³ · h ⁻¹)	变化前压损/ 10 ⁵ Pa	变化后流量/ (m ³ · h ⁻¹)	变化后压损/ 10 ⁵ Pa
13	99.757	5.970 9	101.935	6.234 4
14	99.952	4.995 2	104.282	5.437 4
15	99.864	3.989 1	108.450	4.704 6
16	99.793	2.987 6	0	4.097 1
17	99.845	1.993 8	116.863	2.731 4
18	99.839	0.996 78	116.861	1.365 6

由表 2 可见, 由于用户 16 之后的用户 17 和 18 及其邻近干管的阻抗值未变, 相应管段的流量按同一比例变化, 变化前流量接近, 变化后流量仍基本相同. 计算结果与文献[3]的相应结果符合同一规律, 表明在推导大变化灵敏度计算模型时将定值动力源压头引申到用其特性曲线来表达是可行的. 其次, 本文计算获得的水泵分支输出压头为 $6.652 2 \times 10^5 \text{ Pa}$, 大于文献[3]算出的输出压头 $6.59 \times 10^5 \text{ Pa}$. 这里输出压头将沿水泵特性曲线

变化使模拟结果更符合实际. 第三, 对位于用户16后部的用户流量影响较大, 也就是说, 如果调节网络中的某用户, 其后部的用户如果要保持原来的流量, 就要采取相应措施来满足流量要求.

3 结 语

本文在稳态流体管网灵敏度研究的基础上, 通过构造一个实值函数获得一种形式的管网节点压力方程, 在该方程的系数矩阵中引入动力源的压头性能曲线. 利用此种形式的节点压力方程进一步推导出包含动力源压头变化时管网大变化灵敏度的计算公式和求解方法. 通过算例对比分析, 验证了所导出的大变化灵敏度计算模型的正确性和算法的有效性. 当系统组件的阻抗产生波动之后, 系统输出的压头将随着动力源特性曲线上的工况点移动而发生变化. 表明考虑动力源压头特性曲线之后使得管网大变化灵敏度的计算更符合实际.

参 考 文 献:

- [1] SHAMIR U, HOWARD C D D. Water distribution systems analysis [J]. *Journal of Hydraulic Division*, 1968, **94**(1):219-234
- [2] STONER M A. Sensitivity analysis applied to a steady-state model of natural gas transportation systems [J]. *Society of Petroleum Engineers of AIME Journal*, 1972, **12**(2):115-125
- [3] 王树刚, 蒋 爽, 王宗山, 等. 稳态流体管网的灵敏度 [J]. 大连理工大学学报, 2006, **46**(5):720-724
(WANG Shu-gang, JIANG Shuang, WANG Zong-shan, *et al.* Sensitivity of steady fluid piping networks [J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2006, **46**(5):720-724)
- [4] VLACH J, SINGHAL K. 电路分析和设计的计算机方法[M]. 汪 蕙, 等译. 北京: 科学出版社, 1992
- [5] WORSMAN M, WONG M W T. Non-linear analog circuit fault diagnosis with large change sensitivity [J]. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 2000, **28**(3):281-303

Calculation model and application of large change sensitivity in heating and air-conditioning pipe networks

SUN Duo-bin^{*1,2}, WANG Shu-gang¹, XIE Mao-zhao¹, TANG Da-wei²

(1. School of Energy and Power Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. Institute of Engineering Thermophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: Based on sensitivity of steady fluid pipe networks, a real-valued function is introduced to derive a nodal pressure equation with performance curve of driving power, and the extension of large change sensitivity (LCS) with constant head of driving power to calculation of LCS with performance curve of driving power is discussed. The calculation model of LCS is examined by comparing it with the example. The effectiveness of the proposed calculation model and its algorithm of LCS with performance curve of driving power is demonstrated. It becomes so faster and more efficient for computational complexity that the response to a component perturbation is calculated through LCS by solving a reduced set of final equations. LCS also causes a great reduction in overall computational cost for the solution of a large number of component perturbations. LCS is a method for efficiently solving pipe network's response to parameter variations that need not be small. The calculation model of LCS shows an adaptation to the work of evaluating the real characteristic of the network, online simulating and fault diagnosing.

Key words: large change sensitivity; calculation model; pipe network