

文章编号: 1000-8608(2009)03-0427-05

密肋复合墙体复合材料等效弹性板模型研究

孙 静*, 姚谦峰

(北京交通大学 土木建筑工程学院, 北京 100044)

摘要: 密肋复合墙体是建筑结构新体系密肋壁板结构的主要受力构件。提出用复合材料理论对密肋复合墙体的弹性阶段进行结构分析。以 Mori-Tanaka 的方法为基础, 建立了适用于密肋复合墙体的等效弹性板模型, 并利用弹性力学对各向异性等效弹性板的抗侧刚度进行了推导。该方法考虑了肋梁、肋柱以及砌块的泊松比对弹性常数的影响及板的各向异性对整体弹性抗侧刚度的影响。结合试验资料对模型进行了验证, 结果表明所建立的复合材料等效弹性板模型及其抗侧刚度推导是可行的。

关键词: 密肋复合墙体; 复合材料; 等效弹性板模型; Mori-Tanaka 方法; 抗侧刚度

中图分类号: TU318.1 **文献标志码:** A

0 引言

密肋壁板结构是近年来提出的一种轻质、高强、节能、抗震的建筑结构新体系。它主要由预制密肋复合墙板与隐形框架及楼板装配现浇而成。其中, 密肋复合墙板是以截面及配筋较小的混凝土肋格为骨架, 内嵌以炉渣、粉煤灰等工业废料为主要原料的加气混凝土轻质砌块预制而成, 它利用密布的肋梁、肋柱与内嵌轻质砌块形成具有共同工作性能的复合墙板; 墙板又与隐形框架整浇为一体, 形成增强密肋复合墙体^[1]。

进行密肋复合墙体的弹性分析时, 以往研究采用换算截面法或二次单向单层纤维复合材料模型和双向纤维单层复合材料模型^[2,3]。这几种模型计算简洁, 模型直观, 具有一定的精度, 能够满足实际工程的需要。但由于在计算弹性模量时没有考虑基体(砌块)和纤维(混凝土)的泊松比及纤维的长径比, 并且计算的结果与纤维加强的顺序有关, 在有些情况下会出现与实际情况不相符的情况, 如若纵横两个方向的纤维体积比相同, 则采用上述两种方法计算的弹性模量两个方向不同, 而实际情况应该是相同的。本文以 Mori-Tanaka 的方法为基础, 提出一种复合材料改进型等效弹

性板模型, 以弥补以上两种方法的不足。

此外, 用等效弹性板模型建立的复合墙体, 平面内两个方向的弹性模量一般并不相同, 这主要是由于肋梁和肋柱的截面尺寸不一样, 纤维对基体的加强作用不一样, 这样就会造成形成的等效弹性板是正交各向异性的, 它的抗侧刚度不能直接利用以往正交各向同性墙体的抗侧刚度, 因此还需重新利用弹性力学的方法对其抗侧刚度进行推导。

1 模型的提出

密肋复合墙体是由钢筋混凝土肋梁、肋柱、外框及嵌固于其中的轻质砌块构成, 其充分利用砌块的轻质、保温、环保等性能, 又考虑到混凝土高强度、高弹性模量等特点, 从而形成一种特殊的复合墙体, 既体现了材料功能的复合, 又体现了结构的复合。在弹性阶段, 墙体作为一个整体受力构件, 由肋梁、肋柱、外框组成的框格与轻质砌块变形协调, 其力学性能既不同于混凝土, 也不同于轻质砌块^[4]。

应用复合材料理论, 在宏观上将墙体视为一种以轻质砌块为基体, 混凝土肋梁、肋柱、外框为

增强纤维的复合材料等效弹性板。墙体简化材料模型如图1所示。按照混凝土在墙体中体积率不变的原则,将混凝土肋柱、肋梁、外框均匀化为许多细小纤维条,均匀地分布在由轻质砌块构成的基体内,从而将墙体等效为一种正交各向异性的纤维条增强复合材料弹性板。

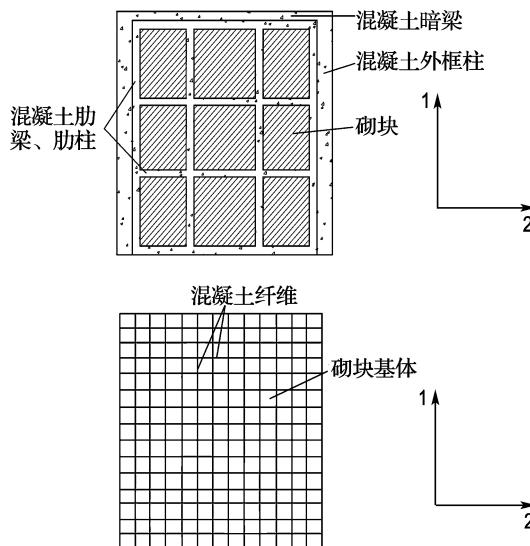


图1 密肋复合墙体简化材料模型

Fig. 1 The simplified material model of multi-ribbed slab wall

2 模型的建立

2.1 Mori-Tanaka 方法简介

研究复合材料有效性能的细观力学方法很多,其中 Mori-Tanaka 方法由于运算简单,同时在一定程度上考虑了复合材料中纤维之间的相互作用,因此得到广泛的应用,成为处理各种非均质复合材料性能的有效手段之一^[5],下面就其原理做以简单介绍。

如图2所示,设坐标轴3方向沿着纤维纵向,轴2沿纤维厚度(t)方向,轴1沿纤维宽度(w)方向,给定的复合材料在其边界上受到远场均匀应力 σ^0 的作用,由于纤维的存在,实际复合材料基体的平均应力为

$$\sigma^{(0)} = \sigma^0 + \tilde{\sigma} = L_0(\epsilon^0 + \tilde{\epsilon}) \quad (1)$$

式中: L_0 是基体材料的弹性常数张量,其弹性常数可表示为 $C_{ijkl}^0 = \lambda_0 \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_0 \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_0 \delta_{il} \delta_{jk}$, $\tilde{\sigma}$ 和 $\tilde{\epsilon}$ 是由于纤维的存在引起的扰动应力和扰动应变。

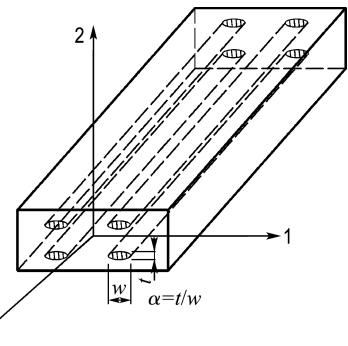


图2 单向纤维增强复合材料示意图

Fig. 2 The schematic representation of a composite with monotonically aligned fibres

由于材料弹性性质的差别,在外力场作用下复合材料纤维相内的平均应力与平均应变又不同于基体内的相应平均值,它们的差值为 σ' 与 ϵ' ,即

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &= \sigma^0 + \tilde{\sigma} + \sigma' = L_1(\epsilon^0 + \tilde{\epsilon} + \epsilon') = \\ &L_0(\epsilon^0 + \tilde{\epsilon} + \epsilon' - \epsilon^*) \end{aligned} \quad (2)$$

其中 L_1 为夹杂相的弹性常数张量,其弹性常数可表示为 $C_{ijkl}^1 = \lambda_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_1 \delta_{il} \delta_{jk}$; ϵ^* 为夹杂的等效本征应变。沿用 Eshelby 的推导结果有

$$\epsilon' = S\epsilon^* \quad (3)$$

这里 S 为四阶 Eshelby 张量,它与基体的弹性性质和夹杂的形状有关,由式(1)、(2)、(3)可得

$$\sigma' = L_0(\epsilon' - \epsilon^*) = L_0(S - I)\epsilon^* \quad (4)$$

另外,复合材料的体积平均应力 $\bar{\sigma}$ 等于其远场作用的均匀应力 σ^0 ,所以

$$\sigma^0 = (1 - V_1)\sigma^{(0)} + V_1\sigma^{(1)} \quad (5)$$

利用式(1)和(2)可得

$$\tilde{\epsilon} = -V_1(\epsilon' - \epsilon^*) = -V_1(S - I)\epsilon^* \quad (6)$$

将式(3)与(6)代入式(2)中得

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ B_4 & B_5 & B_6 \\ B_7 & B_8 & B_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^* \\ \epsilon_{22}^* \\ \epsilon_{33}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 & 1 & 1 \\ 1 & D_1 & 1 \\ 1 & 1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^0 \\ \epsilon_{22}^0 \\ \epsilon_{33}^0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (7)$$

由式(7)可得等效本征应变 ϵ_{ij}^* 与外加应变 ϵ_{ij}^0 之间的关系为

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11}^* \\ \epsilon_{22}^* \\ \epsilon_{33}^* \end{pmatrix} = \frac{1}{A} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^0 \\ \epsilon_{22}^0 \\ \epsilon_{33}^0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

对于 $\alpha = t/w \rightarrow 0$ 的纤维条增强材料^[6~8],Eshelby 张量可大大简化。剪切应变分量为

$$\epsilon_{12}^* = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_1} \epsilon_{12}^0$$

$$\varepsilon_{13}^* = \frac{-(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)V_1^z}\varepsilon_{13}^0$$

$$\varepsilon_{23}^* = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_1}\varepsilon_{23}^0$$

根据纤维等效本征应变就可以预报单向纤维条增强复合材料的弹性常数。

2.2 密肋复合墙体的改进等效弹性板模型

由于密肋复合墙体等效弹性板模型中双向都有纤维,可以只考虑纤维对本方向的加强,即肋柱方向的纤维只加强该方向,而对于肋梁方向的影响忽略,同理肋梁方向的纤维也只加强该方向。另外由于墙体在法线方向的尺寸远比其他方向的小,可简化成平面应力模型。根据式(8)可以得到密肋复合墙体的改进等效弹性板模型中的几个弹性常数。

(1) 沿肋梁方向的纵向弹性模量 E_{11}

沿肋梁方向作用均匀拉伸应力 σ_{11}^0 ,利用胡克定律可以导出如下关系: $\sigma_{11}^0 = E_{11} \bar{\varepsilon}_{11}$, 其中 $\bar{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11}^0 + V_1^z \varepsilon_{13}^*$, 而对于砌块材料有 $\sigma_{11}^0 = E_0 \varepsilon_{11}^0$, $\varepsilon_{22}^0 = \varepsilon_{33}^0 = -\gamma_0 \varepsilon_{11}^0$, 从以上两式可得

$$\begin{aligned} \frac{E_{11}}{E_0} &= \frac{\varepsilon_{11}^0}{\varepsilon_{11}^0 + V_1^z \varepsilon_{13}^*} = \\ &\frac{1}{1 + V_1^z [A_1 - \gamma_0 (A_2 + A_3)]/A} \Rightarrow \\ E_1 &= V_1^z E_1 + V_0 E_0 + \\ &\frac{4V_1^z V_0 (\gamma_1 - \gamma_0)^2}{V_1^z \left(\frac{1}{\kappa_0} + \frac{1}{\mu_0}\right) + V_0 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\mu_1}\right)} \end{aligned} \quad (9)$$

(2) 沿肋柱方向的横向弹性模量 E_{33}

同理可得

$$\begin{aligned} E_{33} &= V_1^z E_1 + V_0 E_0 + \\ &\frac{4V_1^z V_0 (\gamma_1 - \gamma_0)^2}{V_1^z \left(\frac{1}{\kappa_0} + \frac{1}{\mu_0}\right) + V_0 \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\mu_1}\right)} \end{aligned} \quad (10)$$

(3) 向剪切模量 μ_{13}

沿纤维方向的平面内作用纯剪切应力 σ_{13}^0 , 利用胡克定律可以得到单向复合材料中存在下列本构关系: $\sigma_{13}^0 = 2\mu_{13} \bar{\varepsilon}_{13}$, 其中 $\bar{\varepsilon}_{13} = \varepsilon_{13}^0 + V_1^z \varepsilon_{13}^*$, 而对于纯基体材料有 $\sigma_{13}^0 = 2\mu_0 \varepsilon_{13}^0$, 由此可得

$$\frac{1}{\mu_{13}} = \frac{V_1^z}{\mu_1} + \frac{V_0}{\mu_0} \quad (11)$$

(4) 纵向泊松比

$$\gamma_1 = \frac{V_1^z \gamma_1 \mu_1 (1 - \gamma_0) + V_0 \gamma_0 \mu_0 (1 - \gamma_1)}{V_1^z \mu_1 (1 - \gamma_0) + V_0 \mu_0 (1 - \gamma_1)} \quad (12)$$

式中: E_1 和 E_0 分别是原墙体中混凝土和砌块的弹性模量; γ_1 和 γ_0 分别是原墙体中混凝土和砌块

的泊松比; μ_1 和 μ_0 分别是原墙体中混凝土和砌块的剪切模量; κ_1 和 κ_0 分别是原墙体中混凝土和砌块的体积模量; V_1^z 、 V_1^h 、 V_0 分别是原墙体中混凝土肋柱和外框柱、肋梁和暗梁、砌块的体积分数。

3 正交各向异性墙体抗侧刚度的推导

图 3 是经过等效后的正交各向异性复合材料弹性板, 假定沿 x 轴和 z 轴的弹性模量分别为 E_{11} 和 E_{33} , 利用弹性力学方法推导该墙体的抗侧刚度^[9~11]。

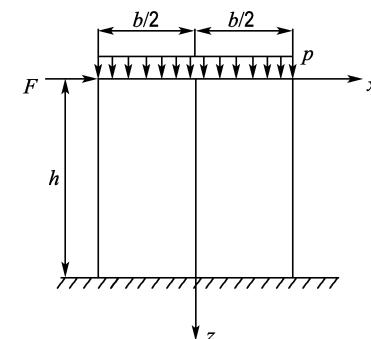


图 3 等效后的正交各向异性墙体

Fig. 3 An orthotropic elastic slab with composites after equivalence

假定应力函数为

$$\psi = Axz + Bx^2 + Cx^3 + Dx^3z + Ex^2z \quad (13)$$

则

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 2B + 6Cx + 6Dxz + 2Ez \quad (14)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = -(A + 3Dx^2 + 2Ex) \quad (15)$$

根据本构关系:

$$\varepsilon_x = S_{11} \sigma_x + S_{13} \sigma_z = S_{13} (2B + 6Cx + 6Dxz + 2Ez);$$

$$\varepsilon_z = S_{13} \sigma_x + S_{33} \sigma_z = S_{33} (2B + 6Cx + 6Dxz + 2Ez);$$

$$\gamma_{xz} = S_{44} \tau_{xz} = -S_{44} (A + 3Dx^2 + 2Ex) \quad (15)$$

式中 S_{11} 、 S_{13} 、 S_{33} 和 S_{44} 是该墙体的柔度系数, 与弹性常数有以下关系:

$$S_{11} = \frac{1}{E_{11}}, \quad S_{13} = -\frac{\gamma_1}{E_{33}}, \quad S_{33} = \frac{1}{E_{33}}, \quad S_{44} = \frac{1}{\mu_{13}}$$

由几何关系

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

分别积分可得

$$u = S_{13} (2Bx + 3Cx^2 + 3Dx^2z + 2Exz) -$$

$$S_{33} (3Cz^2 + Dz^3) - \omega z + u_0$$

$$\begin{aligned} v = & S_{33}(2Bz + 6Cxz + 3Dxz^2 + Ez^2) - \\ & S_{13}(Dx^3 + Ex^2) - S_{44}(Ax + Dx^3 + \\ & Ex^2) + \omega x + v_0 \end{aligned} \quad (16)$$

根据力的边界条件

$$(1) - \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{xz} t dx = - \int_{-b/2}^{b/2} -(A + 3Dx^2 + 2Ex) t dx = F \Rightarrow \\ Ab + Db^3/4 = F/t$$

$$(2) (\tau_{xz})_{x=\pm b/2} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -(A + 3Db^2/4 + Eb) = 0 \\ -(A + 3Db^2/4 - Eb) = 0 \\ E = 0 \\ A + 3Db^2/4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(3) (\sigma_z)_{z=0} = p \Rightarrow 2B + 6Cx = p \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ B = p/2 \end{cases}$$

$$\text{可得 } A = \frac{3F}{2bt}, D = -\frac{2F}{b^3t}.$$

根据位移边界条件

$$\text{当 } x = 0, z = h \text{ 时 } u = 0, v = 0, \partial v / \partial x = 0$$

得到

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{4F}{b^3t}h^3S_{33} + \frac{3Fh}{2bt}S_{44} \\ v_0 &= -phS_{33} \\ \omega &= \frac{6F}{b^3t}h^2S_{33} + \frac{3F}{2bt}S_{44} \end{aligned}$$

抗侧刚度为在 $z = 0$ 处, 当 $u = 1$ 时 F 的值

$$F = \frac{1 - pS_{13}x}{\frac{4h^3}{b^3t}S_{33} + \frac{3h}{2bt}S_{44}} = \frac{1 + p \frac{\gamma_1}{E_{33}}x}{\frac{h^3}{3E_{33}I} + \frac{1.5h}{A\mu_{13}}} \quad (17)$$

考虑到肋梁、肋柱对墙板刚度的影响, 以及轴压比对墙板刚度的影响, 对上述公式进行如下修正:

$$F = \frac{1 - pS_{13}x}{\frac{4h^3}{b^3t}S_{33} + \frac{3h}{2bt}S_{44}} = \frac{1 + p \frac{\gamma_1}{E_{33}}x}{\alpha_1 \left(\frac{h^3}{3E_{33}I} + \frac{1.5h}{A\mu_{13}} \right)} \quad (17)$$

式中: α_1 为肋梁、肋柱对墙板刚度的影响系数, 根据前期的研究成果^[2] 取 $\alpha_1 = 2.87\bar{s}/\bar{l} + 1.11$, $\bar{s} = \sum n_i s_i / \sum n_i$, n_i 为肋梁、肋柱间分格的个数, s_i 为肋梁、肋柱间距离, $\bar{l} = (b+h)/2$, b, h 分别为墙板的长和高。

4 模型的试验验证

墙板的尺寸详图见图 4, 假设 $E_1 = 10E_0$, $\gamma_1 = \gamma_0 = 0.2$, $V_1^u = 0.17$, $V_1^z = 0.25$, $V_0 = 0.58$, 其试验受力示意图见图 5, 利用式(9)~

(12) 可得墙板的等效弹性常数, 与前期研究公式^[2] 得到的弹性常数均列于表 1, 并且利用这些弹性常数代入式(17) 可求得墙板的弹性抗侧刚度, 并与试验测得的数据进行了比较分析。

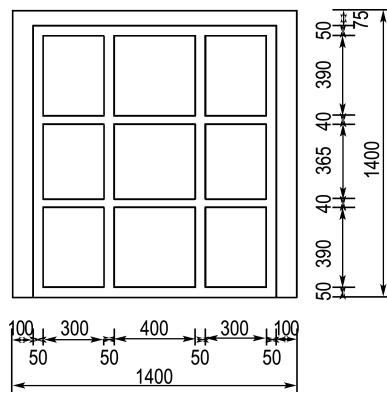


图 4 墙板尺寸详图(单位: mm)

Fig. 4 The sizes of the slab (unit: mm)

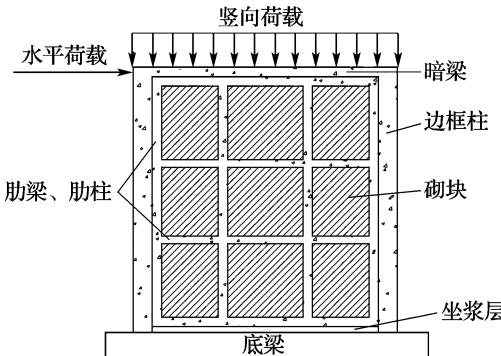


图 5 试验受力示意图

Fig. 5 The schematic representation of the experiment

表 1 墙板弹性抗侧刚度几种理论计算值与试验值的对比

Tab. 1 The comparison between calculated values and experimental values of the slab elastic anti-lateral rigidity

计算顺序	E_{11}	E_{33}	μ_{13}	γ_1	墙体抗侧刚度 / $(kN \cdot mm^{-1})$
二次单向单层纤维复合材料模型	$3E_0$	$2.67E_0$	$1.61\mu_0$	0.12	31.5
双向纤维单层复合材料模型	$2.84E_0$	$4.16E_0$	$1.61\mu_0$	0.15	32.6
本文公式	$2.28E_0$	$3.08E_0$	$1.65\mu_0$	0.20	31.9
试验结果					32.1

由表 1 可以看出, 由本文公式计算出的墙体抗侧刚度, 与试验值符合较好, 而且得出的结果与

实际情况也较接近。而二次单向单层纤维复合材料模型计算出的肋柱方向弹性模量比肋梁方向小,这与实际情况不符,因为肋柱方向的混凝土体积比要大于肋梁方向的。同时双向纤维单层复合材料模型得到的泊松比小于基体和纤维的,这也不符合实际情况。

5 结语

密肋复合墙体结构在弹性阶段,应用复合材料理论,将墙体视为一种以轻质砌块为基体,混凝土肋梁、肋柱、外框为增强纤维的复合材料等效弹性板,利用 Mori-Tanaka 方法对密肋复合墙体等效弹性板模型的弹性常数进行推导,并且利用这些弹性常数计算墙体的弹性抗侧刚度,其结果与试验数据吻合较好。

参考文献:

- [1] 黄 炜. 密肋复合墙体抗震性能及设计理论研究 [D]. 西安: 西安建筑科技大学, 2004
- [2] 田英侠. 密肋复合墙板受力性能试验研究与理论分析 [D]. 西安: 西安建筑科技大学, 2002
- [3] 田英侠, 陈 平, 姚谦峰, 等. 密肋复合墙板等效弹性常数计算方法研究 [J]. 工业建筑, 2003, 33(1): 10-12

- [4] 西安建筑科技大学. 密肋壁板轻型框架结构理论与应用研究[R]// 科学技术研究报告. 西安: 西安建筑科技大学, 2000
- [5] 杜善义, 王 彪. 复合材料细观力学[M]. 北京: 科学出版社, 1998: 28-42
- [6] ZHAO Y H, WENG G J. Effective elastic moduli of rib-bon-reinforced composites [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1990, 57(1): 158-167
- [7] TANDON G P, WENG G J. Average stress in the matrix and effective moduli of randomly oriented composites [J]. *Composites Science and Technology*, 1986, 27(2): 111-132
- [8] TAYA M, MURA T. The stiffness and strength of an aligned short-fiber reinforced composite containing fiber-end cracks under uniaxial applied stress [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1981, 48: 361-367
- [9] TIMOSHENKO S P. *Theory of Elasticity* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004
- [10] SMITH B S. Lateral stiffness of infilled frames [J]. *Journal of Structure Division, ASCE*, 1962, 88(6): 183-199
- [11] ASTERIS P G. Lateral stiffness of brick masonry infilled plane frames [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2003, 129(8): 1071-1079

Study of an equivalent elastic composite slab model in multi-ribbed slab wall

SUN Jing*, YAO Qian-feng

(School of Civil Engineering and Architecture, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: Multi-ribbed slab structure (MRSS) is a new structural system developed in recent years, with multi-ribbed slab wall as its main bearing member. An analysis of the multi-ribbed slab wall on the elastic stage by means of composite material theory is made. Based on the Mori-Tanaka method, an equivalent elastic slab model adapted to multi-ribbed slab wall is established, and anti-lateral rigidity of orthotropic equivalent elastic slab is deduced by theory of elasticity. The characteristic of this method is that it considers the impact of the Poisson ratio of ribbed beam, ribbed column and silicate block on elastic constants, and takes into account the impact of orthotropy of the slab on anti-lateral rigidity. By testing the model and analyzing experimental data, the composite material equivalent elastic slab model and its anti-lateral rigidity deducing are testified feasible.

Key words: multi-ribbed slab wall; composite material; equivalent elastic slab model; Mori-Tanaka method; anti-lateral rigidity